Učitel matematiky

Vlastimil Dlab; Dalibor Martišek
Jedinákova posloupnost

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 4, 225–231

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152016

JEDINÁKOVA POSLOUPNOST

Vlastimil Dlab, Dalibor Martišek

Slovenský učitel a propagátor elementární matematiky Dušan Jedinák ve svém internetovém Bublifuku PaM (dj) (Jedinák, 2020) správně poukázal na stránce 5 na to, že „postupnosť nie je jednoznačne určená svojimi prvými členmi."

Autor článku (Kuřina, 2021), nepřesně cituje tuto úlohu takto:

„Určete devátý člen Jedinákovy posloupnosti

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2020, \ldots \text{“},$$

přiznává, že ji nevyřešil, a uvádí Jedinákův vzorec

$$a_n = n+2012\cdot\frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7)}{7!}, \quad (\star)$$

což prohlašuje za „doklad matematické tvořivosti v oblasti elementární matematiky".

S tímto textem nelze souhlasit, a to hned z několika důvodů.

1. Autor článku (Kuřina, 2021) podsouvá Jedinákovi úlohu, kterou Jedinák neuvedl.
2. Vzorec ($\star$) není řešením úlohy uvedené v (Kuřina, 2021), ale původní úlohy Jedinákovy.
3. Hledání vzorečků pro n-tý člen posloupnosti je „dokladem matematické tvořivosti" možná pro středoškolského studenta, nikoliv však pro jeho učitele.

Abychom předešli omylu, citujme předmětnou Jedinákovu poznámku z jeho Bublifuku:

ZAUJÍMAVÝ ROK 2020 (CORONA)

Doplňte d'alší člen postupnosti a zdôvodnite to:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ?

Doplňam **2020** *... ?! ... zdá sa vám to podivné? Myslel som postupnost' $\{a_n\}$ zadanú*

$$a_n = n + 2012 \cdot \frac{(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)\cdot(n-7)}{7!}$$

pre $n \in \mathbb{N}$.

Prvých sedem členov tejto postupnosti si určite vyčíslite sami. Ôsmy člen mnou myslenej postupnosti je $\mathbf{a_8} = \mathbf{2020}$. *Vyhovuje to. V roku pandémie koronavíru 2020 je predsa celkom dobre pochopitel'né ...*

Čo ste mysleli vy?

Viete predsa, že postupnost' nie je jednoznačne určená svojmi prvými členmi.

Jistě, Dušan Jedinák má pravdu. Každý učitel matematiky by měl vědět, že posloupnost není obecně určena konečným počtem svých členů. A nejen to. Posloupností, které se shodují pouze v konečném počtu svých členů, je vždy nekonečně mnoho.

Můžeme například spočítat, že devátý člen Jedinákovy posloupnosti je určen vzorcem (pro n-tý člen)

$$a_n = n + \binom{n-1}{k}\left[a - (k+1)\right], \quad \text{kde } a = 2020, k = 7.$$

Je důležité znovu připomenout, že je nekonečně mnoho posloupností, a proto i nekonečně mnoho vzorců pro posloupnost a_n, jejichž prvních osm členů je

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 2020.$$

Lze se například přesvědčit, že n-tý člen a_n posloupnosti, v níž prvních osm členů je (pro libovolná čísla a, b)

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b,$$

je možno vyjádřit vzorcem

$$a_n = n + \frac{1}{8}\binom{n-1}{7}\Big[n(b-8a+55)+72a-8b-504\Big].$$

Ze vzorce pro a_n ihned vidíme, že se jedná o posloupnost hodnot polynomů $P(n)$ v celočíselných hodnotách $n = 1, 2, 3, \dots :$ $a_n = P(n)$. V předchozím příkladě se jedná o polynom (v proměnné n), jehož nejvyšší člen je

$$\frac{b-8a+55}{8!}n^8 + \cdots$$

Je tedy nejvýše stupně osm. Pro jisté volby osmého a devátého členu je stupně nižšího (jako např. $a = 7, b = 1$, kdy $P(n) = n - \binom{n-1}{7}$). Jedinákova volba $a = 2020$ rozšířená volbou $b = 0$ vede ke vzorci (polynomu), jehož hodnota v n je

$$P(n) = a_n = n + \frac{1}{8}\binom{n-1}{7}(144\,936 - 16\,105n).$$

Je tedy možno uvažovat o stupních těchto polynomů, což přináší možnost uvažovat o jednoznačnosti jistých vyjádření. O tom všem podrobněji v článku Hrátky (2022) nebo v knize Dlaba a Bečváře (2022). Stručné vysvětlení podává též poznámka (Dlab, 2013).

Náš následující příklad naznačuje, jaké je pozadí příslušných vzorců.

Posloupnost, jejíž n-tý člen a_n je

$$a_n = n - 2\binom{n-1}{7} + 12\binom{n-1}{8} - 42\binom{n-1}{9} + \\ + 112\binom{n-1}{10} - 252\binom{n-1}{11} + 504\binom{n-1}{12},$$

má prvních 13 členů

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, \dots$$

Kombinační čísla tedy hrají v této problematice zcela zásadní úlohu. To vše je vysvětleno v článku Hrátky (2022). Každý polynom

$$a_n = P(n) = \sum_{t=0}^{k} c_t n^t$$

je tam vyjádřen ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{k} d_t \binom{n-1}{t} \quad \text{nebo} \quad \sum_{t=0}^{k} e_t \binom{n}{t}.$$

Přesvědčete se, že pro $k = 4$ taková vyjáření jsou

$$\begin{aligned} a_n = {}& (c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\binom{n-1}{0} + \\ & + (c_1 + 3c_2 + 7c_3 + 15c_4)\binom{n-1}{1} + \\ & + (2c_2 + 12c_3 + 50c_4)\binom{n-1}{2} + (6c_3 + 60c_4)\binom{n-1}{3} + \\ & + 24c_4\binom{n-1}{4} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} a_n = {}& c_0\binom{n}{0} + (c_1 + c_2 + c_3 + c_4)\binom{n}{1} + \\ & + (2c_2 + 6c_3 + 14c_4)\binom{n}{2} + (6c_3 + 36c_4)\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4}. \end{aligned}$$

Problém, na který upozornil Jedinák (2020), tj. volbu dalšího členu dané konečné posloupnosti a určení jednoduchého předpisu (vzorce), je možno řešit elementárně. Předveďme takové řešení na jednoduchém příkladu.

