Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Antonín Slavík; Jiří Veselý
Constantin Carathéodory (1873–1950)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 68 (2023), No. 2, 81–104

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/151747`

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2023

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://dml.cz`

Constantin Carathéodory (1873–1950)

Antonín Slavík, Jiří Veselý

Abstrakt. Letos uplyne 150 let od narození velmi všestranného matematika Constantina Carathéodoryho. V následujícím textu připomeneme jeho život a některé matematické výsledky.

Před 150 lety se v Berlíně 13. září 1873 narodil patrně nejvýznamnější řecký matematik 20. století Constantin Carathéodory (Konstantinos Karatheodori, *Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή*). Sama o sobě zní tato věta poněkud podivně, ale vysvětlení není nijak složité: Pocházel totiž z rodiny Stephana Carathéodoryho (1834–1907), který v té době byl již dva roky prvním sekretářem ottomanského zastupitelstva v Berlíně.[1]

1. Prostředí

V této části vycházíme převážně z monografie [12]; viz též [6], sv. 5, 387–408 (Autobiographische Notizen), [14], [15], [20], [22], [28] a [33]. Stephanova žena Despoina[2] (1851–1879), roz. Petrokokkinos, zemřela poměrně mladá na zápal plic a o Constantina a jeho sestru Loukiu (1875–1942) se starala jejich babička z matčiny strany Euthalie Petrokokkinos (1828–1894), která Stephanovi vedla domácnost. Ten byl po čtvrt století sultánovým vyslancem v Bruselu až do roku 1900, kdy byl propuštěn; v Bruselu strávil i zbytek života.[3]

Kromě Bruselu prožil Constantin část dětství s prarodiči z matčiny strany v Marseille, kde často delší čas pobývali. Všimněme si blíže dalších jejich předků: Na 15 zastupitelstvích Ottomanské říše v Evropě, která získala roku 1834 statut vyslanectví, pracovalo cca 10 jejich příbuzných, a to v Athénách, Vídni, Londýně, Turínu, Římě, Berlíně, Haagu, Washingtonu a Bruselu. Např. Constantinův prastrýc Alexander Carathéodory Pasha (1833–1906), jehož otec byl osobním lékařem sultána Mahamuta II., byl roku 1878 guvernérem Kréty. Ten přeložil významnou práci z trigonometrie ze 13. stol.; strýc Telemachos Carathéodory (1845–1927) studoval v Curychu, kde mu přednášel matematiku Hermann Amandus Schwarz (1843–1921). V rodinném prostředí se tak Constantin mohl setkat s mnoha významnými lidmi, např. s hrabětem Brandenburgem nebo lordem Vivianem, se skladatelem Paderewskim a dalšími (viz [22]).

[1]Ottomanská říše (v západní Evropě často označovaná jako Turecko) existovala v období cca 1299–1922. Dnešní území Řecka bylo dlouho její součástí.

[2]Dále užíváme frekventovanější formu jména Despina.

[3]Snad prý nedokázal zabránit zveřejnění jisté pomluvy o sultánovi, bližší podrobnosti nejsou známy. O svém propuštění se dozvěděl z novin. Autorem konfliktního textu byl patrně bývalý překladatel na francouzském velvyslanectví v Konstantinopolu (dnes Istanbul), hrabě Émile de Kératry (1832–1904), spisovatel a politik. Ačkoli se ho Stephanos snažil od vydání dohodou odradit, ústřední vláda Ottomanské říše takovou dohodu odmítla a místo toho obětovala svého vyslance. Na propuštění měly patrně podíl i intriky jeho nástupce, sultánova oblíbence Saliha Münira Pashi (1859–1939); viz též poznámka 19, s. 485 v [12].

doc. RNDr. Antonín Slavík, Ph.D., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 75 Praha 8, e-mail: `slavik@karlin.mff.cuni.cz`, doc. RNDr. Jiří Veselý, CSc., Kolínská 15, 130 00 Praha 3, e-mail: `jvesely@karlin.mff.cuni.cz`

Obr. 1. C. Carathéodory (zdroj: Greek City Times, `https://tinyurl.com/a2738exe`)

Carathéodory k tomu později ve svých autobiografických poznámkách poznamenal (viz [12]): *Strávil jsem trochu více času, než by se mohlo zdát nutné, s Řeky působícími v tureckých diplomatických službách. Ale atmosféra, v níž jsem vyrůstal, by nebyla pochopitelná pro toho, kdo by nevěděl o existenci těchto mužů; jejich výjimečné vlastnosti se vyvinuly díky zvláštní souhře jedinečných historických událostí.* Vlivem mimořádně rozvětvených písemných i osobních kontaktů svého otce vyrůstal Constantin v prostředí vyšší společnosti a navštívil s ním snad všechny tehdejší evropské země kromě Španělska a Ruska.

2. Životní osudy

Talentovaný Constantin rozvíjel své schopnosti též díky výjimečnému prostředí, ve kterém žil. Služebná, která o něj a jeho sestru pečovala, byla Němka – ta je učila němčinu. V Bruselu se při školním vzdělávání naučil francouzštinu, kterou ovládal stejně plynně jako řečtinu. Kromě řečtiny a francouzštiny hovořil německy, italsky, anglicky, turecky a nizozemsky. Byl od osmi let dva roky žákem soukromé základní školy v Bruselu a také navštěvoval základní školu v San Remu. Dlouhý čas trávil s otcem. Od roku 1885 navštěvoval rok gymnázium. Tehdy se u něj začal projevovat zvýšený zájem o matematiku. Roku 1886 přešel na nově zřízené bruselské francouzské gymnázium *Athénée Royal d'Ixelles*, na kterém pak v roce 1891 maturoval. Již tehdy se projevovaly jeho mimořádné matematické schopnosti opakovanou výhrou v soutěži organizované pro školáky v Belgii.

V roce 1891 nastoupil ke studiu na prestižní *École Militaire de Belgique* jako kadet její ženijní části. Constantinovi se škola líbila, naučila ho nejen jízdě na koni, ale i inženýrské přípravě konstrukce opevnění, projektivní geometrii a jejím praktickým aplikacím, a také mechanice a termodynamice. Školu ukončil v roce 1895 a začal pomáhat svému bratranci s plánováním dopravní sítě na ostrově Somos. Tuto práci opustil kvůli řecko–turecké válce a od podzimu roku 1898 pracoval v Egyptě na anglických stavbách přehrad na Nilu.

Pomáhal v Egyptě stavět přehradu u Assuitu, asi 400 km jižně od egyptského hlavního města Káhiry, a to až do dubna roku 1900. Navštívil i stavbu (staré) asuánské přehrady; ta byla dokončena roku 1902. Provedl též měření Cheopsovy pyramidy a napsal o něm desetistránkový článek, který vyšel roku 1901 v Belgii; je přetištěn v [6] pod číslem CXXXI. Z doby pobytu v Egyptě pramenila i jeho celoživotní záliba v archeologii.

V Egyptě se seznámil s historikem a archeologem Archibaldem Henrym Saycem (1845–1933) a také s archeologem Howardem Carterem (1874–1939), který se později roku 1922 podílel na objevu téměř neporušeného Tutanchamonova hrobu.[4] Mimo jiné se také vzdělával v matematice studiem *Cours d'Analyse* Camilla Jordana (1838–1922) a učebnice analytické geometrie od Georga Salmona (1819–1904).[5] V době pobytu v Egyptě dospěl k přelomovému rozhodnutí věnovat se zcela matematice. A tak se roku 1900, nepodporován v tomto rozhodnutí ani rodinou, ani přáteli, ocitl v Berlíně jako sedmadvacetiletý student univerzity.[6] V Berlíně poslouchal nejen přednášky Schwarzovy, který se stal nástupcem Karla Weierstrasse (1815–1897), ale také přednášky Ferdinanda Georga Frobenia (1849–1917). Nalezl zde i matematické přátele, např. Lipóta Fejéra (1880–1959), Erharda Schmidta (1876–1959) nebo Olivera Kelloga (1878–1932).

Po dvou letech se na Schmidtovo doporučení přesunul do tehdejší matematické Mekky, do Göttingen; se Schmidtem byli přátelé po celý zbytek Carathéodoryho života. Zde se ocitl v blízkosti Felixe Kleina (1849–1925), Hermanna Minkowského (1864–1909) a Davida Hilberta (1862–1943). Od roku 1903 byl také členem Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV). V roce 1904 se poprvé zúčastnil (třetího) Mezinárodního matematického kongresu (ICM) v Heidelbergu. Jeho zájem si získal variační počet; doktorská disertace, kterou obhájil pod Minkowského vedením roku 1904, nese název *O nespojitých řešeních ve variačním počtu*.[7] Pod vlivem Kleinovým, který se stal jeho osobním přítelem, se rozhodl habilitovat v Göttingen, k čemuž došlo na osobní Hilbertovu žádost již v roce 1905. Habilitační přednáška *O délce a obsahu* předznamenala jeho celoživotní zájem. Při svém učitelském působení v Göttingen, kde byl neplaceným přednášejícím v období 1905–1908, se setkával pravidelně s Ludwigem

[4]Svůj pobyt v Egyptě Carathéodory později zúročil v Berlíně, když pracoval na své první knize *Egypt*, která vyšla v Aténách roku 1901. V souvislosti s ní se také seznámil s rodinou Benakisů, s jejíž členkou a svou vzdálenou příbuznou, spisovatelkou Penelopou Deltou (1874–1941), se přátelil a dlouhou dobu si s ní dopisoval.

[5]Přeložil ji Wilhelm Fiedler (1832–1912), který byl v letech 1864 až 1867 profesorem na pražské (německé) technice. Pro jeho doplněné a upravené německé překlady Salmonových učebnic bylo užíváno zkrácené označení Salmon–Fiedler.

[6]Za zmínku stojí výjimka: našel oporu pro toto rozhodnutí u strýce z otcovy strany Telamacha, kterého často navštěvoval v Korintu. Při jeho návštěvě v blízké Istmii také napsal svůj první *matematický* článek.

