Vlasta Moravcová; Zuzana Skálová

Manhattanská a maximová metrika v úlohách školské geometrie

Učitel matematiky, Vol. 31 (2023), No. 4, 251–265

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152019

MANHATTANSKÁ A MAXIMOVÁ METRIKA V ÚLOHÁCH ŠKOLSKÉ GEOMETRIE

Vlasta Moravcová, Zuzana Skálová

Úvod

Ve školské matematice pracujeme s eukleidovským metrickým prostorem, tj. vzdálenosti měříme přímou čarou, a to zpravidla naprosto intuitivně. V praxi je však často, například při přepravě z místa na místo, nutné uvažovat jinak. Žáci se ale s jinými metrickými prostory setkají až na vysoké škole, pokud vůbec. Tato skutečnost nás přivedla k myšlence vytvořit úlohy, v nichž se mohou žáci s principem „jiného“ měření vzdáleností seznámit již na základní, popřípadě střední škole. Konkrétně se v příspěvku věnujeme dvěma neeukleidovským metrikám – metrice manhattanské a metrice maximové.

Metrický prostor a metrika

Nejprve připomeňme pojmy metrický prostor a metrika. Následující definice vychází z publikace (Veselý, 2009, s. 338).

Mějme množinu $P \neq \emptyset$ a funkci $\varrho \colon P \times P \to \mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

1) $\varrho(a;b) \geq 0$ pro všechna $a, b \in P$,
2) $\varrho(a;b) = 0$, právě když $a = b$,
3) $\varrho(a;b) = \varrho(b;a)$ pro všechna $a, b \in P$,
4) $\varrho(a;b) \leq \varrho(a;c) + \varrho(c;b)$ pro všechna $a, b, c \in P$.

Pak říkáme, že ϱ je *metrika* na množině P, číslo $\varrho(a,b)$ je vzdálenost prvků $a, b \in P$ a uspořádanou dvojici (P, ϱ) nazýváme *metrickým prostorem.*

V geometrii jako množinu P zpravidla uvažujeme prostor, popřípadě rovinu, přičemž prvky množiny P jsou body tohoto prostoru, resp. roviny, a značíme je velkými písmeny. První a druhý bod definice říkají, že vzdálenost dvou bodů je nezáporná, resp. v případě totožných bodů nulová. Třetí bod můžeme prezentovat tak, že úsečka AB má stejnou délku jako úsečka BA. Poslední bod definice známe pod pojmem *trojúhelníková nerovnost*. V dalším textu budeme pro zjednodušení předpokládat, že množinou P je rovina a že v této rovině máme zvolenou kartézskou soustavu souřadnic O_{xy}.

Ve školské matematice pracujeme od prvního stupně intuitivně v eukleidovském metrickém prostoru. Pro eukleidovskou metriku ϱ_e, tedy vzdálenost dvou bodů $A[x_A; y_A]$, $B[x_B; y_B]$ „vzdušnou čarou" v rovině, platí:

$$\varrho_e = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

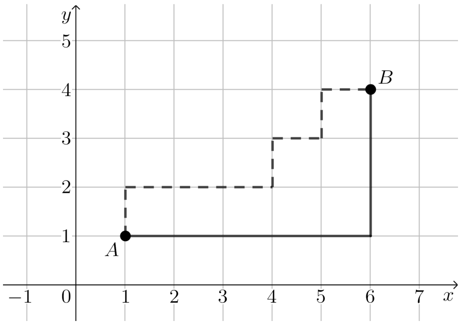
Funkce ϱ_e však není jedinou metrikou splňující požadavky výše uvedené definice. Vzdálenost dvou bodů $A[x_A; y_A]$, $B[x_B; y_B]$ v rovině můžeme vyjádřit také jinými vztahy, například:

$$\varrho_m = |x_A - x_B| + |y_A - y_B|$$

nebo

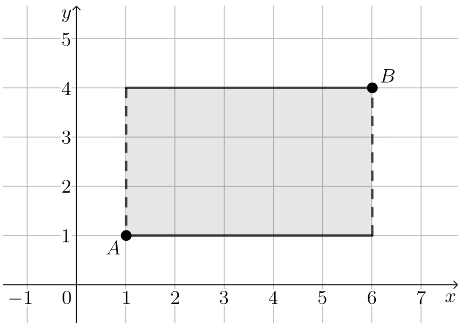
$$\varrho_\infty = \max\{|x_A - x_B|;\ |y_A - y_B|\}.$$

