Rozhledy matematicko-fyzikální

Tereza Čapková; Jana Klicnarová; Tomáš Roskovec

Modely a paradoxy teorie her, úvahy o vězňově dilematu

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 1, 1–10

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152328`

Modely a paradoxy teorie her, úvahy o vězňově dilematu

Tereza Čapková, Ekonomická fakulta JU, České Budějovice
Jana Klicnarová, Ekonomická fakulta JU, České Budějovice
Tomáš Roskovec, Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Abstrakt. V článku představujeme některé základní pojmy teorie her na klasické úloze vězňova dilematu. Úloha je snadno formulovatelná, přesto má zejména v ekonomii významné aplikace. Pozoruhodné na ní je zejména to, že různé přístupy k modelování rozhodování vedou k velmi různým výsledkům, ke kterým se musí přistupovat s opatrností. Kromě modelů zmíníme i experimenty.

Matematický model je něco, co je sice špatně, ale přesto je to užitečné. Tato myšlenka, vypůjčená z přednášky Luďka Berce [2], je zvláště relevantní v aplikované matematice, kde se často setkáváme s jevy, které je obtížné přesně popsat, přesto je chceme analyzovat. Proto v různých oborech, jako je fyzika, biologie nebo společenské vědy, často využíváme zjednodušující modely, abychom lépe porozuměli složitým situacím a mohli navrhnout řešení, která pak musíme pečlivě posoudit a aplikovat. Jinými slovy, model zjednodušuje situaci, aby byla popsatelná a řešitelná, ale musíme si dát pozor, abychom po zjednodušení už neřešili zcela jiný problém a nedostali tak naprosto přesné řešení zcela jiné úlohy.

V tomto pojednání se budeme zabývat modely založenými na tzv. teorii her. Kořeny teorie her sahají do 16. a 17. století. Původně se vědci zabývali především problémy ve vztahu k tehdy velmi populárním salonním hrám. Základním specifikem teorie her je, že se zde bere v úvahu reakce ostatních stran (na rozdíl například od teorie rozhodování). Předpokládáme, že všichni aktéři jsou tzv. racionální, to znamená, že se každý snaží o co největší vlastní prospěch. Za základ současné teorie her se pokládá článek Johna von Neumanna z roku 1928. Základní pojmy, včetně pojmu teorie her, byly ustanoveny v knize, kterou napsal ve spolupráci s Oskarem Morgensternem v roce 1944 [8] a kde poukazují na souvislost problematiky teorie her a (nejen) ekonomických problémů.

V současné době je teorie her široce rozšířený obor, který se zabývá zkoumáním střetů a rozhodování mezi dvěma nebo více hráči v různých typech her – v hrách, situacích a konfliktech. Tito hráči mohou představovat jednotlivce, firmy nebo dokonce státy, zkrátka aktéry, kteří jsou vůči sobě v nějaké konfliktní situaci. Hry mohou zahrnovat různé situace, jako je obchodní jednání, výběrová řízení, karetní hry nebo plánování společné dovolené. V našem příspěvku se zaměříme na jeden z nejklasičtějších problémů teorie her, na hru, která je základním prvkem kurzů teorie her v matematice i ekonomii. Na ní budeme demonstrovat několik fascinujících paradoxů této teorie.

Vězňovo dilema

Problém, dnes známý jako vězňovo dilema, popsali Merrill Flood a Melvin Dresher v roce 1950. Jméno a dodnes uváděnou legendu mu dal Albert W. Tucker v roce 1951, který přepracoval původní číselné zadání tak, aby bylo srozumitelné i pro nematematiky, zejména pro psychology. O jaký problém jde? Jedná se o hru, která se odehrává mezi dvěma vězni (ve skutečnosti vlastně zadrženými), kteří jsou zatčeni a obviněni ze společného zločinu. Každý z nich je umístěn v oddělené místnosti a má možnost se rozhodnout, zda se přizná (samozřejmě s určitou mírou viny připsané komplici) nebo zda bude popírat svou vinu. Existují tedy čtyři možné kombinace rozhodnutí, které jsou znázorněny tabulkou (v řeči teorie her maticí) na obr. 1.