[7]Viz položku [B] v kapitole 5.

Prandtlem (1875–1953), Otto Toeplitzem (1881–1940) a Paulem Koebem (1882–1945); viz také [32].

V únoru 1908 se habilitoval v Bonnu, kde pak jeden rok přednášel aplikovanou matematiku a geodézii. Také se v dubnu 1908 zúčastnil čtvrtého kongresu ICM v Římě. A ještě jedna věc z tohoto období podstatně změnila Carathéodoryho život: 18. února 1909 se oženil. S manželkou Euphrosyne, svojí o devět let mladší tetou,[8] se zakrátko odstěhovali do Hannoveru, kde byl jmenován profesorem na technické univerzitě. Na jeho jmenování měl patrně největší zásluhu Klein. Carathéodoryho odchod od inženýrské profese k „abstraktní“ matematice vzbuzoval u některých kolegů obavy, zda bude mít stále blízko k aplikacím. Carathéodory se však v Hannoveru zabýval více fyzikou než matematikou. V Hannoveru se 7. listopadu 1909 narodil jeho syn Stephanos (1909–1970).

Roku 1910 byl Carathéodory jmenován profesorem na nově otevřené technice (Königliche Technische Hochschule Breslau) ve Vratislavi. Jejího otevření 29. listopadu se osobně zúčastnil i císař Vilém II.[9] Carathéodory byl navíc v letech 1910–1913 členem senátu a rok vykonával funkci prorektora. Není bez zajímavosti, že před 20 lety mu za přítomnosti řeckého vyslance byla na technice odhalena pamětní deska.

Do období Carathéodoryho pobytu ve Vratislavi spadají jeho kontakty s Albertem Einsteinem (1879–1955). Ten jej označoval za svého učitele a potvrzoval jeho nesporný a významný příspěvek ke speciální teorii relativity.[10] K jejich kontaktům se ještě vrátíme. Ve Vratislavi měli Carathéodoryovi krásný dům ve vilové čtvrti, který byl zničen během 2. světové války. Tam se jim také narodila dcera Despina (1912–2009).

Ve Vratislavi setrval Carathéodory do roku 1913, kdy přešel do Göttingen na uprázdněné Kleinovo místo. Podobně přešel roku 1918 z Göttingen na berlínskou univerzitu, kde nahradil Frobenia. O rok později se stal členem *Pruské akademie věd*.

Téhož roku 1919 byl řeckým předsedou vlády Venizelosem[11] jmenován rektorem Ioaninské univerzity ve Smyrně. Pro Carathéodoryho to byla životní výzva, kterou přijal a se vším úsilím se vrhl do organizační práce, při níž využíval zkušeností z pobytu ve Vratislavi. Velikou péči věnoval struktuře univerzity, budoval její knihovnu a vybavoval univerzitu přístroji převážně německé provenience. Na tomto místě, které jemu i jeho rodině rychle přirostlo k srdci, se ale dlouho nezdržel a musel je za dramatických okolností opustit dřív, než univerzita přijala studenty. V září 1922 Turci vyhnali Řeky ze Smyrny; viz [35]. Celé město hořelo a všude umírali lidé. Tehdejší americký konzul George Horton (1859–1942) o tom podává svědectví (viz též [22]): *Jeden z posledních Řeků, které jsem viděl v ulicích Smyrny, byl rektor univerzity profesor Carathéodory.*

[8]Sňatky uvnitř širší rodiny nebyly u Carathéodoryho širšího příbuzenstva ničím neobvyklým, spíše naopak tradicí.

[9]Současně byl slavnostně otevřen i tamější Grünwaldský most. Vratislav byla co do velikosti kolem roku 1910 *třetím městem v Německu* a byla významným vzdělávacím centrem. S městem je spojen i Johannes Brahms (1833–1897) díky speciální skladbě *Akademische Festouvertüre*, op. 80, kterou zkomponoval během roku 1880 a osobně řídil, když mu univerzita udělila 4. ledna 1881 čestný doktorát. Předehra je orchestrální verzí písně „Gaudeamus igitur“. Skladba byla poctou městu, jehož akademická a intelektuální komunita si rychle vydobyla místo mezi nejlepšími v Evropě. Obě vysokoškolské instituce, univerzita a polytechnika, byly motorem této kulturní expanze; viz [33].

[10]O jejich odborných stycích vypovídá vzájemná korespondence dnes uchovávaná v Einsteinově centru v Jeruzalémě.

[11]Setkali se spolu poprvé již v roce 1895. Viz [12], str. 498.

Společně s ním odešlo ztělesnění řeckého génia, kultury a civilizace v Orientu. Jeho cílem bylo, až do posledního okamžiku jeho pobytu na ostrově ve Smyrně, bez ohledu na riziko ztráty života, zachránit knihovnu, archivy a vědecké přístroje univerzity. To se mu do značné míry podařilo.

V letech 1922–1924 vyučoval Carathéodory v Athénách na univerzitě a též na technice. Nespokojen s vědeckou úrovní a možnostmi kontaktů nakonec v roce 1924 Řecko opustil a přesídlil do Mnichova na univerzitu na uvolněné místo po Ferdinandu von Lindemannovi (1852–1939), který je znám zejména pro svůj důkaz transcendence čísla π. Rok nato byl zvolen řádným členem Bavorské akademie věd. Svůj odchod do Německa komentoval v korespondenci s Penelopou Deltou takto: *Ujišťuji vás, že za těch pár měsíců, co jsem tady, jsem dokázal udělat víc než za dva roky v Aténách. Moje působení ve Smyrně mohlo být užitečné, nicméně Řecko mým odchodem nic neztratilo, naopak! Místo abych tam ztrácel čas, mohu zde být užitečnější propagováním Řecka.*

Malý odskok od tématu: Zdálo by se, že triumviráty byly jen záležitostí starověkého Říma, ale vyskytly se i daleko později např. ve francouzské či německé matematice.[12] Jeden takový poměrně známý vznikl za účasti Carathéodoryho v Mnichově, kde ho s ním tvořili jeho kolegové na univerzitě (Ludwig-Maxmilians-Universität) Oskar Perron (1880–1975) a Heinrich Tietze (1880–1964). Na této univerzitě se sešli v krátkém rozmezí let 1922–1925 a setrvali na ní až do svého penzionování, ale i pak na ní pokračovali v přednáškách. Pro nás není bez zajímavosti, že Tietze působil v letech 1910–1919 na tehdejší brněnské technice.

Carathéodory měl v Mnichově výborné životní podmínky pro svoji rodinu, a tak odborně atraktivnější nabídky (např. z Berkeley) odmítal. V roce 1927 přišla další velice atraktivní nabídka z USA: Americká matematická společnost spolu s Harvardovou univerzitou ho pozvaly k sérii 20 přednášek. A tak se v lednu 1928 vydal na cestu; v USA se dočkal nejen vysokého ocenění, ale i velmi přátelského přijetí.[13]

V roce 1929 v souvislosti se změnou vlády v Řecku dostal nabídku, aby reorganizoval tamější univerzity. Carathéodory neodolal a přes rady přátel včetně Arnolda Sommerfelda (1868–1951) nabídku přijal. Během několika měsíců vypracoval návrh reorganizace univerzity v Athénách.[14] V roce 1930 se pak stal čestným rektorem athénské polytechniky a čestným profesorem athénské univerzity. Nová konzervativní vláda však zbavila Carathéodoryho místa komisaře pro vzdělávání a on se vrátil do Mnichova.

V roce 1932 se Carathéodory zúčastnil devátého kongresu ICM v Curychu, kde pronesl jednu z hlavních přednášek. Dámský program se líbil i Despině, která otce doprovázela. Přípravu kongresu provázely organizační obtíže, de facto probíhal v souladu se stanovami, jejichž platnost rok před kongresem vypršela. Během konání kongresu někteří i velmi významní matematici vyslovili pochybnosti o smyslu ICM. Horší časy však teprve přicházely.

V červenci roku 1936 se zúčastnil dalšího kongresu ICM v Oslu. Byl znovu pozván k přednáškám v USA, kam odjel v srpnu. Vystoupil tam mj. s přednáškou na oslavě 300. výročí vzniku Harvardovy univerzity a do Německa se vrátil až roku 1937. Téhož

[12] Např. trojice Lagrange, Laplace, Legendre (Paříž), Kronecker, Kummer, Weierstrass (Berlín) nebo Hilbert, Klein, Minkowski (Göttingen).

[13] Byl prvním ze zahraničních hostů pozvaných AMS.

[14] Tento návrh se stal podkladem později přijatého zákona, kterým se řídily řecké univerzity až do roku 1982.

roku navštívil naposled ve svém životě Řecko u příležitosti oslav 100. výročí vzniku Řecké archeologické společnosti a dokonce přispěl i studií o tvaru chrámu Parthenon, který byl vystavěn v 5. stol. př. n. l.

3. Éra nacismu

Éra nacismu byla pro mnoho Němců obdobím denní nejistoty a podobně ji prožíval i Carathéodory. Spolu s Perronem a Tietzem nebyli podporovateli vzniklého režimu, což bylo o nich víceméně obecně známo.[15] V jistém smyslu byla klíčovou otázka, jak přežít. Carathéodory po penzionování v roce 1938 nepřestal vědecky pracovat a napsal další 3 knihy a 17 vědeckých článků (10 z nich vyšlo). V únoru 1943, bez ohledu na obtíže spojené s cestováním, se chtěl zúčastnit Hilbertova pohřbu v Göttingen, ale zabránila mu v tom nemoc. Řeč, kterou si připravil, přečetl nad Hilbertovým hrobem Gustav Herglotz (1881–1953). Díky svým četným konexím ve všech částech světa však Carathéodory dokázal několika svým „neárijským“ kolegům poskytnout šanci na budoucnost tím, že jim zařídil možnost emigrace. Spolu s Einsteinem se také podílel na pozvání některých vědců židovského původu do USA.