Úloha. *Doplňte další člen posloupnosti*

$$1, -1, 1, -1, \ldots$$

a nalezněte tvar obecného členu a_n, který volbě a_5 vyhovuje.

Zvolme $a_5 = a$ a hledejme a_n ve tvaru

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + c_3 n^3 + c_4 n^4.$$

Potom dostaneme pro koeficienty $c_k, 0 \leq k \leq 4$ systém pěti lineárních rovnic o pěti neznámých:

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 \; + c_2 \; + c_3 \; + c_4 \; &= 1 \\
c_0 + 2c_1 + 4c^2 \; + 8c_3 \; + 16c_4 \; &= -1 \\
c_0 + 3c_1 + 9c_2 \; + 27c_3 \; + 81c_4 \; &= 1 \\
c_0 + 4c_1 + 16c_2 + 64c_3 \; + 256c_4 &= -1 \\
c_0 + 5c_1 + 25c_2 + 125c_3 + 625c_4 &= a
\end{aligned}$$

Standardním postupem převedeme příslušnou matici soustavy

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -1 \\
1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 1 \\
1 & 4 & 16 & 64 & 256 & -1 \\
1 & 5 & 25 & 125 & 625 & a
\end{array}\right)$$

na matici trojúhelníkovou

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 3 & 7 & 15 & -2 \\
0 & 0 & 2 & 12 & 50 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 6 & 60 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 24 & a+15
\end{array}\right)$$

a dostáváme řešení

$$c_4 = \frac{a+15}{24}, \quad c_3 = \frac{-10a-182}{24}, \quad c_2 = \frac{35a+765}{24},$$

$$c_1 = \frac{-50a-1294}{24} \;\text{ a }\; c_0 = \frac{24a+720}{24} = a+30.$$

Vážným nedostatkem tohoto způsobu řešení je to, že neodhaluje podstatu, a tedy ani hlubší porozumění problému. Podrobnější informace najde čtenář opět v článku Hrátky (2022).

Závěrem shrňme poučení, které tento příspěvek přináší. Jedinák (2020) správně poukazuje na to, že každá konečná posloupnost čísel

$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$

může být prodloužena přidáním libovolně zvoleného čísla a_{k+1} tak, že existuje polynom P stupně $d \le k$ a $a_t = P(t)$ pro všechna $t = 1, 2, \ldots, k+1$.

Tato rozšířená posloupnost se tak stává aritmetickou posloupností řádu $d \le k$. Tvrzení ilustrujme příkladem, kde $k = 7, a_t = t$ pro $1 \le t \le k, a_{k+1} = 2020$ a stupeň příslušného polynomu P, pro který $P(t) = t$ pro $1 \le t \le 7$ a $P(8) = 2020$. Jedná se tedy o aritmetickou posloupnost řádu 7:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 2020,\ 16105,\ 72442,\ 241451,\ 663972,\ 1593517,\ 3452606,\ \ldots$$

Dodejme, že pro libovolné k a $a_{k+1} = Z$ pro tuto posloupnost platí

$$a_n = P(n) = n + (Z - k - 1)\binom{n-1}{k}.$$

Aritmetické posloupnosti vyšších řádů bývaly kdysi středoškolským učivem (Studnička, 1877). Zájemce o dostupnější informace o posloupnostech vyšších řádů lze odkázat na zdroj (Dlab, 2011).

Literatura

[1] Dlab, V., & Bečvář, J. (2022). *Od aritmetiky k abstraktní algebře*, 2. vydání, ČVUT Praha.

[2] Dlab, V. (2011). Arithmetic progressions of higher order, *Teaching Math. and Comp. Science, Vol. 2011*(9), 225–239. V české verzi `https://kdm.karlin.mff.cuni.cz//literatura/aritm-posl.pdf`

[3] Dlab, V. (2013). Aritmetické a geometrické posloupnosti, mnohočleny. In *Ani jeden matematický talent nazmar, Hradec Králové 2013* (s. 36–44). Hradec Králové.

[4] Hrátky (2022). Hrátky s posloupnostmi celých čísel, *Rozhledy matematicko-fyzikální, 97*(4), 32–35.

[5] Jedinák, D. (2020). *Bublifuk PaM (dj)*, `http:www.era.topindex.sk/files/s765.pdf`.

[6] Kuřina, F. (2021). Jedinákova posloupnost, *Učitel matematiky, 29*(4), 95–98.

[7] Studnička, F. J. (1877). *Algebra pro vyšší třídy středních škol* (2. vydání). Dr. Eduard Grégr a syn.

Abstract

The note corrects deficiencies that have appeared in the literature regarding a certain integer sequence.

Vlastimil Dlab
Bzí u Železného Brodu
e-mail: vlastimil73@hotmail.com

Dalibor Martišek
Šlapanice
e-mail: martisek@fme.vutbr.cz