Vlasta Moravcová

Zavedení přímky v analytické geometrii

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 3, 183–198

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152012

ZAVEDENÍ PŘÍMKY V ANALYTICKÉ GEOMETRII

Vlasta Moravcová[1]

Úvod

Vyjádření přímky v analytické geometrii v rovině je učivem středních škol (viz VÚP, 2007, s. 25) a je také součástí požadavků k státní maturitě z matematiky (CERMAT, 2013, s. 12). Z vlastních zkušeností, ale i z výsledků státních maturitních zkoušek[2] však víme, že žáci mívají s osvojováním tohoto tématu potíže. Proto jsme zkusili[3] k výuce analytického vyjádření přímky přistoupit trochu jinak, než je v českých školách typické, totiž nezačínat výklad parametrickým vyjádřením přímky.

[1]Článek vznikl za podpory výzkumného programu Karlovy Univerzity Cooperatio.

[2]Například v jarním termínu společné části maturitní zkoušky v roce 2019 měli žáci v úloze č. 26 (CERMAT, 2019) ke třem vyobrazením přímky v kartézské soustavě souřadnic přiřadit vždy správné analytické vyjádření (výběr z pěti možností – tři parametrická vyjádření, jedna obecná rovnice v základním tvaru a jeden směrnicový tvar rovnice přímky). Přímka na prvním obrázku byla rovnoběžná s osou y, na druhém procházela počátkem soustavy souřadnic a měla kladnou směrnici, na třetím neprocházela počátkem soustavy souřadnic a měla zápornou směrnici. První dvě úlohy žáci jakžtakž zvládli (úspěšnost 85 % a 76,6 %), avšak s třetí již, na to, že úloha nebyla nijak obtížná ani časově náročná, měli mnozí problémy – úspěšnost řešení této úlohy byla pouze 62,7 % (data o úspěšnosti čerpána z webu `https://vysledky.cermat.cz/statistika/Default.aspx`).

[3]Tématem jsme se zabývali v rámci řešení projektu OP VVV *Zvýšení kvality vzdělávání žáků, rozvoje klíčových kompetencí, oblastí vzdělávání a gramotností* v letech 2017 až 2019 s cílem odhalit příčiny žákovských potíží a navrhnout metody, jak je eliminovat. Přednáška k tomuto tématu též zazněla na *Letní škole geometrie 2022* (viz `https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/lsg2021`).

Obvyklé a alternativní zavedení přímky

Na základě analýzy českých středoškolských učebnic (např. Kočandrle & Boček, 1995; Vondra, 2016; Polák, 2005) a desítek školních vzdělávacích programů českých škol gymnaziálního typu můžeme říci, že v našich školách je v rámci výuky analytické geometrie v rovině obvykle zaváděno nejprve parametrické vyjádření přímky, následuje obecná rovnice přímky a poté jako její speciální případ směrnicový tvar a popřípadě ještě parametrický tvar rovnice přímky. Tématu přímka v analytické geometrii předchází zavedení pojmu vektor, souřadnice vektoru a operace s vektory včetně skalárního součinu dvou vektorů. Přestože povinným učivem je pouze vyjádření přímky v rovině (VÚP, 2007), na mnoha středních školách, často v rámci matematických seminářů, je vyučováno také vyjádření přímky v prostoru.

Námi navržený níže popsaný přístup byl inspirován osobní zkušeností jedné z členek výzkumného týmu, které nabyla na škole *The Henley College* v Anglii. Zde k výuce matematiky používali učební texty (Thorns, 2007; Thorns & King, 2004). Dále nás motivovala skutečnost, že žáci se již s rovnicí přímky v nějaké podobě na nižším stupni vzdělávání setkali. Na druhém stupni základní školy je vyučována lineární funkce (viz MŠMT, 2021, s. 36), tedy funkce s předpisem $y = kx + q$, kde k a q jsou racionální[4] koeficienty.[5]

Žáci tedy při nástupu na střední školu vlastně znají směrnicový tvar rovnice přímky, je pouze třeba zavést pojem směrnice a upo-

[4]Koeficienty k a q uvažujeme standardně z oboru reálných čísel, s pojmem reálné číslo se však žák základní školy nemusí setkat.