Zdálo by se, že i v době vlády nacistů mohl Carathéodory volně cestovat a že se těšil přízni tohoto režimu, ale není to úplná pravda. Např. když byl vybrán do 70členné papežské akademie v roce 1937, byla mu účast na inauguraci z německé strany nejprve povolena a pak zamítnuta; přitom Carathéodory toto ocenění považoval za svoji nejvyšší poctu, z Německa se jí dostalo jen čtyřem dalším lidem. Na druhé straně když v roce 1940 Gaudozentenbundführer Dr. Otto Hörner popsal Tietzeho jako naprosto nenapravitelného reakcionáře, pro něhož je i dnes národní socialismus na univerzitách nehodný diskuse a Sommerfelda a Perrona označil za příslušníky podobné malé reakční kliky, kteří stejně jako Tietze sabotují každý národněsocialistický požadavek, o Carathéodorym se vůbec nezmínil.

Carathéodoryho dcera Despina, která si roku 1937 vzala řeckého inženýra Theodora Scutarise (1911–1954) s diplomem z Eidgenössische Technische Hochschule v Curychu, navštěvovala i se svým malým synem rodiče v Mnichově. V předvečer (doslova!) napadení Polska v roce 1939 odcestovala z Německa do Švýcarska. Nějaký čas pak žila v Řecku a při řecko-italské válce, která předcházela německé okupaci Řecka, ošetřovala zraněné řecké vojáky v lékařských zařízeních svého vzdáleného příbuzného. Když pak došlo k okupaci Řecka, uprchla do Tanganiky.

Carathéodorymu se nezdařilo odjet ke čtyřem přednáškám v Belgii, neboť stejně jako v případě účasti na další konferenci v Itálii tomu zabránilo vypuknutí války; kromě krátké zprávy z Řecka v roce 1941 neměli Carathéodoryovi také možnost kontaktu s Despinou až do ledna 1946.[16]

V září roku 1943 zorganizoval rektor freiburgské univerzity, nacista Wilhelm Süss (1895–1958) ve Schwarzwaldu skromné shromáždění na oslavu Carathéodoryho sedmdesátin; oficiálně byl pořadatelem DMV. Süss studoval ve Freiburgu a byl žákem Alfreda Loewyho (1873–1935). Kvůli první světové válce musel Süss na tři roky pře-

[15] Podrobněji je to popsáno v [12], str. 290, v části *Three “Incorrigible” Opponents*.

[16] Despina prožila prakticky celou válku po odchodu z Řecka v Tanganice, kde její muž vlastnil sisalovou plantáž. Mnichov i přes intervenci amerického velvyslance v Řecku mohla navštívit teprve v roce 1948.

rušit studia a dokončil je pod vedením Ludwiga Bieberbacha (1886–1982). Když byl v roce 1934 Loewy jako Žid propuštěn, nastoupil na jeho místo.[17]

V té době válka již silně doléhala i na civilisty. Mnichov, kde Carathéodory žil s manželkou a s invalidním synem (obrna ve věku 5 let), byl těžce bombardován. Na začátku války nebyl pro nálety spojenců technicky dosažitelný, to se však změnilo. Pro některé nálety byly použity stovky bombardérů: Mnichov byl z více než 50 % poškozen nebo zničen a přes 300 tisíc obyvatel přišlo o ubytování; při nejtěžším náletu v půlce července 1944 zahynulo skoro 1 500 obyvatel (viz [34]). Vnější část domu, ve kterém Carathéodoryovi bydleli, byla během těchto náletů poškozena, celkové škody nebyly naštěstí tak vážné. Avšak např. Perronův dům byl velmi vážně poškozen, knihy a nábytek se ale podařilo zachránit. Také v ulici, kde žil Tietze, byla většina domů poškozena nebo zničena. Celkové napětí a strach však nebyly pro Carathéodoryho bez následků: jeho žena Euphrosyne měla v lednu 1945 lehkou mozkovou příhodu (nezvládala pak již např. chůzi po schodech, proto prožili Carathéodoryovi poslední měsíce války prakticky ve sklepě).

V roce 1944 vznikl záměr Bavorské akademie vydat Carathéodoryho sebrané spisy. Perron to vysvětlil takto: Práce *jsou rozptýleny v mnoha časopisech mnoha zemí, protože všechny redakční rady velmi stály o jeho příspěvky. Dnes je mnoho z nich velmi obtížně dostupných. Proto se Bavorská akademie rozhodla vydat jeho sebraná pojednání, k čemuž on sám vykonal první přípravné práce.* Prezident akademie s tímto záměrem Carathéodoryho seznámil a ten tuto poctu s díky přijal. Celkové přípravné práce na tomto projektu trvaly do Vánoc 1944.

Je zajímavé, že téměř celý rok 1943 se Carathéodory snažil odjet na pozvání Ernsta Lindelöfa (1870–1946) k přednáškám do Finska. Měly se konat v dubnu a květnu roku 1943 a Carathéodory požádal rektora Mariana San Nicola (1887–1955)[18] již v lednu o souhlas s cestou. Toto pozvání bylo pravděpodobně spojeno s tím, že se Carathéodory měl stát čestným členem Finské společnosti věd. Byl jím zvolen v únoru, ale k přednáškovému pobytu nedošlo pro odpor mnichovských nacistů, přestože berlínští funkcionáři s cestou souhlasili.

V době 1942 až 1945 Carathéodory také pracoval na vydání Eulerových spisů ve Švýcarsku: psal historický úvod k jeho pracím z variačního počtu. Rukopis odevzdal na podzim roku 1946. Byl před tím pozván do Curychu, ale návštěva se uskutečnila až v říjnu 1946; při ní se také setkal s Despinou, která se vrátila z Tanganiky do Evropy. Roku 1954 zemřel její manžel Theodoros a Despina se později vdala za významného řeckého politika Konstantina Rodopoula (1896–1971).

Po válce Carathéodory vážně uvažoval o návratu do Řecka a při pobytu ve Švýcarsku navštívil řecké vyslanectví, aby obnovil svůj řecký pas (německý měl). Podrobněji viz [12], str. 429. Přišly však horší časy: na konci července 1947 zemřela jeho milovaná manželka Euphrosyne a jeho samotného postihla tentýž rok vážná nemoc. Z onemoc-

[17] V roce 1937 se Süss stal předsedou DMV a zastával tuto funkci až do konce války. Roku 1938 vstoupil do NSDAP a letech 1940 až 1945 byl rektorem freiburské univerzity. Byl ve velmi dobrých vztazích s říšským ministrem školství, vědy a kultury Bernhardem Rustem (1883–1945). Dnes je patrně nejznámější jako první ředitel Matematického institutu v Oberwolfachu (1944–1958); zakládací listinu institutu ze 3. srpna 1944 podepsal Hermann Göring (1893–1946). Názory na Süsse nejsou jednotné, jeho role je podrobně popsána v [26].

[18] San Nicolò byl právník a německý nacionalista, který byl dříve děkanem a později dokonce i rektorem Německé univerzity v Praze.

nění prostaty se u něj objevila urémie. Skoro polovinu roku strávil na soukromé klinice Josephinum v Mnichově. Na konci roku se ocitl doma, ale o Velikonocích roku 1948 byl opět hospitalizován.

V březnu 1949 se podrobil operaci a věřil v uzdravení. Dokonce ještě 4. prosince měl přednášku *O délce a obsahu*, shodou okolností s týmž jménem, jaké měla jeho přednáška habilitační. Byla to jeho poslední přednáška. Zlepšení zdravotního stavu bylo jen dočasné a 2. února 1950 Carathéodory zemřel.

4. Z jiného úhlu

Jak již víme, Carathéodory byl výjimečný člověk. Aristokrat a kosmopolita, či možná přesněji Evropan – jakkoli byly možnosti odchodu z horké evropské půdy do USA atraktivní a lákavé, nevyužil je. Jeho všestrannost a šíře zájmů, sahající daleko za hranice matematiky, byla a je udivující. Vzděláním praktik, technicky fundovaný člověk s hlubokým zájmem o obecnou historii, nejen historii vlastního oboru, kterou prokazoval při psaní knih.

Jeho zájmy od archeologie a zeměpisu přes termodynamiku a optiku, hygienu, ekonomiku, organizaci školství, politiku ke znalosti matematiky v neobvykle širokém a přitom hlubokém záběru vzbuzují obdiv. Přičteme-li k tomu schopnost komunikovat s lidmi, společenskou obratnost a znalost mnoha jazyků a šarm, není divu, že lidem velmi imponoval.

Např. Max Born (1882–1970) v knize [4] píše, jak se s ním setkal u Minkowského v Göttingen: *Byl tam jen jeden další host, který se později stal mým velkým přítelem s významným vlivem na můj vědecký vývoj. Měl velmi neněmeckou tvář, jemné a ušlechtilé rysy, dlouhý nos, vysoké čelo a slabý cizí přízvuk. Byl představen jako doktor Constantin Carathéodory; už jsem slyšel o tomto brilantním mladém Řekovi, který měl být přijat jako lektor matematiky. Bavil nás vyprávěním o své práci železničního inženýra v Egyptě.*

Constance Reid ve své knize [25] o Hilbertovi popisuje Carathéodoryho jako 170 cm vysokého impozantního a aristokraticky vyhlížejícího člověka, který trochu šilhal. K výtečnému jazykovému vybavení měl Carathéodory kromě prostředí, ve kterém prožíval dětství, i rodové dispozice. Jeho prastrýc Alexander Carathéodory a budoucí tchán byl znám jako polyhistor, který prý hovořil 16 jazyky. I rodiče byli vzhledem k otcovu povolání diplomata dobře jazykově vybaveni. Mimochodem, jeho žena Euphrosyne, kterou velmi miloval, hovořila v době jejich sňatku řecky, turecky a francouzsky, ale brzo se naučila německy a později i anglicky.