Metriku ϱ_m nazýváme *manhattanskou* nebo též *taxikářskou metrikou*, neboť vzdálenost bodů je součtem délek vodorovné a svislé úsečky, které reprezentují jednu z možných nejkratších tras (v obrázku 1 znázorněna plnou čarou) mezi dvěma body ve městě s pravoúhlým systémem ulic (analogie k pohybu po ulicích newyorské čtvrti Manhattan). Nejkratších tras mezi danými body A, B při použití manhattanské metriky existuje více (další z nich je znázorněna v obrázku 1 čárkovanou čarou).



Obr. 1: Vzdálenost dvou bodů v rovině za užití manhattanské metriky

Metriku ϱ_∞ nazýváme *maximovou*. Vzdálenost bodů A, B je pomocí ní definována jako maximum z rozdílů odpovídajících si souřadnic bodů A, B, tedy jako velikost delší ze stran obdélníku[1], jehož dva vrcholy jsou body A, B a zároveň jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami (obr. 2).



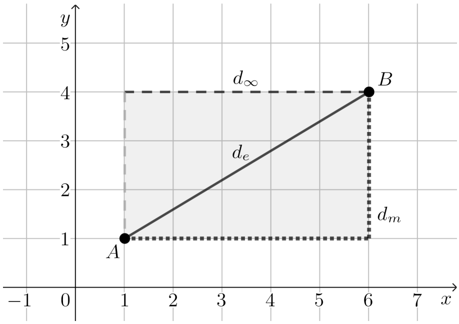
Obr. 2: Vzdálenost dvou bodů v rovině za užití maximové metriky

Poznamenejme, že jsou-li dané body krajními body úsečky rovnoběžné s osou souřadnic, pak vzdálenost vyjádřená užitím manhattanské i maximové metriky odpovídá vzdálenosti vypočtené metrikou eukleidovskou. V obrázku 3 nahlédneme, že pro vzdá-

[1]Pokud je poloha bodů A, B taková, že vznikne čtverec, je $|AB|$ rovna délce strany tohoto čtverce.

lenost bodů popsanou pomocí eukleidovské (d_e), manhattanské (d_m) a maximové (d_∞) metriky platí:

$$d_\infty \leq d_e \leq d_m.$$



Obr. 3: Porovnání vzdáleností dvou bodů v rovině

Diplomová práce (Skálová, 2022) jedné z autorek tohoto příspěvku je věnována množinám (všech) bodů dané vlastnosti v manhattanském a maximovém metrickém prostoru, tj. v prostorech (P, ϱ_m) a (P, ϱ_∞), kde množinou P je rovina. Připomeňme, že *množinou M bodů dané vlastnosti* rozumíme množinu bodů, které splňují následující podmínky:

- každý bod z množiny M má danou vlastnost,
- každý bod roviny, který má danou vlastnost, patří do množiny M.

Množiny bodů v manhattanském a maximovém metrickém prostoru

Zkoumáme-li standardní množiny bodů dané vlastnosti s využitím výše popsaných neeukleidovských metrik, získáme jiné tvary, než na jaké jsme zvyklí v eukleidovském metrickém prostoru. Různé tvary množin a rozdíly mezi nimi v závislosti na použité metrice ukážeme na příkladu kružnice.

Kružnicí rozumíme množinu všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S vzdálenost r. Bod S nazýváme středem kružnice, vzdálenost r nazýváme poloměrem kružnice a předpokládáme, že r je kladné reálné číslo.

Ve všech využívaných metrických prostorech můžeme při odvození tvaru kružnice vycházet z jednoduché rovnice, která plyne z její definice. Hledáme všechny body $X[x;y]$ roviny, pro které platí:

$$|SX| = r.$$

Bez újmy na obecnosti umístíme střed S kružnice do počátku soustavy souřadnic. V eukleidovském metrickém prostoru potom získáme známou rovnici

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

jíž vyhovují body tvořící křivku k^e odpovídající standardní, od dětství budované představě (obr. 4a).