[5]V definici lineární funkce považujeme za didakticky vhodnější uvažovat k různé od nuly, tedy nepohlížet na konstantní funkci jako na speciální případ funkce lineární, neboť pak je definice lineární funkce v souladu s definicí lineární rovnice – za předpokladu, že za lineární rovnici považujeme algebraickou rovnici prvního stupně (viz Kořínek, 1956). Tento přístup nalezneme například v učebnicích (Herman et al., 2006; Herman et al., 2007). Druhou možností je v definici lineární funkce i v definici lineární rovnice připustit, že koeficient u proměnné x je roven nule (viz např. Polák, 2005; Odvárko, 2015). V českých učebnicích se však setkáme také s tím, že přístup k definici lineární funkce a lineární rovnice není v rámci jedné řady učebnic v tomto ohledu jednotný, viz (Cizlerová et al., 2013) vs. (Cizlerová et al., 2014).

zornit na její význam a souvislost s velikostí orientovaného úhlu, který daná přímka svírá s kladnou poloosou x. Na tuto znalost jsme chtěli co nejpřirozeněji navázat, a proto jsme se rozhodli vyzkoušet zavést v analytické geometrii jako první směrnicový tvar rovnice přímky, od něj poté přejít k obecné rovnici přímky, popřípadě k úsekovému tvaru, a až nakonec k parametrickému vyjádření.

V okamžiku, kdy žáci znají směrnicový tvar, může být motivací pro zavedení obecné rovnice přímky fakt, že směrnicovým tvarem nelze popsat každou přímku roviny. Potřebu dalšího, parametrického, vyjádření přímky lze motivovat například požadavkem popsat přímku v prostoru nebo nějak snadno obecně popsat jednotlivé body přímky či spojitou část přímky (úsečku, polopřímku).

Cesta od směrnicového tvaru k obecné rovnici přímky

Zatímco na odvození směrnicového tvaru z obecné rovnice přímky není nic složitého (z obecné rovnice $ax + by + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla a $b \neq 0$, vyjádříme y a přeznačíme koeficienty), opačného postupu by se někdo mohl zaleknout, proto jej zde uvedeme.

Předpokládáme, že jsme s žáky zopakovali a na úlohách procvičili předpis a graf lineární funkce, resp. přímku popsanou směrnicovým tvarem rovnice, tj. $y = kx + q$, kde k, q jsou reálná čísla. V rámci tohoto opakování a prohloubení učiva doporučujeme věnovat čas významu jednotlivých koeficientů k a q, který lze dobře pozorovat za použití vhodného softwaru dynamické geometrie[6]. Při zkoumání významu koeficientů můžeme nechat žáky objevit, že takto nelze zapsat rovnici přímky rovnoběžné s osou y a analogicky k rovnici $y = q$ odvodit rovnici $x = r$ popisující rovnoběžku s osou y protínající osu x v bodě $[r; 0]$. Pomocí počítače (nebo po zakreslení více grafů do čtvercové sítě) též s žáky odhalíme souvislost mezi koeficientem k a velikostí úhlu α, který přímka svírá

[6] Např. GeoGebra, viz aplet Martina Koláře dostupný on-line (`https://www.geogebra.org/m/UZCED987`) aj.

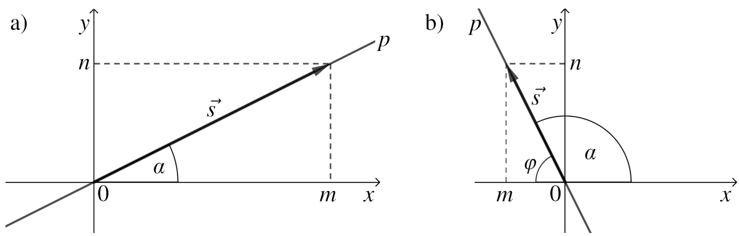
s kladnou poloosou x ($k = \operatorname{tg}\alpha$), a zavedeme pojem směrnice přímky.