Perron o ní napsal, že byla temperamentní, brzy si v Německu zvykla a ráda sdílela životní radosti i strasti se svými přáteli. Ti na ni vzpomínali jako na velmi diskrétní, pohostinnou, vřelou a laskavou osobu, naprosto oddanou své rodině. Pro svého muže byla ideální partnerkou. Jejich syn Stephanos se od pěti let potýkal s následky obrny, přesto však otci velmi pomáhal. Dcera Despina by raději studovala jazyky, ale podle přání otce se zapsala v Mnichově na práva. Po pokusu pokračovat ve studiu v Řecku se vrátila do Mnichova, ale ztratila motivaci ke studiu a na přání otce odešla do Švýcarska; je velmi pravděpodobné, že ji chtěl ochránit před nacisty.

Jinou typickou vlastností Carathéodoryho byl jeho nepomíjivý zájem o to, s čím se při práci dostal do styku. Z jeho vzpomínek v [6] (sv. V, 389–408) víme, že se o Egypt a archeologii zajímal prakticky celý svůj život.

Obr. 2. Graffiti v Athénách: Carathéodory a Einstein (zdroj: EQRoy / Shutterstock.com)

Uveďme pro zajímavost text jednoho dopisu, který mu poslal Einstein:

Berlín, neděle[19]

Milý kolego!

Vaše odvození považuji za úžasné, teď už všemu rozumím. Nejdříve mi drobné překlepy na druhé stránce působily určité potíže, nyní však rozumím všemu. Měl byste teorii v této nové podobě publikovat v časopise Annals of Physics, protože fyzikové běžně o tomto tématu nic nevědí, jako tomu bylo i v mém případě. Z mého dopisu jsem Vám musel připadat jako Berlíňan, který právě objevil Grünewald a zajímá se, jestli tam už lidé žijí.

Pokud by Vám nevadilo jisté úsilí seznámit mne s kanonickými transformacemi, najdete ve mně pozorného a vděčného posluchače. Pokud by se vám podařilo rozřešit otázku uzavřených časových trajektorií, budu vám neskonale vděčen. Odpovídající řešení však nicméně stojí za trochu námahy.

S pozdravem

Váš Albert Einstein

Byl skromný: svoji první knihu [A] (viz další kapitolu) vydanou roku 1901 zmiňuje jednou větou: *Během svého pobytu v Berlíně jsem napsal malou knížku o Egyptě pro*

[19] Faksimile tohoto dopisu lze nalézt na webu
`https://www.hellenicaworld.com/Greece/Person/en/Caratheodory.html`

serii populárních knih řeckého básníka a spisovatele D. Bikela[20]. Líčí také např. okolnosti Carterových objevů hrobek z roku 1922. I při poslední návštěvě Řecka v roce 1937 věnoval část pobytu archeologii. Velmi podobné to bylo i s jeho matematickými zájmy.

Byl nábožensky založen (řecké pravoslaví) a jeho vztah k náboženství se neomezoval jen na pravidelnou návštěvu bohoslužeb. Pokřtěn byl 25. ledna 1874 v pravoslavném kostele v Berlíně, za války byl v Mnichově místopředsedou řecké farní rady a také donátorem kostela *Salvatorkirche.* Opatroval od něj od roku 1942 i klíče, když byl archimandrita (farář) Meletios Galanopoulos zatčen v Lipsku a poslán do koncentračního tábora v Dachau.

Je velmi těžké soudit Carathéodoryho rozhodnutí zůstat v Německu, i když měl možnost odejít. Je nesporné, že se snažil řadě lidí pomoci, což se v některých případech zdařilo. Snažil se k tomu mj. využít svých styků se Süssem a dalšími nacisty. Jeho blízcí kolegové Perron a Tietze se v nekrolozích o činnosti Carathéodoryho v tomto období, možná i záměrně, podrobně nevěnují. Zdá se, že své rozhodnutí zůstat v Německu chápal jako vlasteneckou povinnost. Věřil, že se mu podaří pod nacisty přežít a že navíc bude moci dění nějak ovlivňovat, ale možnost jeho vlastního rozhodování byla stále více omezována. V [12] se píše, že tragédie jeho přístupu spočívá v tom, že touto volbou nezískal nic, ale ztratil jí příliš mnoho. Na jiném místě je vyjádření ostřejší: *Nikdy se otevřeně nezmínil o holocaustu nebo nacistických zločinech proti Řecku (...) mlčel tváří v tvář zločinům, které porušovaly jakoukoli představu o lidské slušnosti, přijal autoritu nezákonného státu, dělal kompromisy a podřídil se vylučování Židů z vědeckých institucí.* Bylo mu však již hodně přes 60 let a trápily ho nemoci. Jeho kolegové Tietze, Perron a Sommerfeld před ním pravděpodobně zatajili mnoho špatných zpráv, neboť i v nejhorším období pro Německo se chovali velmi lidsky. V redakčním nekrologu časopisu Mathematische Annalen v roce 1950 se o Carathéodorym píše: *...působil více než čtyři desetiletí jako spolupracovník Mathematische Annalen. Jeho iniciativa a rady byly neocenitelné. V kritických dobách pomáhal udržet otevřené brány k světu.*

5. Carathéodoryho knihy

V této části stručně popíšeme všechny knihy, které Carathéodory napsal. Nebyly všechny matematické – první, o které jsme se již zmínili, neměla s matematikou nic společného.

[A] *Η Αίγυπτος (Egypt)*, Syllogos ophelimon biblion [Společnost pro propagaci užitečných knih], Athény, 1901.
Kniha napsaná v řečtině je jakýmsi rozloučením se zemí, kde Carathéodory strávil téměř dva roky života. Obsahuje informace zeměpisného a historického charakteru a dočkala se ještě dalších dvou vydání.

[B] *Über die diskontinuierlichen Lösungen in der Variationsrechnung*, doktorská disertace, Universität Göttingen, 1904 (též v [6], sv. I, 3–79).

[20] Demetrios Bikelas (1835–1908) prožil velkou část života v Londýně a v Paříži. Na jeho návrh se konaly roku 1896 první olympijské hry v Athénách. Tam také žil na sklonku života, byl velmi aktivní a vždy měl v popředí zájmů řeckou budoucnost.

Disertační práce svým rozsahem a závěrečnou úpravou představuje spíše knihu. Inspirací pro její vznik mohla být přednáška Hanse Hahna (1879–1934) o variačním počtu, kterou přednesl jako host v Göttingen roku 1903. „Nespojitá řešení“ zmíněná v názvu ve skutečnosti představují spojitá řešení, jejichž derivace nemusí být spojitá. Další podrobnosti lze najít např. v [13].

[C] *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig–Berlin, 1918.
Mezi Carathéodoryho díly patří tato kniha k nejznámějším a je velmi ceněna. Věnoval ji Schmidtovi a Ernstu Zermelovi (1871–1953). Obsahuje předmluvu a jedenáct kapitol, které dosti podrobně pokrývají látku základního kurzu (reálné) matematické analýzy včetně Lebesgueova integrálu a míry. Byla přeložena do nejméně pěti jazyků a dočkala se více než 75 vydání (tyto údaje jsou cca 20 let staré!). Již zde se projevila pro Carathéodoryho charakteristická snaha o dokonalost teorie a dosažení ucelené a dobře zpracované prezentace, často s užitím nejmodernějších poznatků; viz [30].

[D] *Conformal representation*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 28, Cambridge, 1932.
Je zajímavé, že v době před publikací [C] se Carathéodory v článcích věnoval spíše otázkám teorie funkcí komplexní proměnné. Jeho výsledky z této oblasti jsou závažné a stimulovaly práce mnoha dalších matematiků. Jeden z výsledků, který bývá spojován s Carathéodoryho jménem, pracující s lokální souvislostí hranice, se poprvé objevil v dlouho zapomenuté doktorské disertaci Marie Torhorst (1888–1989).

[E] *Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1935.
První část knihy (cca 160 stran) se velmi podrobně věnuje parciálním diferenciálním rovnicím prvního řádu. Vybudovaný aparát je pak využit ve druhé části (cca 200 stran) ke studiu variačního počtu. Kniha nemohla pojmout všechny výsledky, kterých Carathéodory dosáhl (např. nespojitá řešení variačních úloh), obsahuje však podrobnou bibliografii s odkazy na doplňující materiály. Dočkala se několika vydání v němčině i v angličtině. Revidované vydání z roku 1956 připravil E. Hölder, přičemž aktualizoval i seznam literatury. Pro současného čtenáře je patrně nejdostupnější třetí anglické vydání *Calculus of variations and first order partial differential equations* (AMS Chelsea Publishing, 1999).

[F] *Geometrische Optik*, Julius Springer, Berlin, 1937.
Kniha je kritiky ceněna zejména pro srozumitelné zpracování a spíše pro její teoretické zázemí nežli pro praktické důsledky.

[G] *Elementare Theorie des Spiegelteleskops von B. Schmidt*, Hamburger mathematische Einzelschriften 28, Teubner, Leipzig, 1940 (též v [6], sv. II, 234–279).
Útlá publikace o 36 stránkách svědčí o tom, jak blízko měl Carathéodory k aplikacím matematiky. Při návštěvě USA v roce 1937 se setkal v Pasadeně s Theodorem von Kármánem (1881–1963), se kterým se znal z Göttingen, a Wilhelmem

H. W. Baadem (1893–1960). Ten ho seznámil se Schmidtovým dalekohledem a poznamenal, že by někdo měl popsat teorii tohoto přístroje. Pro Carathéodoryho to byla výzva. Podrobněji viz [12], str. 335.

[H] *Reelle Funktionen. Band 1: Zahlen, Punktmengen, Funktionen*, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1939.
Kniha o problematice reálné analýzy byla rozvržena do tří svazků, vyšel však jen první svazek; zbytek byl pravděpodobně celý zničen před vydáním při bombardování Lipska roku 1943.