Použijeme-li pro vyjádření vzdálenosti bodu X od bodu S manhattanskou metriku ϱ_m, získáme rovnici

$$|x| + |y| = r,$$

z níž je patrné, že množina k^m se skládá z částí grafů lineárních funkcí se směrnicemi ± 1:

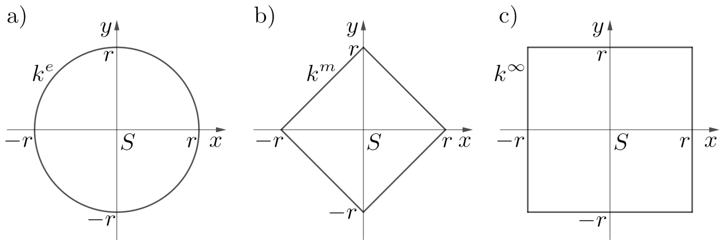
$$\begin{aligned} y &= x - r; \quad x \in \langle 0; r \rangle\,, \\ y &= -x + r; \quad x \in \langle 0; r \rangle\,, \\ y &= x + r; \quad x \in \langle -r; 0 \rangle\,, \\ y &= -x - r; \quad x \in \langle -r; 0 \rangle\,. \end{aligned}$$

Vzniklé úsečky společně tvoří hranici eukleidovského čtverce s vrcholy v bodech $[r;0]$, $[0;r]$, $[-r;0]$ a $[0;-r]$ (obr. 4b).

Použijeme-li maximovou metriku ϱ_∞, rovnice kružnice k^∞ vypadá vzhledem k umístění středu do počátku soustavy souřadnic následovně:

$$\max\{|x|;|y|\} = r.$$

Pro zvolenou hodnotu poloměru r musí mít všechny body X, které budou náležet množině k^∞, alespoň jednu ze souřadnic v absolutní hodnotě rovnou r a zároveň absolutní hodnotu druhé souřadnice menší nebo rovnou r. Případy, kdy absolutní hodnoty obou souřadnic jsou rovny r, jsou celkem čtyři: $[r; r]$, $[-r; -r]$, $[r; -r]$, $[-r; r]$. Ostatní body množiny k^∞ mají pouze jednu souřadnici v absolutní hodnotě rovnou r a druhou rovnou libovolnému reálnému číslu a takovému, že $|a| < r$. Výsledná množina má proto tvar hranice eukleidovského čtverce s vrcholy v bodech $[r; r]$, $[r; -r]$, $[-r; -r]$ a $[-r; r]$ (obr. 4c).



Obr. 4: Kružnice v eukleidovském, manhattanském a maximovém metrickém prostoru

Kromě kružnice lze samozřejmě s využitím neeukleidovských metrik zkoumat tvary dalších množin bodů daných vlastností. Příklady lze nalézt v diplomové práci (Skálová, 2022), která pokrývá základní množiny bodů v rovině probírané ve školské matematice, jako jsou osa úsečky, ekvidistanta přímky apod. a také kuželosečky. Podrobnější odvození a rozbor tvarů kuželoseček v těchto neeukleidovských metrických prostorech lze dále nalézt například v (Bruna, 2012; Dvořáková & Ponimatkin, 2018).

Kružnice, resp. kruh, v manhattanském/maximovém metrickém prostoru se objevují také ve dvou z následujících tří řešených úloh.

Úlohy z Kolmova

Ačkoliv se v následujících úlohách principy neeukleidovských metrik objevují, žáci k jejich řešení nemusí nutně znát veškerý zmíněný teoretický aparát. V určitých oblastech života se s těmito metrikami setkávají, aniž by si to uvědomovali.[2]

[2]S manhattanskou metrikou pracují některé metody regresní analýzy a je využívána ve strojírenství (robotika, 3D tisk, CNC stroje aj.). S maximo-

Princip manhattanské metriky využijeme například při určování některých délek tras. Potřebujeme-li se dostat z místa A do místa B v ulicích města, eukleidovská vzdálenost, tzv. vzdálenost „vzdušnou čarou“, neodpovídá tomu, kolik ve skutečnosti ujdeme/ujedeme metrů/kilometrů. Reálná vzdálenost je ve většině případů podstatně delší, neboť je třeba brát v potaz zakřivení zatáček, převýšení apod. Chceme-li však princip hledání cest a vzdáleností přiblížit i mladším žákům, musíme systém ulic nějak zobecnit a zjednodušit. S těmito požadavky vzniklo v rámci diplomové práce (Skálová, 2022) fiktivní město Kolmov. Název je odvozen od systému ulic, který odpovídá čtvercové síti. Ulice, které se křižují, tedy svírají pravý úhel a zároveň leží v rovině. Dále byla zavedena následující pravidla:

1. Šířku ulic zanedbáváme, pracujeme s nimi jako s úsečkami.
2. Vždy se zabýváme pouze vzdálenostmi mezi křižovatkami.
3. Vzdálenost sousedních křižovatek položíme rovnou 1.