Mějme tedy rovnici $y = kx+q$ přímky p. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že přímka p prochází počátkem soustavy souřadnic. Označme α (základní) velikost orientovaného úhlu, který přímka p svírá s kladnou poloosou x, a uvažujme směrový vektor $\vec{s} = (m; n)$ přímky p, kde $m \neq 0$, neboť přímka p je různoběžná s osou y, a n můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat nezáporné. Potom $k = tg\alpha = \frac{n}{m}$, neboť nastane právě jedna z následujících možností:

(a) $\alpha \in \langle 0°; 90°)$, potom $m > 0$ a $n \geq 0$ a vztah $k = \frac{n}{m}$ plyne ihned z pravoúhlého trojúhelníku zvýrazněného na obrázku 1a, resp. z toho, že $\operatorname{tg} 0° = 0$,

(b) $\alpha \in (90°; 180°)$, potom $m < 0$ a $n > 0$ (obr. 1b) a označíme-li φ velikost doplňkového úhlu do přímého úhlu k úhlu α, platí, že

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180° - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi = -\frac{n}{|m|} = -\frac{n}{-m} = \frac{n}{m}.$$



Obr. 1: Odvození hodnoty směrnice přímky

Směrnicový tvar přímky p můžeme tedy pro každou její přípustnou polohu přepsat do podoby

$$y = \frac{n}{m}x + q,$$

kde m, n jsou souřadnice směrového vektoru dané přímky, a následně upravit do podoby

$$nx – my + mq = 0.$$

Přeznačením koeficientů získáme tvar $ax + by + c = 0$, přičemž ze vztahu $(a; b) = (n; -m)$ vidíme, že vektor $(a; b)$ je kolmý ke směrovému vektoru $\vec{s} = (m; n)$.

Uvedený postup lze, s ohledem na schopnosti žáků, samozřejmě předvést nejprve/pouze na konkrétních příkladech.

Teoretická východiska

Zvládnutí základů analytické geometrie v rovině, mezi něž odvození rovnice přímky jistě patří, je nutným předpokladem pro pochopení analytické geometrie v prostoru, diferenciální geometrie a dalších oblastí vyšší matematiky. Na základě vlastních zkušeností i zkušeností kolegů lze konstatovat, že znalosti absolventů středních škol v oblasti analytické geometrie nejsou uspokojivé, což dokládají i výše uvedené úspěšnosti žáků při řešení odpovídajících úloh u maturitních zkoušek. Studenti například nerozumí definici vektoru nebo nechápou význam jednotlivých výrazů v rovnici přímky, chybí jim i základní vizuální představy (Pirklová & Bímová, 2021).

Podle Martona a Säljö (1976) mají žáci dva základní přístupy k učení – hloubkový a povrchový. Zatímco podstatou hloubkového stylu učení je postihnout smysl učiva a porozumět mu, neboli plně pochopit jeho obsah i strukturu, povrchový styl se opírá o paměť a memorování bez větší snahy dobrat se smyslu jednotlivých poznatků. Získané poznatky jsou potom formální a žáci je rychle zapomínají (Mareš, 1998). V matematice je formalismus značně rozšířený (Skatkin, 1951; Květoň, 1986) a projevuje se „v nesprávném zdůrazňování ve vědomí i paměti žáků zvykového vnějšího vyjádření matematického faktu před jeho obsahem, což vede k mechanickému učení se formulkám, důkazům, pravidlům a překáží jejich uvědomělému užívání" (Skatkin, 1951, s. 10). Přesně s těmito potížemi žáků se (nejen) v tématu analytické geometrie opakovaně setkáváme, patrně proto, že žáci (ale i učitelé) při užití metod analytické geometrie inklinují k algoritmickému přístupu[7] k řešení úloh.

[7] Algoritmickým přístupem zde rozumíme nasazení naučeného aparátu, dosazení do vzorce apod., žáky často provedené bezmyšlenkovitě, automaticky

Formalismus je považován za „nejvážnější didaktický problém současného vyučování matematice“ (Hejný & Stehlíková, 1999, s. 28). Jeho odstranění je možné jen správným vyučováním, vliv mohou mít také učebnice a kurikulum (Skatkin, 1951). Podle Hejného a Kuřiny (2001, s. 141) je „vhodnou prevencí formalismu zvýraznění prvků konstruktivního přístupu učitelů matematiky k vyučování.“ Mimo to je „podstatné, zda se v průběhu vzdělávacího procesu v myslích žáků rodí s porozuměním matematika ukotvená na již zažitá matematická témata“ (Hejný & Kuřina, 2001, s. 162).