[I] *Funktionentheorie* (2 díly), Birkhäuser, Basel, 1950.
V knize je podán velmi podrobný výklad teorie funkcí komplexní proměnné, zdaleka však ne všech partií, kterými se Carathéodory zabýval. Přesto je kniha velmi zajímavá i pro specialisty. Vypůjčíme si lehce poeticky formulovaný názor z recenze[21] Maurice Heinse: *Kniha ... bude trvale zajímat nejen odborníky, ale všechny, kdo se rádi pasou na funkčně-teoretických pastvinách.* Autor se představení knihy veřejnosti bohužel nedočkal. Dobře dostupný je anglický překlad *Theory of functions of a complex variable* (Chelsea, 1954).

[J] *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*, Birkhäuser, Basel, 1956.
Tato posmrtně vydaná kniha je věnována axiomatizaci výstavby teorie míry a integrálu, podrobněji viz např. článek [11].

Pohled na seznam Carathéodoryho knih dokládá jeho zájem o fyziku. Zabýval se otázkami geometrické optiky, ale také entropie a statistické mechaniky. Snad nejvýrazněji se to projevilo v jeho přístupu k termodynamice, kterou se pokusil axiomatizovat v práci *Untersuchungen über die Grundlagen der Thermodynamics*, která vyšla již roku 1909 v Mathematische Annalen 67, 355–386 (viz též [6], sv. II, XXVII). Jako inspirace mu nejspíše posloužila Hilbertova axiomatika geometrie publikovaná v knize *Grundlagen der Geometrie* (Lipsko, 1903).

6. Carathéodoryho aktivity v matematice

Téměř pomineme šíři Carathéodoryho zájmů a všimneme si alespoň některých stránek jeho matematických aktivit. Za svého života napsal práce z variačního počtu, teorie reálných funkcí, o konformních zobrazeních, parciálních diferenciálních rovnicích, z teorie míry a integrálu a o souvisejících tématech. Napsal též celou řadu článků souvisejících s výročími jiných matematiků apod. Kromě toho psal i o astronomii, termodynamice a optice a ovlivnil i vývoj teorie relativity; viz např. [1]. Již zmíněný záměr vydání jeho sebraných *matematických* spisů měl umožnit snazší přístupnost jeho prací a také ocenit jeho široký záběr, který je dosti ojedinělý. Carathéodory by měl být dobře známý i u nás, stačí k tomu jednoduchý experiment: zkuste na stránkách DML CZ vyhledat výskyt jeho jména.

Do sebraných spisů [6] nebyly zařazeny *všechny* knihy (některé ostatně v roce 1944 ještě neexistovaly) a to se nezměnilo ani u dalších vydání; pětisvazkový komplet [6]

[21] Bull. Amer. Math. Soc. 57 (1951), 190–192.

obsahuje 24 textů v 5 oddílech o variačním počtu,[22] 22 textů z termodynamiky, geometrické optiky a mechaniky, 39 textů z teorie funkcí o Picardově problému, o koeficientech mocninných a Fourierových řad, o Schwarzově lemmatu a o konformním zobrazení včetně jeho hraničního chování, o normálních systémech funkcí, o funkcích více (komplexních) proměnných a o dvou speciálních tématech. Pátý svazek obsahuje 4 texty geometrické povahy, 2 o parciálních diferenciálních rovnicích, 16 textů z historie a o významných matematicích a 44 prací rozmanitého charakteru včetně textů jiných matematiků o Constantinu Carathéodorym. Za zvláštní zmínku stojí Carathéodoryho autobiografické poznámky a text Erharda Schmidta o něm z roku 1943 napsaný při příležitosti jeho 70. narozenin. Kromě jiného tento poslední díl obsahuje *chronologický seznam Carathéodoryho prací* (včetně knih a jejich případných dalších vydání je jich k době uveřejnění 134).

Již jsme popsali Carathéodoryho matematické knihy, nyní alespoň stručně připomeneme jeho další významné matematické aktivity. Vedle již zmíněné práce při vydávání *Mathematische Annalen*[23] zastával analogickou funkci i v *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. Byl zvolen členem několika akademií (např. Berlín, Göttingen, Bologna, Athény). Je po něm pojmenováno několik významných matematických vět a také jedna z největších poslucháren Ludwig-Maximilian-Universität v Mnichově. Od 21. března 2009 je v Komotini (Řecko) otevřeno muzeum, které je mu věnováno, a podobné rodinné muzeum existuje i v místě jeho původu, Nea Vyssa.

7. Variační počet

Carathéodoryho 70stránková doktorská disertace se týká variačního počtu. Tímto tématem se zabýval prakticky celý život a také mu je věnována jeho čtvrtá matematická kniha [E]. Základní úlohou variačního počtu je hledání extrémů funkcionálu

$$J[x] = \int_a^b L(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

na množině funkcí $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ splňujících okrajové podmínky

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b. \tag{2}$$

Mezi klasické problémy tohoto typu patří například:

- Úloha o brachistochroně, kterou formuloval Johann Bernoulli (1667–1748) a vyřešili ji jeho bratr Jacob Bernoulli (1655–1705), Gottfried W. Leibniz (1646–1716), Isaac Newton (1643–1727) a Guillaume de l'Hospital (1661–1704). Úkolem je nalézt křivku, po které se hmotný bod dostane působením gravitace za nejkratší dobu z bodu $A = [a, x_a]$ do bodu $B = [b, x_b]$; řešením je oblouk cykloidy.

- Úloha o minimální rotační ploše, tj. nalezení rovinné křivky, která spojuje body $A = [a, x_a]$ a $B = [b, x_b]$ a má tu vlastnost, že rotační plocha získaná rotací

[22] Prvním z textů je již výše zmíněná Carathéodoryho disertační práce.
[23] Redaktorem Annalen byl v letech 1925–1928.

křivky kolem osy x má nejmenší možný povrch. Leonhard Euler zjistil, že hledanou křivkou je oblouk řetězovky; příslušná minimální rotační plocha se nazývá katenoid.

- Hledání nejkratší spojnice dvou bodů na ploše, tj. křivky, která leží na ploše, spojuje dané dva body a má minimální délku. Jde o tzv. geodetickou křivku, např. u sféry se jedná o oblouk hlavní kružnice.

Dobře známou nutnou podmínku pro lokální extrém funkcionálu (1) představuje Eulerova–Lagrangeova diferenciální rovnice[24]

$$\frac{\partial L}{\partial x}(t, x(t), x'(t)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}(t, x(t), x'(t))\right) = 0,$$

nejedná se však o podmínku postačující.

Carathéodory objevil nový přístup k řešení variačních úloh – tzv. metodu ekvivalentních problémů, pro kterou se vžilo označení „královská cesta k variačnímu počtu“ pocházející od H. Boernera. Pokusíme se aspoň naznačit hlavní myšlenky tak, jak jsou popsány v Boernerově přehledovém článku [3], v Carathéodoryho učebnici [E] a v knize [16]. Pro ilustraci se omezíme na jednorozměrný případ ($n = 1$) a budeme hledat minimum funkcionálu (1) splňující okrajové podmínky (2).

Zvolme libovolnou dostatečně hladkou funkci S dvou proměnných a definujme[25]

$$L^*(t, x, x') = L(t, x, x') - \frac{\partial S}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)x'.$$

Uvažujme modifikovaný funkcionál

$$\begin{aligned} J^*[x] &= \int_a^b L^*(t, x(t), x'(t))\,\mathrm{d}t = J[x] - \int_a^b \left(\frac{\partial S}{\partial t}(t, x(t)) - \frac{\partial S}{\partial x}(t, x(t))x'(t)\right)\mathrm{d}t = \\ &= J[x] - [S(t, x(t))]_{t=a}^{b} = J[x] - (S(b, x(b)) - S(a, x(a))). \end{aligned}$$

Pro funkce $x\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ splňující okrajové podmínky (2) tedy platí

$$J^*[x] = J[x] - (S(b, x_b) - S(a, x_a)).$$

Pro pevně zvolenou funkci S je výraz $S(b, x_b) - S(a, x_a)$ konstanta nezávislá na volbě funkce x. Vidíme, že funkcionál J nabývá minima v x, právě když J^* nabývá minima v x; jedná se o ekvivalentní variační problémy.

Vhodnou volbou funkce S se pokusíme dosáhnout toho, aby nový variační problém byl co nejjednodušší. Chtěli bychom, aby pro všechny trojice (t, x, x') platilo

$$L^*(t, x, x') \geqq 0 \tag{3}$$

a aby existovala dostatečně hladká funkce p dvou proměnných taková, že

$$L^*(t, x, p(t, x)) = 0. \tag{4}$$

[24] Zápis $\frac{\partial L}{\partial x'}$ znamená derivaci L podle třetí proměnné.
[25] Symbol x' zde představuje název proměnné, nikoliv derivaci.

Pak není těžké nahlédnout, že řešení diferenciální rovnice

$$x'(t) = p(t, x(t)), \quad t \in [a, b], \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b, \tag{5}$$

je minimem funkcionálu J^* s hodnotou $J^*[x] = 0$.

Zbývá vysvětlit, jak najít funkce S a p. Z podmínek (3) a (4) vyplývá, že pro každou dvojici (t, x) funkce $x' \mapsto L^*(t, x, x')$ nabývá minima v bodě $p(t, x)$, a tedy

$$\frac{\partial L^*}{\partial x'}(t, x, p(t, x)) = 0. \tag{6}$$

Z definice L^* pak derivováním podle x' získáme

$$\frac{\partial S}{\partial x}(t, x) = \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x, p(t, x)). \tag{7}$$

Využitím tohoto vztahu a definice L^* můžeme přepsat rovnost (4) do tvaru

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) = L(t, x, p(t, x)) - \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x, p(t, x))p(t, x). \tag{8}$$

Carathéodory označil vztahy (7) a (8) vyjadřující parciální derivace S za základní rovnice variačního počtu; dnes se nazývají *Carathéodoryho rovnice*. Jejich kombinací dále získáme rovnici

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)p(t, x) - L(t, x, p(t, x)) = 0. \tag{9}$$

Pro libovolnou pevně zvolenou dvojici (t, x) je rovnice (6) pouze nutnou podmínkou pro stacionární bod funkce $x' \mapsto L^*(t, x, x')$. Aby se skutečně jednalo o minimum v bodě $p(t, x)$, musí pro všechna t, x, x' platit

$$L^*(t, x, x') - L^*(t, x, p(t, x)) \geqq 0,$$

neboli (využijeme definici L^* a rovnici (7))

$$L(t, x, x') - L(t, x, p(t, x)) - \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x, p(t, x))(x' - p(t, x)) \geqq 0.$$

K tomu stačí požadovat, aby tzv. Weierstrassova E-funkce

$$E(t, x, x', p) = L(t, x, x') - L(t, x, p) - \frac{\partial L}{\partial x'}(t, x, p)(x' - p) \tag{10}$$

byla nezáporná; k této podmínce dospěl již dříve Karl Weierstrass.