Níže prezentujeme tři úlohy. Každá sestává z úvodního textu, jedné, nebo více otázek a řešení obsahujícího také didaktické komentáře. V jednotlivých úlohách jsou představeni někteří obyvatelé Kolmova, jejichž každodenní problémy máme za úkol vyřešit.

1. Petrova cesta do školy

Petr začne od září chodit do nové školy a zkoumá, kudy to bude mít z domova nejblíž. Na obrázku 5a je znázorněna mapa části Kolmova i s názvy ulic. Petr bydlí v rohovém domě na křižovatce Druhé ulice s Béžovou, škola se nachází na rohu Páté a Duhové ulice.

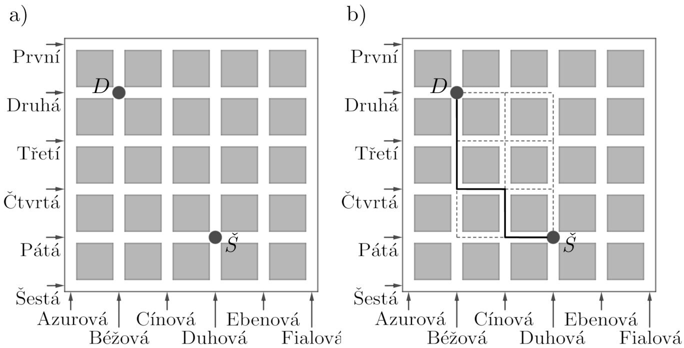
Otázky:

1. *Jak dlouhá je nejkratší cesta z Petrova domova (D) ke škole (Š)?*

---

vou metrikou se můžeme setkat například ve skladové logistice nebo při hře šachy – minimální počet tahů, které potřebuje král při přechodu z jednoho pole šachovnice na jiné, je roven vzdálenosti středů polí (předpokládáme, že šachová pole jsou jednotkové čtverce) vyjádřené maximovou metrikou.

2. Existuje jenom jedna nejkratší trasa, nebo má Petr více možností?
3. Kolik různých nejkratších tras mezi Petrovým domovem a školou existuje?



Obr. 5: Petrova cesta do školy[3]

Řešení a didaktický komentář: Při cestě z domova do školy musí Petr překonat cestu o délce 3 v jednom (svislém) směru ulic a cestu o délce 2 v druhém (vodorovném) směru ulic, celkem je tedy cesta dlouhá 5. Možných tras existuje více, na obrázku 5b je plnou čarou zakreslena jedna z nich, která obsahuje nejprve cestu podél dvou bloků Béžovou ulicí, poté Petr zabočí doleva a půjde jeden blok Čtvrtou ulicí, na křižovatce odbočí doprava a půjde jeden blok Cínovou ulicí a nakonec na další křižovatce odbočí doleva a ujde jeden blok Pátou ulicí. V případě, že dodržíme počet bloků, podél nichž Petr půjde v obou směrech (tj. svisle a vodorovně), můžeme nalézt další možné trasy. Je žádoucí, aby při hledání všech možných cest žáci sami zkusili postupovat přehledně. Na obrázku 5b jsou čárkovanou čarou zvýrazněny další části ulic, které lze využít. Lze například zvolit jednu z krajních variant, tj. jít 2 bloky vodorovně po Druhé ulici a následně dojít rovně 3 bloky po Duhové ulici, a posléze vždy postupně měnit trasu o jednu křižovatku. Možných nejkratších cest existuje celkem 10.

[3] Obrázky 5 až 9 vycházejí z diplomové práce (Skálová, 2022), pro potřeby tohoto příspěvku však byly upraveny.