Zásadu, že „neznámému se učíme jen něčím známým“ nalezneme již ve spisu Komenského (1946, s. 24). Ve výuce je tedy třeba dbát na tzv. spirálové učení nebo též učení ve spirále (Bruner, 1960). Podstatou takového učení je opakovaný návrat k základním představám a zároveň jejich postupné prohlubování, což by mělo žákům pomoci učivo skutečně pochopit (Harden & Stamper, 1999).

V rámci našeho zkoumání jsme se tedy zabývali především tím, zda modifikovaný přístup k výuce analytického vyjádření přímky kladoucí důraz na spirálové učení ve snaze minimalizovat povrchový styl učení žáků bude mít pozitivní dopad na výsledky žáků.

Metodologie a výsledky provedeného experimentu

Výše popsaný postup zavedení analytického vyjádření přímky v rovině jsme vyzkoušeli s žáky Gymnázia Na Pražačce v Praze v roce 2019. Do experimentu byly zapojeny dvě paralelní třídy (celkem cca 60 žáků) předmaturitního ročníku, v němž se dle tamního školního vzdělávacího programu analytická geometrie v rovině vyučuje. Jedna ze tříd byla experimentální – výuka v této třídě probíhala popsaným alternativním přístupem – druhá třída sloužila jako kontrolní – výuka jednotlivých způsobů vyjádření přímky zde probíhala v obvyklém pořadí (viz výše).

---

a bez řádného vhledu do situace. Správné užití algoritmů v matematice však není špatnou metodou, protože slouží k rozvoji logického i tvůrčího myšlení žáků skrze objevování algoritmů nových (Květoň, 1986).

V obou třídách byl v rámci výuky analytické geometrie nejprve zaveden pojem vektor a byly vysvětleny operace s vektory, na což navazoval stejný vstupní srovnávací test. Mezi úspěšnostmi žáků obou tříd nebyly statisticky významné rozdíly, bylo však patrné, že žáci experimentální třídy se častěji dopouštějí numerických chyb a preferují naučený algoritmický postup i v situacích, kdy je zdlouhavější a úlohu lze řešit efektivněji postupem jiným.

Poté se započalo s výukou jednotlivých typů vyjádření přímky, avšak v každé třídě v jiném pořadí. Žáci byli průběžně testováni z aktuálně probíraného typu vyjádření přímky, tyto testy byly pro každou třídu specifické a nijak jsme je napříč třídami neporovnávali; jejich účelem bylo formativní hodnocení žáků a získání průběžné zpětné vazby pro učitele.

Na závěr, po probrání všech typů vyjádření přímky, byl v obou třídách zadán shodný souhrnný test obsahující úlohy s parametrickým vyjádřením, obecnou rovnicí i směrnicovým tvarem v rovnoměrném zastoupení. Stručný popis jednotlivých testových úloh a úspěšnost žáků (vyjádřenou v procentech a zaokrouhlenou na jednotky) shrnuje tabulka 1.

Tab. 1: Úspěšnost žáků experimentální a kontrolní třídy v závěrečném testu

Číslo úlohy	Popis úlohy	Úspěšnost žáků experimentální třídy	Úspěšnost žáků kontrolní třídy	Rozdíl úspěšností žáků obou tříd
1a	Určit, zda jsou přímky zadané obecnou rovnicí kolmé, či nikoliv.	92	83	9
1b	Určit, zda jsou přímky zadané obecnou rovnicí rovnoběžné (různé), či nikoliv.	84	90	−6
1c	Určit, zda jsou přímky zadané obecnou rovnicí totožné, či nikoliv.	100	62	38

2a	Zapsat směrnicový tvar rovnice přímky zakreslené v kartézské soustavě souřadnic.	59	69	−10
2b	Zapsat parametrické vyjádření přímky zakreslené v kartézské soustavě souřadnic.	82	64	18
2c	Zapsat parametrické vyjádření úsečky zakreslené v kartézské soustavě souřadnic.	56	66	−10
2d	Zapsat parametrické vyjádření polopřímky zakreslené v kartézské soustavě souřadnic.	54	59	−5
3	Zapsat parametrické vyjádření a obecnou rovnici přímky, na níž leží úhlopříčka BD čtverce $ABCD$, jsou-li dány souřadnice bodů A, C.	68	63	5
4a	Vypočítat výšku v_c trojúhelníku ABC, jsou-li dány souřadnice jeho vrcholů.	68	48	20
4b	Vypočítat obsah trojúhelníku ABC z úlohy 4a.	54	52	2
5	Určit vzájemnou polohu přímek zadaných parametrickým vyjádřením, v případě rovnoběžek rozlišit různé × totožné, v případě různoběžek určit odchylku a průsečík.	75	71	4
Celková úspěšnost		72	66	6