Vraťme se však k otázce nalezení vhodných funkcí S a p. Předpokládejme, že pro všechna $t, x, x' \in \mathbb{R}$ dokážeme z rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial x'}(t, x, x') = y$$

vypočítat x' pomocí jistého vztahu

$$x' = \varphi(t, x, y).$$

Potom z první Carathéodoryho rovnice (7) plyne

$$p(t, x) = \varphi(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)).$$

Využitím tohoto vztahu můžeme eliminovat p z rovnice (9) a dostaneme

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)\varphi(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)) - L(t, x, \varphi(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x))) = 0,$$

neboli zkráceně

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t, x) + H(t, x, \frac{\partial S}{\partial x}(t, x)) = 0, \tag{11}$$

kde

$$H(t, x, y) = y\varphi(t, x, y) - L(t, x, \varphi(t, x, y))$$

je tzv. Hamiltonova funkce. Vztah (11) je nelineární parciální diferenciální rovnice pro hledanou funkci S; jde o tzv. Hamiltonovu–Jacobiho rovnici, která je dobře známa z teoretické mechaniky. Jejím řešením (což nemusí být snadný úkol) získáme funkci S. Následně vypočítáme druhou hledanou funkci p, vyřešíme rovnici (5) a získáme tak společné minimum funkcionálů J^* a J. (Díky nezápornosti funkce E zavedené vztahem (10) máme skutečně zaručeno, že se jedná o minimum. To je rozdíl oproti Eulerově–Lagrangeově rovnici, která pouze charakterizuje stacionární body funkcionálu J.)

Carathéodoryho přístup k variačnímu počtu má blízko nejen k fyzice, ale též k teorii optimální regulace. V podstatě dospěl i k rovnici, která je v současnosti známa jako Hamiltonova–Jacobiho–Bellmanova rovnice a hraje klíčovou roli v dynamickém programování, za jehož zakladatele je považován Richard E. Bellman (1920–1984); podrobněji viz např. [21].

Jiným pěkným Carathéodoryho příspěvkem ke klasickému variačnímu počtu je článek *Zwei Beweise des Satzes, daß der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfanges den größten Inhalt hat* (Mathematische Annalen, 1909), jehož spoluautorem je Eduard Study (1862–1930). Tématem je slavná izoperimetrická úloha – nalezení uzavřené rovinné křivky dané délky, která ohraničuje oblast s největším obsahem. Není těžké uhodnout, že hledaným řešením je kružnice; obtížné je toto tvrzení korektně dokázat. Čistě geometrické důkazy pocházející od Jakoba Steinera (1796–1863) byly založeny na konstrukcích ukazujících, že pro uzavřenou křivku, která není kružnicí, je možné sestrojit jinou uzavřenou křivku stejné délky, která ohraničuje větší obsah. Odtud však ještě automaticky neplyne, že kružnice je skutečně řešením izoperimetrické úlohy – není totiž jasné, zda vůbec nějaké řešení musí existovat. Carathéodory a Study ve svém společném článku navrhli dva různé postupy, jak se s potížemi vypořádat. Zaměřili se na ekvivalentní problém, tzv. úlohu královny Didó: Je-li dána přímka p a bod $A \in p$, je potřeba najít křivku dané délky L spojující A s libovolným bodem $B \in p$ tak, aby obsah plochy ohraničené křivkou a přímkou byl maximální.

Carathéodory začal s libovolnou křivkou c_0 splňující dané podmínky. Pokud se nejedná o půlkružnici, lze použít Steinerovu konstrukci k sestrojení křivky c_1, která má stejnou délku a ohraničuje větší plochu. Stejný postup pak opakujeme a získáme posloupnost křivek $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ s neklesajícími obsahy. Carathéodory dokázal, že tyto křivky stejnoměrně konvergují k půlkružnici. Z toho plyne, že plocha ohraničená libovolnou křivkou c_0 je menší nebo rovna obsahu poloviny kruhu, a tudíž řešením úlohy královny Didó je půlkružnice. Podrobnosti a další informace o historii izoperimetrické úlohy lze najít v [2].

8. Integrál a míra

Je obecně známo, že pojem obsahu rovinného útvaru prošel dlouhým vývojem. Již ve starověku se pomocí důmyslných metod podařilo určit obsahy některých křivočarých útvarů (např. Hippokratovy měsíčky, Archimédův výpočet obsahu kruhu a parabolické úseče). Objev diferenciálního a integrálního počtu přinesl mnohem obecnější postup: Pro výpočet obsahu oblasti pod grafem nezáporné funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ lze použít vztah

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

kde F je primitivní funkce k f. Dlouhou dobu však nebylo zcela jasné, pro jaké funkce f tento postup funguje, a jak je vlastně samotný obsah definován.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857)[26] pracoval se spojitými funkcemi $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ a definoval integrál jako limitu součtů ve tvaru

$$\sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

přičemž $a = x_0 < \ldots < x_m = b$ je dělení intervalu $[a, b]$ a limita se bere vzhledem k posloupnosti dělení, jejichž norma (délka nejdelšího podintervalu) konverguje k nule. Ukázal, že limita existuje a nezávisí na volbě posloupnosti dělení. Částečně se dokázal vyrovnat i s některými funkcemi s konečně mnoha body nespojitosti.

Definice integrálu, kterou popsal Bernhard Riemann (1826–1866) v práci [27] na 7 stranách, je obvykle první definice integrálu, se kterou se dnes setká většina studentů. Podobně jako u Cauchyho jde o geometricky názorný přístup přes konečné součty obsahů obdélníků generovaných děleními intervalu $[a, b]$. Rozdíl je jen v použití součtů

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

kde ξ_i je libovolný bod intervalu $[x_{i-1}, x_i]$, tj. ne nutně levý krajní bod. Ještě podstatnější je ale skutečnost, že a priori nepředpokládáme spojitost funkce f. Riemannův integrál tudíž existuje nejen pro spojité funkce, ale také např. pro všechny monotónní funkce. Tento integrál má však i podstatné nedostatky:

- Je definován jen pro omezené funkce.
- Není definován pro funkce s mnoha body nespojitosti.
- Není dobrý ve vztahu k (bodovému) limitnímu přechodu.

[26] V letech 1833 až 1838 pobýval v Praze a byl učitelem vévody z Bordeaux Henriho d'Artois, vnuka Karla X., francouzského krále v období 1825–1830.

Jako ilustrace poslouží následující příklad. Seřaďme všechna racionální čísla z intervalu $[a, b]$ do prosté posloupnosti $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nechť χ_n je charakteristická funkce množiny $\{q_1, \ldots, q_n\}$ a χ je charakteristická funkce $\{q_k : k \in \mathbb{N}\}$. Dále zvolme libovolnou klesající posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergující k 0 s prvním členem $c_1 = 1$. Definujme $f(q_n) = c_n$ a $f(x) = 0$ v ostatních bodech $[a, b]$. Označíme-li $f_n = f\chi_n$, pak $f_n \to f$ a pro Riemannův integrál platí

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = 0 = \int_a^b f.$$

Na druhou stranu platí $\chi_n \to \chi$ a také

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \chi_n = 0$$

(protože $\int_a^b \chi_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$), avšak Riemannův integrál $\int_a^b \chi$ neexistuje. Funkce f je nespojitá právě ve všech racionálních bodech intervalu $[a, b]$, ale χ je nespojitá ve všech bodech $[a, b]$.[27]

Henri Lebesgue (1875–1941) vytvořil ve své disertaci [18] teorii integrálu, který dnes nese jeho jméno. Často se na úvod zdůrazňuje, že pro omezenou funkci použil nikoliv jako Riemann dělení intervalu, na němž je definována, ale dělil její obor hodnot. Problém zavedení integrálu se pak z velké části redukuje na zavedení velikosti množiny, tj. její míry.[28] Každou množinu $E \subset \mathbb{R}$ můžeme pokrýt konečným nebo spočetným systémem intervalů a sečíst jejich délky. Infimum všech těchto součtů nazval Lebesgue *vnější mírou* množiny E a označil ji $m_e(E)$. Není těžké ověřit, že pro libovolné dvě množiny $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ platí

$$m_e(E_1 \cup E_2) \leqq m_e(E_1) + m_e(E_2),$$

ani pro disjunktní množiny však obecně neplatí rovnost. Lebesgue se s tím vyrovnal následovně: Pro omezenou množinu $E \subset [a, b]$ zavedl její *vnitřní míru* vztahem

$$m_i(E) = (b - a) - m_e([a, b] \setminus E).$$

Pokud se vnitřní míra E shoduje s její vnější mírou, označil množinu E za *měřitelnou* a definoval její míru jako číslo $m(E) = m_e(E) = m_i(E)$. Poté ukázal, že množinová funkce m je aditivní (dokonce σ-aditivní). Dále vysvětlil, že podobný postup lze použít i ve vyšších dimenzích. Pro ilustraci uvažoval dvojrozměrný případ a je zajímavé, že v definici vnější míry množiny $E \subset \mathbb{R}^2$ použil pokrývání trojúhelníky, zatímco dnes se běžně pracuje s obdélníky (dvourozměrnými intervaly).