Pokud pracujeme se staršími žáky ze střední školy, nabízí se u této otázky využití kombinatoriky. Každou cestu můžeme zapsat jako řetězec kroků *vodorovně* a *svisle*. Kroky *vodorovně* je třeba ujít 2, kroky *svisle* 3. Různé cesty se liší tím, jak tyto dílčí kroky seřadíme. Výpočet proto odpovídá permutaci s opakováním ze dvou prvků (kroků), kde první prvek (krok vodorovně) se opakuje dvakrát a druhý (krok svisle) třikrát:

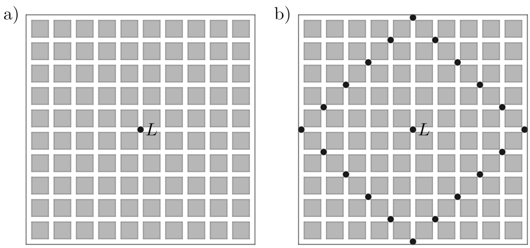
$$P'(2,3) = \frac{(2+3)!}{2!3!} = 10.$$

Hlavním cílem této úlohy je představit žákům práci se vzdálenostmi v síti kolmých ulic. Další dvě úlohy jsou již zaměřené na hledání množin bodů daných vlastností.

2. Lenčiny vycházky

Lenka měla nedávno úraz nohy, kterou má nyní posilovat pravidelnými zdravotními procházkami. Aby si nohu nepřetížila, smí ujít každý den trasu dlouhou maximálně 10 (celkem od domova tam a zpět).

Otázka: Na jaká nejvzdálenější místa může Lenka ze svého bydliště (L) dojít (obr. 6a)?



Obr. 6: Lenčiny vycházky

Řešení a didaktický komentář: Jelikož celková vzdálenost, kterou může Lenka každý den urazit, je 10, nejzazší možné místo musí být od domova vzdálené 5. Takových míst (křižovatek) můžeme nalézt celkem 20. Všechna náleží hranici čtverce se středem v bodě L a úhlopříčkou dlouhou 10 (obr. 6b).

Už se žáky druhého stupně ZŠ je možné navázat otázkou, které známé definici množiny bodů dané vlastnosti odpovídá formulace v zadání. Jelikož zkoumaný problém snadno převedeme na hledání všech bodů ve vzdálenosti 5 od bodu L, můžeme si všimnout souvislosti s definicí kružnice. Zde jsme nalezli pouze množinu izolovaných bodů. Pokud bychom si představili, že nemáme žádné domy, pouze holou pláň, ale přitom se můžeme stále pohybovat pouze ve dvou navzájem kolmých směrech, získali bychom jako řešení celou hranici čtverce. Můžeme tak říci, že při použití manhattanské metriky má kružnice tvar hranice eukleidovského čtverce.

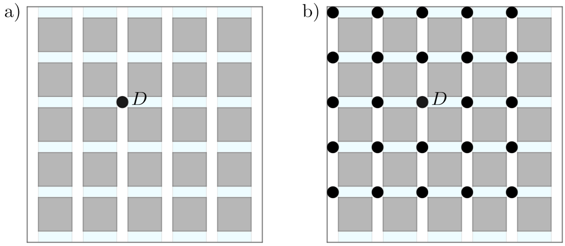
Maximová metrika nemá na rozdíl od manhattanské metriky tak snadné praktické aplikace. Přesto ji lze při zavedení dalších podmínek na obdobných úlohách do určité míry žákům představit. Při práci s maximovou metrikou je klíčové nějak rozlišit pohyb ve svislém a vodorovném směru. Za tímto účelem zavedeme v Kolmově zvláštní Vodní čtvrť, v níž všechny ulice ve vodorovném směru nahradíme vodními kanály, po kterých se obyvatelé pohybují na lodičkách. Klasické ulice v druhém (svislém) směru jsou výše nad hladinou, přes jednotlivé kanály vedou v místě křižovatky mosty, takže se lze pohybovat ulicí rovně bez problému. Stejně tak po kanálu lze bez problému projíždět v lodičce pod mosty. U každého mostu lze nastoupit do či vystoupit z lodičky.

3. Tereza a Lucie si hrají na schovávanou

Dvě kamarádky, Tereza a Lucie, které bydlí ve stejném domě na rohu ulice, si spolu rády hrají venku na schovávanou. Od rodičů mají dovoleno se schovávat jen v omezené vzdálenosti od domova (D), aby se neztratily (obr. 7a). Maximálně se mohou vzdálit o 2 po ulici a o 2 na lodičce.