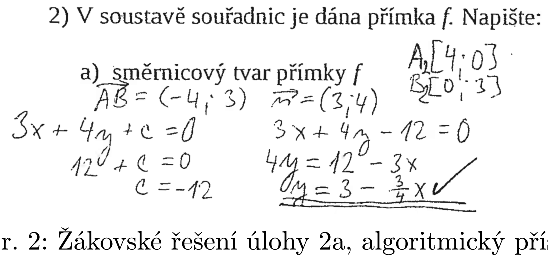
V tabulce 1 vidíme, že celkový rozdíl ve výkonech žáků experimentální a kontrolní třídy ani v závěrečném testu není statisticky významný. Větší rozdíl (více než 10 procentních bodů) se objevil u tří úloh (1c, 2b, 4a) a to vždy ve prospěch experimentální třídy. Příčina potíží v úloze 1c není z testů patrná, neboť úloha se dala řešit zpaměti a mnozí odpovídali jen ano/ne. Neúspěšní žáci kontrolní třídy v úloze 2b buď úlohu vynechali, nebo chybovali fatálně – např. zapsali obecnou rovnici namísto parametrického vyjádření nebo si sice předepsali rovnice parametrického vyjádření, ale dosadili nesmyslné hodnoty. Úlohu 4a mnoho žáků opět vynechalo, popřípadě se dopustili numerických chyb.

Diskuse a doporučení

Na první pohled může působit zvláštně, že žáci experimentální třídy byli v úloze 1c úspěšnější než v úloze 1b, přestože úloha 1c v sobě problém úlohy 1b zahrnuje (totožnost přímek je speciálním případem jejich rovnoběžnosti). Tato skutečnost mohla být způsobena tím, že v úloze 1b bylo třeba vyhodnotit lineární závislost dvou vektorů, které ale nebyly explicitně zadány. Žáci museli tyto vektory vyčíst ze zadání a již při tom mohli udělat chybu (přehlédnout se, neopsat správně znaménko apod.). Dané přímky navíc nebyly rovnoběžné. Řešení úlohy 1c bylo možná snazší v tom, že dané přímky byly totožné a jednu z daných rovnic stačilo vynásobit (-1), abychom získali rovnici druhé přímky. Nebylo tedy třeba znát význam jednotlivých koeficientů a správné řešení bylo ihned vidět.

Chyby žáků z kontrolní třídy v úloze 2b nás vedou k domněnce, že by jejich příčinou mohlo být pořadí, v němž bylo učivo probíráno. V kontrolní třídě bylo parametrické vyjádření přímky prvním probíraným typem rovnice přímky a v posledních hodinách byla pozornost zaměřena spíše na směrnicový tvar. Je tedy možné, že někteří žáci parametrické vyjádření pozapomněli. Nesmyslné dosazování nesouvisejících hodnot svědčí o tom, že parametrickému vyjádření přímky plně neporozuměli a pouze se jej naučili formálně (Květoň, 1986; Mareš, 1998; Skatkin, 1951). Takový poznatek pak ale udrželi v paměti jen krátkodobě a v závěrečném testu selhali.

Obdobně si s úlohou 2a, v níž měla být rovnice přímky zapsána ve směrnicovém tvaru, hůře poradili žáci experimentální třídy (byť rozdíl úspěšností žáků jednotlivých tříd není tak markantní, viz tab. 1). V experimentální třídě byl směrnicový tvar probírán jako první. Je zajímavé, že přestože mu byla věnována větší pozornost než ve třídě kontrolní, všichni žáci experimentální třídy řešili úlohu algoritmicky (Květoň, 1986) – zapsali souřadnice dvou bodů přímky dle obrázku, vypočítali směrový a následně normálový vektor, dosadili zjištěné údaje do obecné rovnice, dopočítali absolutní člen a nakonec obecnou rovnici upravili do směrnicového tvaru (obr. 2). Úloha se však dala řešit téměř zpaměti, vhledem, neboť z obrázku byly patrné souřadnice průsečíků dané přímky se souřadnicovými osami. Tento efektivnější postup (obr. 3) však použili pouze někteří žáci kontrolní třídy, patrně proto, že jej procvičovali jen několik dní před závěrečným testem. Také tento jev odpovídá našemu pozorování u vstupního srovnávacího testu, v němž žáci experimentální třídy preferovali algoritmické postupy.