Elegantnější definice měřitelných množin pochází od Carathéodoryho. Ten si všiml, že pro každé dvě množiny $A, E \subset \mathbb{R}^n$ platí

$$A = (A \cap E) \cup (A \setminus E),$$

[27] Funkce χ je tzv. Dirichletova funkce a f je (zobecněná) Riemannova funkce.

[28] Dnes je známo více cest k zavedení tohoto integrálu, nicméně cesta „přes míru“ je výhodná např. pro souvislost s teorií pravděpodobnosti.

a tudíž

$$m_e(A) \leqq m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E).$$

Navíc ukázal, že omezená množina E je měřitelná právě tehdy, když v předchozí nerovnosti nastává rovnost pro každou $A \subset \mathbb{R}^n$. (Pokud rovnost platí pro každou A, pak volbou $A = [a, b]$ dostaneme $m_i(E) = m_e(E)$. Důkaz opačné implikace je obtížnější, viz např. [5], věta 5.6.) K definici měřitelné množiny tedy nepotřebujeme vnitřní míru; libovolnou (ne nutně omezenou) množinu $E \subset \mathbb{R}^n$ prohlásíme za měřitelnou, pokud

$$m_e(A) = m_e(A \cap E) + m_e(A \setminus E)$$

pro každou $A \subset \mathbb{R}^n$. Tato podmínka se nazývá *Carathéodoryho podmínka*.[29]

Carathéodoryho přístup bývá součástí výkladu téměř v každé učebnici teorie míry. Je velmi schůdný jak pro důkazy, tak pro zobecňování, např. při konstrukci k-rozměrné míry v n-rozměrném prostoru. Již Carathéodory ukázal, že místo Lebesgueovy vnější míry m_e lze začít s jakoukoliv množinovou funkcí μ^* na $\mathbb{R}^n$, která je monotónní, σ-subaditivní, aditivní pro množiny kladné vzdálenosti a prázdné množině přiřazuje nulu. Z takové funkce lze získat míru tím, že se omezíme na množiny E splňující Carathéodoryho podmínku

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E)$$

pro každou $A \subset \mathbb{R}^n$. Viz [C], kapitola 5.

9. Diferenciální rovnice

Lebesgueův integrál nalezl uplatnění v mnoha oblastech matematiky včetně diferenciálních rovnic. Průkopníkem v tomto směru byl opět Carathéodory a jeho nová teorie obyčejných diferenciálních rovnic, která je vyložena na 25 stranách v závěru knihy [C].

Připomeňme nejprve pojem absolutně spojité funkce. Je-li $I \subset \mathbb{R}$ interval, pak funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ se nazývá absolutně spojitá, pokud ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každý systém nepřekrývajících se intervalů $\{[a_i, b_i] : i = 1, \ldots, m\}$ splňující $\sum_{i=1}^m (b_i - a_i) < \delta$ platí $\sum_{i=1}^m |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$.

Roli absolutně spojitých funkcí v teorii Lebesgueova integrálu popisuje následující tvrzení: Funkce $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ je absolutně spojitá, právě když existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ splňující $F(x) - F(a) = \int_a^x f$ pro všechna $x \in [a, b]$. V takovém případě navíc platí $F' = f$ skoro všude na $[a, b]$ (tj. všude s výjimkou množiny nulové míry).

Carathéodory místo klasické obyčejné diferenciální rovnice

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \qquad y(x_0) = y_0,$$

pracoval s integrálním tvarem

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a, b],$$

[29] Svého času ji popularizoval prof. Jan Mařík (1920–1994) takto: *Měřitelná množina je nůž, který krájí všechny ostatní množiny aditivně.*

kde integrál je chápán jako Lebesgueův. Funkce y, která představuje řešení rovnice, nemusí být diferencovatelná ve všech bodech $[a, b]$, je však absolutně spojitá a vztah $y'(x) = f(x, y(x))$ platí skoro všude na $[a, b]$. Dospěli jsme tak k zobecnění pojmu řešení diferenciální rovnice; označuje se jako carathéodoryovské řešení. Jaké podmínky musí splňovat funkce f, aby takové řešení existovalo? Carathéodory ukázal, že následující podmínky zaručují lokální existenci řešení procházejícího bodem (x_0, y_0):

- Pro každé $y \in \mathbb{R}$ je funkce $x \mapsto f(x, y)$ měřitelná na $[a, b]$.
- Pro každé $x \in [a, b]$ je funkce $y \mapsto f(x, y)$ spojitá na $\mathbb{R}$.
- Existuje funkce $M\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, jejíž Lebesgueův integrál konverguje (existuje a má konečnou hodnotu) a platí $|f(x, y)| \leqq M(x)$ pro všechna $x \in [a, b]$ a $y \in \mathbb{R}$.

Řešení obecně není určeno jednoznačně. Následující dodatečná podmínka zaručuje jednoznačnost:

- Existuje funkce $L\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, jejíž Lebesgueův integrál konverguje a pro kterou platí $|f(x, y) - f(x, z)| \leqq L(x)|y - z|$ pro všechna $x \in [a, b]$ a $y, z \in \mathbb{R}$.

Pokud nás zajímá jen lokální řešení, stačí, když všechny podmínky platí lokálně v okolí bodu (x_0, y_0).

Carathéodory výše uvedená tvrzení dokázal nejen pro skalární, ale i vektorové funkce f, tj. pro soustavy rovnic. Tím však ještě zdaleka neskončil, zabýval se i spojitou závislostí řešení na počátečních hodnotách a parametrech a rovněž diferencovatelností řešení podle parametru. Zcela po zásluze tedy dnes užíváme termín „Carathéodoryova teorie diferenciálních rovnic“.

10. Teorie funkcí komplexní proměnné

Základy teorie funkcí komplexní proměnné byly položeny v devatenáctém století. Za největší přínos vděčíme třem špičkovým matematikům: jsou jimi Cauchy, Riemann a Weierstrass. Popišme ve zkratce rozdíly v jejich přístupu k holomorfním funkcím, tj. komplexním funkcím komplexní proměnné, které mají v každém bodě derivaci. Cauchy se převážně věnoval integraci, primitivním funkcím a s tím svázanému problému nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě. Riemannův přístup byl geometrický, funkce zprostředkovávaly zobrazení oblastí v komplexní rovině, resp. na obecnějších (Riemannových) plochách. Používal často fyzikálně motivovanou intuici a obohatil teorii krásnými a významnými výsledky. Snaha postavit tyto poznatky na solidní matematický základ přispěla k dalšímu vývoji matematiky. Weierstrassův přístup vycházel z poznatků o mocninných řadách a jejich analytickém pokračování. Jeho úvahy vynikaly přesností a ovlivnil desítky dalších významných matematiků.

Carathéodoryho příspěvek k teorii funkcí komplexní proměnné je velmi významný. Navazuje na Riemannovu větu, která říká, že pro každou neprázdnou jednoduše souvislou[30] oblast $G \subset \mathbb{C}$ různou od $\mathbb{C}$ existuje holomorfní funkce f, která zobrazí G na jednotkový kruh D a navíc inverzní funkce f^{-1} je holomorfní na D. Riemann se

[30] Neprázdná oblast $G \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá, pokud je souvislá a zároveň množina $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus G$ je souvislá.

uvedenou problematikou zabýval v roce 1851 a Carathéodory byl jedním z mnoha matematiků, kteří na něj navázali.[31] Roku 1913 dokázal větu, která se po něm jmenuje a která říká, že takové zobrazení jednotkového kruhu D na oblast $G \subset \mathbb{C}$, jejíž hranici tvoří jednoduchá uzavřená (tj. Jordanova) křivka, lze rozšířit na homeomorfismus mezi $\overline{D}$ a $\overline{G}$.

Jak je to ve složitějších případech, kdy je hranice příslušné oblasti G v $\mathbb{C}$ komplikovanější? Trvalo nějakou dobu, než si matematici uvědomili, že jde o dvojici naprosto rozdílných problémů – o Riemannovu větu a o problém spojitého rozšíření zobrazení, které převádí oblast na kruh. Pro oblasti s nepatrně složitější hranicí nemusí mít druhý problém řešení; tento negativní výsledek je podstatně jednodušší než získání uspokojivějších poznatků. Poměrně komplikovaná teorie tzv. *prvokonců*, kterou Carathéodory vytvořil a která se týká hraničního chování prostých holomorfních funkcí v závislosti na této hranici, byla vlastně prvním podstatným krokem na cestě otevírající zcela nové směry; viz např. [10], resp. [23].

11. Věta o konvexním obalu

K základním pilířům kombinatorické geometrie patří Carathéodoryova věta, Hellyova věta a Radonova věta. Je pozoruhodné, že tyto věty jsou navzájem ekvivalentní v tom smyslu, že každou z nich lze dokázat pomocí jakékoliv jiné.[32] Carathéodoryova věta se týká konvexního obalu množiny $M \subset \mathbb{R}^d$, což je nejmenší konvexní množina obsahující M; značí se $\operatorname{conv}(M)$. Lze ukázat, že je to např. průnik všech konvexních množin obsahujících M nebo množina všech konvexních kombinací bodů množiny M, tj.

$$\operatorname{conv}(M) = \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : n \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqq 0,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ x_1, \ldots, x_n \in M \Big\}.$$

Carathéodoryova věta říká, že k získání konvexního obalu ve skutečnosti stačí uvažovat konvexní kombinace tvořené $d+1$ body, tj. každý bod $\operatorname{conv}(M)$ je konvexní kombinací $d+1$ bodů množiny M. Carathéodory uvažoval pouze kompaktní množiny M a příslušné tvrzení je „ukryto“ v jeho článku *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen* z roku 1911, který je věnován zcela jinému tématu – reprezentaci harmonických funkcí pomocí trigonometrických řad. Konvexní množiny a konvexní obaly zde slouží jako pomocný nástroj pro snazší a přehlednější formulaci hlavních výsledků. Carathéodory nepoužíval termín „konvexní kombinace“, místo toho hovořil o těžišti $d+1$ hmotných bodů v $\mathbb{R}^d$, jejichž hmotnosti dávají součet 1. Tvrzení dokázal indukcí vzhledem k dimenzi d, v indukčním kroku využil existenci $(d-1)$-rozměrných opěrných nadrovin v hraničních bodech konvexního obalu.