Otázka: Na kterých křižovatkách se mohou děvčata schovat?

Řešení a didaktický komentář: Všechna možná řešení jsou znázorněna na obrázku 7b. Nalézt je můžeme například postupnými kroky v obou směrech pohybu, tj. nejprve půjdeme vzdálenost 1 nebo 2 po ulici a následně poplujeme o 1 nebo 2 úseky na lodičce, resp. jejich různými kombinacemi. Do množiny řešení by



Obr. 7: Tereza a Lucie si hrají na schovávanou

dle zadání měl patřit i výchozí bod D. Zařazení tohoto bodu do množiny řešení může být předmětem diskuze s žáky, jelikož cílem hry děvčat je schovat se, čehož by na tomtéž místě těžko dosáhla.

I zde můžeme se staršími žáky navázat otázkou, zda vzniklá množina bodů odpovídá nějaké známé množině. Tato otázka je na porozumění obtížnější než otázky v předchozích úlohách. Pokud si pod uvedeným zadáním žáci žádnou konkrétní množinu nepředstaví, můžeme vznést například následující dotazy: „A co když se děvčata nemusí schovat pouze na křižovatce, ale i v libovolné ulici? Nebo dokonce i uvnitř domu?“

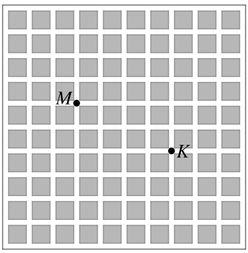
Abychom vyřešili nastolený problém, zavedeme nový způsob měření vzdáleností. Uvažujme libovolnou nejkratší trasu z bodu A do bodu B. Označme v délku části této trasy překonanou po vodě a s délku části této trasy ujitou po ulici. Vzdáleností bodů A, B nyní rozumějme vždy maximální z hodnot v a s. Pokud žákům tento způsob měření vzdáleností s pomocí obrázku vysvětlíme, můžeme už poměrně snadno dospět k závěru, že maximální vzdálenost bodu D a libovolného bodu z množiny řešení je zde rovna 2. Množinou všech bodů, jejichž vzdálenost od daného bodu D je menší nebo rovna 2, je kruh se středem v bodě D a poloměrem 2. Poté můžeme diskutovat, jak by v této situaci vypadala kružnice.

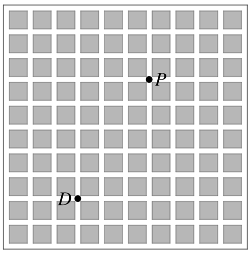
Výše prezentované úlohy jsou součástí diplomové práce (Skálová, 2022). Kromě nich jsou v práci popsané ještě další úlohy, z nichž zde uvedeme už pouze zadání. Na základě těchto úloh lze s žáky vymýšlet a řešit další obdobné úlohy, stupňovat jejich obtížnost a s jejich pomocí zkoumat vlastnosti různých metrik a metrických prostorů.

4. Marie a Karel na rande

Mladá dvojice Marie a Karel z Kolmova si domluvila způsob potkávání na společných schůzkách s několika pravidly. Chtějí společně poznat co nejlépe své město, a tak spolu chodí na procházky. Aby nebyla procházka nikdy stejná, pokaždé se potkají na jiném místě, odkud vyrazí. Domluvili se, že na místo setkání to vždy musí mít oba stejně daleko ze svého bydliště. Bydliště Marie je na obrázku 8a označeno jako M, bydliště Karla jako K.

Otázka: Na jakých místech ve vyznačené části města se Marie s Karlem mohou potkávat?

a) 

b) 

Obr. 8: a) Marie a Karel na rande, b) Nákupy pana Davida

5. Nákupy pana Davida

Pan David z Kolmova každé odpoledne vyráží přesně ve 3 hodiny z práce (P) a v půl čtvrté vyzvedává děti v družině (D). Cestou z práce k družině ale potřebuje ještě nakoupit potraviny na večeři. V Kolmově je naštěstí obchod doslova na každém rohu. Cesta mezi sousedními rohy trvá panu Davidovi jednu minutu, z práce do obchodu i z obchodu do družiny jezdí vždy nejkratší možnou trasou (obr. 8b).