2) V soustavě souřadnic je dána přímka *f*. Napište:

a) směrnicový tvar přímky *f*

$A[4; 0]$ $B[0; 3]$

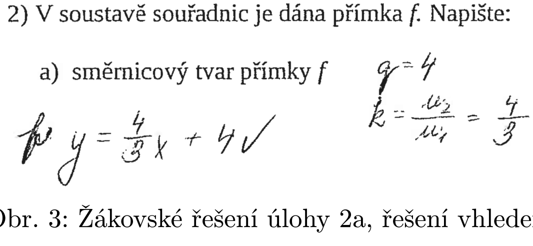
$\overrightarrow{AB} = (-4; 3)$ $\vec{n} = (3; 4)$

$3x + 4y + c = 0$ $3x + 4y - 12 = 0$

$12 + c = 0$ $4y = 12 - 3x$

$c = -12$ $y = 3 - \frac{3}{4}x$ ✓

Obr. 2: Žákovské řešení úlohy 2a, algoritmický přístup


2) V soustavě souřadnic je dána přímka *f*. Napište:

a) směrnicový tvar přímky *f*

$q = 4$

$k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{3}$

p $y = \frac{4}{3}x + 4$ ✓

Obr. 3: Žákovské řešení úlohy 2a, řešení vhledem

Problémem úlohy 4a může být její komplexnost. Nestačí jen nasadit naučený algoritmus, je třeba nejprve přijít na to, jak pomocí aparátu, který máme k dispozici, požadovanou výšku určit. K vyřešení úlohy pak vede delší cesta, během níž existuje více příležitostí vytvořit numerickou chybu. Obdobné problémy s touto úlohou měli i někteří žáci experimentální třídy, jen patrně shodou okolností v menší míře. Postup výpočtu, pokud už se do řešení úlohy pustili, volili všichni stejný – nalezení obecné rovnice přímky AB a výpočet vzdálenosti bodu C od této přímky dosazením do vztahu pro vzdálenost bodu od přímky. Úspěšnost žáků experimentální třídy v úloze 4b je mírně vyšší než v úloze 4a, přestože výsledek úlohy 4a byl k výpočtu úlohy 4b potřeba. To je způsobeno zohledněním správného postupu (s nesprávnými hodnotami) při opravování testů.

Celková úspěšnost žáků experimentální třídy v závěrečném testu je mírně vyšší (72 %) než celková úspěšnost žáků ve třídě kontrolní (66 %), rozdíl však není statisticky významný. Jsme si vědomi, že provedený experiment má z hlediska didaktického výzkumu několik nedostatků a nelze z něj vyvozovat obecné závěry. Především byl zkoumaný vzorek malý a nebylo možné zajistit, aby v obou paralelních třídách vyučoval stejný pedagog. Zdržíme se proto nadšených prohlášení o pozitivním přínosu inovativního přístupu. Můžeme však na základě zjištěných výsledků říci, že neobvyklé pořadí v zavedení jednotlivých typů vyjádření přímky nemělo na výsledky žáků experimentální třídy negativní vliv. Navíc se (v obou třídách) projevilo, že žáci dříve probrané učivo zapomínají. Na tento problém, který patří k projevům povrchového stylu učení (Mareš, 1998), upozorňují učitelé často (Harden & Stamper, 1999).