O tři roky později dokázal Ernst Steinitz (1871–1928), že tvrzení platí pro každou množinu $M \subset \mathbb{R}^d$. V současnosti je známo mnoho variant a zobecnění Carathéodoryovy věty, o kterých se lze dočíst např. v [8]. Jednou z užitečných aplikací Carathéo-

[31] Dnes nejčastěji používaný důkaz Riemannovy věty pochází právě od Carathéodoryho. Podrobněji viz [24].

[32] Podrobnosti lze najít např. v [7] nebo [9]. O Hellyově větě a jejím objeviteli byl v PMFA publikován článek [19].

doryovy věty je následující tvrzení: Je-li $M \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní, pak $\operatorname{conv}(M)$ je rovněž kompaktní. Skutečně, označme

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R}^{d+1} \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_{d+1} \geqq 0,\ \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k = 1\},$$

a definujme spojité zobrazení $F \colon A \times M^{d+1} \to \mathbb{R}^d$ předpisem

$$F(\alpha, x) = \sum_{k=1}^{d+1} \alpha_k x_k, \quad \alpha \in A, \quad x \in M^{d+1}.$$

Pak podle Carathéodoryovy věty platí $\operatorname{conv}(M) = F(A \times M^{d+1})$, což je kompaktní množina, neboť $A \times M^{d+1}$ je kompaktní.

12. Carathéodoryho definice derivace

Carathéodory se dokázal vypořádat i se složitostí některých důkazů. Užitečnou pomůckou je jeho kritérium pro existenci derivace (někdy označované přímo jako Carathéodoryho derivace). Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a nechť $x \in I$. Potom má f v bodě x derivaci, právě když existuje funkce $\varphi \colon I \to \mathbb{R}$ spojitá v bodě x, pro kterou pro všechna $t \in I$ platí

$$f(t) - f(x) = \varphi(t)(t - x).$$

Geometrický význam je jednoduchý: Hodnota $\varphi(t)$ udává směrnici sečny procházející body $[t,\ f(t)]$ a $[x,\ f(x)]$. Existence derivace tedy znamená, že sečny se spojitě blíží k tečně; směrnice tečny je $\varphi(x)$.

Carathéodory zavedl derivaci tímto způsobem ve své učebnici komplexní analýzy [I], definice je však výhodná i pro funkce definované v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{R}^n$. Umožňuje např. zjednodušit důkazy vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce; viz [17] nebo [31], str. 137.

13. Epilog

Pokud by vás při návštěvě Mnichova napadlo navštívit místo Carathéodoryho posledního odpočinku na hřbitově *Waldfriedhof*, najdete je na místě číslo 303. Od smrti Euphrosyne roku 1947 je zdobil masivní pomník v podobě starověkého ionského sloupu, na který byly později doplněny údaje o Constantinovi a jejich synovi. Symbolizoval jejich řecký původ. Poměrně nedávno byl nahrazen jen prostým dřevěným křížem s Carathéodoryho fotografií, a i ten zakrátko zmizel. Restaurovaný pomník se nyní nachází v sousedství neobyzantského chrámu *Allerheiligen-Hofkirche* v mnichovské královské rezidenci, kde byl slavnostně odhalen 8. července 2019, ostatky zůstaly snad na původním místě.[33]

[33] Dle informace poskytnuté Carathéodoryho pravnučkou Despinou Scutari žijící v Londýně.

14. Závěr

Věříme, že znalost historie je předpokladem úspěšné práce v jakémkoliv oboru. Podobný názor zastával i Constantin Carathéodory, jemuž jsme věnovali tento článek: *Byl bych rád, kdyby se mi podařilo vás přesvědčit o tom, že je nejen příjemné a zábavné číst někdy díla starých matematických autorů, ale že to občas může být i užitečné pro pokrok ve vědě… Může se stát, že práce nejskvělejších lidí bude přehlédnuta. Pokud jejich myšlenky příliš předbíhají svou dobu a pokud je široká veřejnost není připravena přijmout, mohou tyto myšlenky spát po staletí na policích knihoven… Dovedu si představit, že větší část z nich stále ještě spí a čeká na příchod kouzelného prince, který je probudí.*[34]

Poděkování. Autoři děkují Despině Scutari a Stephanovi Geroulanovi za poskytnuté informace týkající se Carathéodoryho rodiny a prof. Jiřímu Spurnému za cenné připomínky k textu.

L i t e r a t u r a

[1] Behnke, H.: *Constantin Carathéodory: 1873–1950.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 75 (1974), 151–165.

[2] Blåsjö, V.: *The isoperimetric problem.* Amer. Math. Monthly 112 (2005), 526–566.

[3] Boerner, H.: *Carathéodory's Eingang zur Variationsrechnung.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 56 (1953), 31–58.

[4] Born, M.: *My life – recollections of a Nobel laureate.* Taylor & Francis, 1978.

[5] Bressoud, D.: *A radical approach to Lebesgue's theory of integration.* Cambridge University Press, 2008.

[6] Carathéodory, C.: *Gesammelte mathematische Schriften.* Studienausgabe, sv. I–V, C. H. Beck, München, 1954–1957.

[7] Danzer, L., Grünbaum, B., Klee, V.: *Helly's theorem and its relatives.* Proc. Sympos. Pure Math. 7 (1963), 101–180.

[8] Eckhoff, J.: *Helly, Radon, and Carathéodory type theorems.* In: P. M. Gruber, J. M. Wills (Eds.): Handbook of convex geometry. Volume A. North-Holland, 1993, 389–448.

[9] Eggleston, H. G.: *Convexity.* Cambridge University Press, 1958.

[10] Epstein, D. B. A.: *Prime ends.* Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. 42 (1981), 385–414.

[11] Fábera, J.: *O Carathéodoryově algebraizaci míry a integrálu.* PMFA 6 (1961), 249–254, 299–304.

[12] Georgiadou, M.: *Constantin Carathéodory: Mathematics and politics in turbulent times.* Springer, 2004.

[13] Graves, L. M.: *Discontinuous solutions in the calculus of variations.* Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1930), 831–846.

[34] Citát je uveden v [21], Carathéodory jej pronesl v roce 1936 na setkání Mathematical Association of America.

[14] Hashagen, U.: *Ein griechischer Mathematiker als bayerischer Professor im Dritten Reich: Constantin Carathéodory (1873–1950) in München.* In: D. Hoffmann, M. Walker: »Fremde« Wissenschaftler im Dritten Reich, Wallstein-Verlag, Göttingen, 2011, 151–181.

[15] Hill, V. L.: *Constantin Carathéodory: 1873–1950.* Doktorská disertace. American University, Washington, D. C., 2003.

[16] Kot, M.: *A first course in the calculus of variations.* AMS, 2014.

[17] Kuhn, S.: *The derivative á la Carathéodory.* Amer. Math. Monthly 98 (1991), 40–44.

[18] Lebesgue, H.: *Intégrale, longueur, aire.* Annali di Mat. Ser. III 7 (1902), 231–359.

[19] Netuka, I., Veselý, J.: *Eduard Helly, konvexita a funkcionální analýza.* PMFA 29 (1984), 301–312.

[20] Perron, O.: *Constantin Carathéodory.* Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 55 (1952), 39–51.

[21] Pesch, H. J.: *Carathéodory's royal road of the calculus of variations: missed exits to the maximum principle of optimal control theory.* Numer. Algebra Control Optim. 3 (2013), 161–173.

[22] Phili, Ch.: *Constantin Carathéodory: his life and work.* In: N. Hadjisavvas, P. Pardalos (Eds.): *Advances in convex analysis and global optimization. Honoring the memory of C. Carathéodory (1873–1950)*, Kluwer, 2001, xiii–xxiv.

[23] Pommerenke, Ch.: *Boundary behaviour of conformal maps.* Springer, 1992.

[24] Qiu, Z.: *The Riemann mapping problem* [online].
Dostupné z: `https://arxiv.org/abs/1307.0439`

[25] Reid, C.: *Hilbert. With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl.* Springer-Verlag, 1970.

[26] Remmert, V. R.: *Mathematicians at war. Power struggles in Nazi Germany's mathematical community: Gustav Doetsch and Wilhelm Süss.* Rev. Hist. Math. 5 (1999), 7–59.

[27] Riemann, B.: *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe.* Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13 (1868), 87–131.

[28] Simos, A.: *Constantin Caratheodory: The greatest Greek mathematician* [online].
Dostupné z: `https://greekherald.com.au/culture/history/constantin-caratheodory-greatest-greek-mathematician/`

[29] Thiele, R.: *On some contributions to field theory in the calculus of variations from Beltrami to Carathéodory.* Hist. Math. 24 (1997), 281–300.

[30] Tietze, H.: *Constantin Carathéodory. Auszugsweise aus einem ausführlichen Nachruf.* Arch. Math. 2 (1950), 241–245.

[31] Veselý, J.: *Základy matematické analýzy.* MatfyzPress, 2019.

[32] Veselý, J.: *Cesta německé matematiky k aplikacím a Felix Klein.* PMFA 66 (2021), 81–102.

[33] Weron, A., Wojas, B.: *Constantin Carathéodory (1873–1950).* Wiadom. Mat. 39 (2003), 95–106.

[34] Wikipedia: *Bombing of Munich in World War II* [online].
Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bombing_of_Munich_in_World_War_II`

[35] Wikipedia: *Burning of Smyrna* [online].
Dostupné z: `https://en.wikipedia.org/wiki/Burning_of_Smyrna`