Otázky:

1. *Do kterých obchodů může pan David jezdit nakupovat, aby stihl děti vyzvednout včas, pokud nákupem potravin stráví 20 minut?*

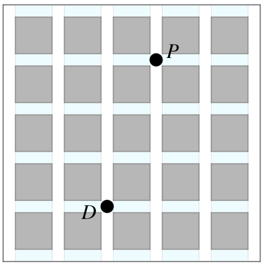
2. *Do kterých obchodů může pan David jezdit, aby mu cesta i s nákupem trvala právě 30 minut?*

6. Bedřichova cesta do práce

Bedřich z Vodní čtvrti cestuje každé ráno z domu (D) do práce (P) o několik ulic dál (obr. 9).

Otázky:

1. *Jak dlouhá je Bedřichova cesta do práce a kolik různých tras může Bedřich po cestě do práce využít?*
2. *Jaký je nejmenší a největší možný počet přestupů mezi kanálem a silnicí, které musí Bedřich během cesty absolvovat?*
3. *Jak velkou část trasy stráví na lodičce a jak velkou na běžné ulici?*



Obr. 9: Bedřichova cesta do práce

Závěr

Představené úlohy mají sloužit k nastínění práce s jinými metrikami, než je metrika eukleidovská, přičemž mohou být přínosné pro žáky různých věkových kategorií. Jejich řešení mohou nalézt již žáci prvního stupně základní školy, jelikož není nutně třeba hlubších matematických či geometrických znalostí než základních počtů a orientace v prostoru, resp. v rovině. Starší žáci, zhruba od 8. ročníku druhého stupně, mohou navíc v úlohách hledat analogie s množinami bodů daných vlastností, jejichž definice se ve škole učí. Žáci středních škol mohou řešit složitější otázky související s kombinatorikou, podrobněji zkoumat získané množiny bodů daných vlastností a porovnávat je, hledat rozdíly či souvislosti a objevovat „pravidla“ pro jiný než eukleidovský způsob měření vzdáleností. Několik zahraničních výzkumů (např. Dreiling, 2012; Kemp & Vidakovic, 2023) potvrdilo, že zkoumání manhattanské geometrie může vysokoškolským studentům pomoci s plným pochopením pojmů geometrie euklidovské. Obdobné výzkumy u žáků středních či základních škol nám nejsou známy. Věříme však, že decentní seznámení s neeukleidovskými metrickými prostory již před vstupem na vysokou školu žákům neublíží, ba naopak, může je motivovat k dalšímu studiu matematiky.

Literatura

[1] Bruna, J. (2012). *Vybrané objekty v neeukleidovských metrikách.* [Bakalářská práce, PedF UK.] http://trilian.ujep.cz/svoc/2013/k2b/Bruna.pdf

[2] Dreiling, K. M. (2012). Delving deeper: Triangle construction in taxicab geometry. *The Mathematics Teacher, 105*(6), 474–478. https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.6.0474

[3] Dvořáková, Ľ., & Ponimatkin, G. (2018). Kuželosečky v neeukleidovských prostorech. *Rozhledy matematicko-fyzikální, 93*(1), 1–14. https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/147159/Rozhledy_093-2018-1_1.pdf

[4] Kemp, A., & Vidakovic, D. (2023). Students' understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: an APOS perspective with schema interaction. *Educational Studies in Mathematics, 112*, 567–588. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10180-2

[5] Skálová, Z. (2022). *Množiny bodů daných vlastností v neeukleidovských metrikách.* [Diplomová práce, MFF UK.] https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/175572/120426476.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[6] Veselý, J. (2009). *Základy matematické analýzy. Druhý díl.* Matfyzpress.

Abstract

The aim of the article is to present a series of problems in which pupils are tasked with finding de facto loci of points in a plane, but, they work with distances according to the Manhattan or maximum metric principles. The problems are suitable for primary school pupils, but by increasing their difficulty, they can be solved by older pupils. The article also mentions the necessary mathematical theory, which the pupils do not need to know in order to solve the problems, however, the teacher should be familiarised with.

Vlasta Moravcová
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova
Sokolovská 49/83
186 75 Praha 8
e-mail: Vlasta.Moravcova@mff.cuni.cz

Zuzana Skálová
Gymnázium Christiana Dopplera
Zborovská 621/45
150 00 Praha 5
e-mail: skalova@gchd.cz