Též je z žákovských chyb patrné, že si žáci učivo pamatují pouze mechanicky, bez jasného porozumění, což patří k projevům formalismu (Skatkin, 1951). Při výuce je proto třeba dbát na časté opakování s postupným prohlubováním znalostí. S porozuměním probírané látce může pomoci i uvážené užití počítačového softwaru. S tvrzením, že „použití programů dynamické geometrie přispívá k porozumění žáků geometrii“ souhlasí či spíše souhlasí více než polovina z 245 dotázaných pedagogů matematiky na druhém stupni základní školy (Vondrová et al., 2015, s. 11) a pozitivní vliv užití GeoGebry přímo ve výuce analytické geometrie na střední škole prokázali také například Khalil et al. (2018). K lepšímu porozumění by mohla přispět také propracovanější propedeutika analytické geometrie na základní škole a v nižších ročnících střední školy, k níž patří zejména učivo o funkcích, ale také obecně práce se souřadnicemi či úlohy v čtvercové síti (Kuřina & Vondrová, 2022; Moravcová & Kaňková, 2018).

K zamyšlení je poznámka Kuřiny a Vondrové (2022, s. 245), že „snad všechny naše učebnice analytické geometrie trpí (. . .) tím, že téměř všechny úlohy jsou spjaté spíše s jazykem než s geometrickým obsahem v pravém slova smyslu.“ Skutečně se zdá, že, snad vlivem nedostatečné hodinové dotace, výuka analytické geometrie ve školách sklouzává k mechanickým výpočtům. Přitom se právě při výuce tohoto tématu nabízí využívat náčrtky, objevovat a ověřovat různé postupy a řešit účinnými metodami analytické geometrie složitější geometrické problémy. Vždyť je to právě analytická geometrie, kde mají žáci ve školské matematice poprvé šanci propojit syntetickou geometrii a algebru.

Závěr

Nastínili jsme alternativní přístup k zavedení analytického vyjádření přímky ve školské matematice a ověřili jej přímo ve výuce. Naše zjištění nehovoří jednoznačně ani ve prospěch obvyklého pořadí (parametrické vyjádření – obecná rovnice – směrnicový tvar), ani ve prospěch alternativního pojetí (směrnicový tvar – obecná rovnice – parametrické vyjádření). Potvrdila se však naše očekávání týkající se formálnosti žákovských poznatků. Alternativní přístup dle našeho názoru lépe naplňuje spirálovost kurikula. Inspiraci můžeme hledat také v historii; v učebnicích analytické geometrie vydaných v 19. století a v první polovině 20. století se výklad přímky též opíral o směrnicový tvar a důraz byl kladen na souvislost analytické geometrie s grafy funkcí (Lávička, 1999), patrně proto, že se v té době ještě nepracovalo s vektory (Nádeník, 2011). Příspěvek zakončíme jednou optimistickou citací s přáním, aby tomu tak skutečně bylo:

> Analytická geometrie sehrává ve školské matematice stejně důležitou úlohu, jakou sehrál její objev v sedmnáctém století – žáci vidí, že existuje úzká spojitost mezi tolik odlišnými disciplínami, jako je geometrie a aritmetika. V řadě případů bývá právě v tomto období odstraněna nechuť „počtářů“ k rýsování a naopak těch, co raději rýsují, k počítání. (Lávička, 1999, s. 4)

Poděkování

Speciální poděkování patří především kolegyním, které se na tomto výzkumu podílely, tj. Tereze Legové, Štěpánce Kaňkové a Lence Pejčochové, a dále také vedení Gymnázia Na Pražačce, Praha 3, za umožnění experiment zrealizovat.

Literatura

[1] Bruner, J. S. (1960). *The proces of education.* Harvard University Press.

[2] Cizlerová, M., Krupka, P., Polický, Z., & Škaroupková, B. (2013). *Matematika pro střední školy – 2. díl: Výrazy, rovnice a nerovnice – Učebnice.* Didaktis.

[3] Cizlerová, M., Zahradníček, M., & Zahradníčková, A. (2014). *Matematika pro střední školy – 4. díl: Funkce I – Učebnice.* Didaktis.

[4] CERMAT. (2013). *Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od školního roku 2014/2015. Matematika.* MŠMT, CERMAT. `https://www.msmt.cz/file/33575_1_1/`

[5] CERMAT. (2019). *Zadání didaktického testu z matematiky.* Maturitní zkouška, jaro 2019. CERMAT. `https://maturita.cermat.cz/files/files/testy-zadani-klice/MA_jaro_2019_DT.pdf`

[6] Harden, R. M., & Stamper, N. (1999). What is a spiral curriculum? *Medical Teacher, 21*(2), 141–143. https://doi.org/10.1080/01421599979752

[7] Hejný, M., & Kuřina, F. (2001). *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování.* Portál.

[8] Hejný, M., & Stehlíková, N. (1999). *Číselné představy dětí.* PedF UK.

[9] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2006). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií. Funkce.* Prometheus.

[10] Herman, J., Chrápavá, V., Jančovičová, E., & Šimša, J. (2007). *Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií. Rovnice a nerovnice.* Prometheus.

[11] Khalil, M., Farooq, R. A., Çakıroğlu, E., Khalil, U., & Khan, D. M. (2018). The development of mathematical achievement in analytic geometry of grade-12 students through GeoGebra activities. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(4), 1 453–1 463. https://doi.org/10.29333/ejmste/83681

[12] Kočandrle, M., & Boček, L. (2001). *Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie.* Prometheus.

[13] Komenský, J. A. (1946). *Didaktika analytická.* Jaroslav Samec.

[14] Kořínek, V. (1956). *Základy algebry.* Nakladatelství Československé akademie věd.

[15] Kuřina, F., & Vondrová, N. (2022). *15 pohledů na školskou matematiku. Jak to vidíme.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[16] Květoň, P. (1986). *Kapitoly z didaktiky matematiky II.* Pedagogická fakulta v Ostravě.

[17] Lávička, M. (1999). *Analytická geometrie na českých středních školách po roce 1846.* Pedagogické centrum Plzeň.

[18] Mareš, J. (1998). *Styly učení žáků a studentů.* Portál.

[19] Marton, F., & Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning – I. Outcome and proces. *British Journal og Educational Psychology, 46*(1), 4–11. https://doi.org/10.1111/j.2044-8279.1976.tb02980.x

[20] Moravcová, V., & Kaňková, Š. (2018). Propedeutika analytické geometrie v rovině. *Gramotnost, pregramotnost a vzdělávání, 2*(2), 45–68. https://pages.pedf.cuni.cz/gramotnost/files/2019/01/03_Moravcova.pdf

[21] MŠMT. (2021). *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* MŠMT. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcovy-vzdelavacici-program-pro-zakladni-vzdelavani-rvp-zv/

[22] Nádeník, Z. (2011). *Moji učitelé geometrie.* Matfyzpress. https://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/402166

[23] Odvárko, O. (2015). *Matematika pro střední školy. Rovnice a nerovnice.* Prometheus.

[24] Pirklová, P., & Bímová, D. (2021). Repetition of analytic geometry in the plane for students of mechanical engineering. In P. Vesela, N. Popivanov & G. Venkov (Eds.), *AIP Conference Proceedings 2333*, (pp. 050002-1–050002-7). AIP Publishing. https://doi.org/10.1063/5.0042817

[25] Polák, J. (2005). *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus.

[26] Skatkin, M. N. (1951). *Formalismus ve vědomostech žáků a jeho překonávání.* Dědictví Komenského.

[27] Thorns, P. (2007). *C1 revision workbook AS/A level mathematics.* Alpha workbooks.

[28] Thorns, P., & King, J. (2004). *Preparation for AS/A level mathematics workbook.* Alpha workbooks.

[29] Vondra, J. (2016). *Matematika pro střední školy – 7. díl: Analytická geometrie v rovině – Učebnice.* Didaktis.

[30] Vondrová, N., Havlíčková, R., Rendl, M., & Žalská, J. (2015). *Kritická místa matematiky základní školy: Metodický materiál pro učitele.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[31] VÚP. (2007). *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia.* Výzkumný ústav pedagogický v Praze. https://www.edu.cz/rvp-ramcove-vzdelavaci-programy/ramcove-vzdelavaci-programy-pro-gymnazia-rvp-g/

Abstract

The paper presents an alternative approach to introducing the analytical expression of a straight line in a plane in school mathematics, i.e., in the order linear form – general equation – parametric expression, and its verification in practice. It turned out that this approach does not have a negative impact on the understanding of the topic, and its contribution could be better continuity with the student's previous knowledge.

Vlasta Moravcová
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova
Sokolovská 49/83
186 75 Praha 8
e-mail: Vlasta.Moravcova@mff.cuni.cz