		Bob	
		popírat vinu	přiznat se
Alice	popírat vinu	1 rok 1 rok	3 roky propuštění
	přiznat se	propuštění 3 roky	2 roky 2 roky

Obr. 1: Vězňovo dilema

V této matici jsou uvedeny tresty, které odpovídají různým kombinacím rozhodnutí obou vězňů. Pokud se oba přiznají, bude jim vina prokázána a budou odsouzeni každý na dva roky ve vězení. Pokud se žádný z nich nepřizná, budou odsouzeni za nižší zločin (nelze prokázat vinu) a každý obdrží trest jeden rok. Když se jeden vězeň přizná a druhý zapírá, pak vězeň, který zapírá, bude odsouzen na velmi dlouhou dobu (tři roky, bude mu prokázána vina), zatímco vězeň, který poskytne přiznání, je propuštěn bez trestu (získává polehčující okolnost). Tímto dilematem je ilustrováno, jak složité může být rozhodování ve střetu zájmů a jaký vliv mají jednotlivá rozhodnutí na výsledek pro každého z hráčů.

Teorie her nás směřuje k hledání optimálních strategií. V případě, že vězni nemají možnost se dohodnout a neznají chování svého komplice, musí se snažit odhadnout správnou strategii. V takové situaci by analyzovali: Pokud můj kolega mlčí, je pro mě výhodnější se přiznat, protože tím se dostanu do nejvýhodnější situace, zatímco pokud budu mlčet, čeká mě delší trest. A pokud se můj kolega přiznal, měl bych se také raději přiznat, protože mlčení opět vede k delšímu trestu. Proto, pokud jednáme racionálně a nebere se ohled na důsledky (nebo v jazyce teorie her výplatu) druhého hráče, je v každém případě výhodnější se přiznat. Pokud jsou oba hráči racionální, oba se tedy přiznají. Prvním paradoxem je, že pokud každý hráč minimalizuje svůj trest, výsledkem je situace, kdy si hráči dohromady odsedí maximální možnou dobu.

Z výše popsaného je tedy patrné, proč se tento problém nazývá dilema. Nejlepší strategie pro oba hráče, pokud by spolupracovali a věřili si, by bylo se nepřiznat, v takovém případě by jim nebylo nic prokázáno a dostali by každý pouze rok. Ale toto řešení není takzvaně stabilní, to znamená, že pokud se hráč rozhodne nejednat podle této strategie, tak si polepší a druhému pohorší. Právě tato struktura výsledků se objevuje v mnoha problémech z oblastí ekonomie, sociologie, politologie, biologie, proto je vězňovo dilema stále aktuálním problémem.

V předchozí úvaze jsme využili model nekooperativních her, který předpokládá, že hráči nemohou uzavřít dohody a rozhodují se pouze na základě vlastní výplaty. Nicméně, pokud hráči dokážou spolupracovat a hledají nejvýhodnější rozhodnutí pro oba, mohou se dohodnout a oba budou mlčet, čímž dosáhnou v součtu nejkratšího možného trestu. Rozdíl ve výplatách (v našem případě rozdíl ve společných trestech) se nazývá superaditivní efekt, v našem případě je to $(2+2)-(1+1)=2$ roky trestu. Oba modely, nekooperativní i kooperativní, se zaměřují primárně na matematickou stránku problému a obvykle neposkytují úplný obraz reality, protože nezahrnují všechny lidské faktory, jako je důvěra, psychologie, zkušenost a další.

Nashova rovnováha

I lidé mimo matematiku často znají jméno Johna F. Nashe, vynikajícího matematika, jehož život poznamenala psychická choroba. O Nashovi vznikl film Čistá duše, který velice volně popisuje některé jeho životní osudy. V tomto filmu je rovněž zmíněn a popsán pojem Nashovy rovnováhy, ovšem chybně a velice nepřesně. Přitom právě důkaz existence rovnovážného (Nashova) bodu je práce, za kterou byl Nash oceněn Nobelovou cenou. Co je to *Nashova rovnováha*? To je volba strategií hráčů, ve které se ani jednomu hráči nevyplatí změnit svou strategii, za předpokladu, že ostatní hráči svoji strategii zachovají. Ve výše zmíněném dilematu je to právě rozhodnutí obou hráčů přiznat vinu. Pokud bude druhý hráč držet svoji strategii (tj. přizná se), tak se mi nevyplatí měnit mé rozhodnutí (tj. přiznat se). To ilustruje, že taková volba rozhodnutí nemusí být tím nejlepším pro jednoho či více hráčů, ale je to řešení, které je stabilní.

Jiný příklad je hra *Kámen, nůžky, papír*, kde je jediná situace odpovídající Nashově rovnováze právě strategie hrát náhodně, tedy každý symbol volit s pravděpodobností $1/3$. Pokud bychom totiž volili jakékoli jiné pravděpodobnosti nebo nějaký systém, soupeř se může přizpůsobit (pokud preferujeme kámen, soupeř bude častěji hrát papír a méně často nůžky, budeme-li pravidelně střídat strategie, protihráč se také přizpůsobí, bude vědět, co budeme volit), ale pak se i nám vyplatí jeho nové strategii přizpůsobit. Tato úvaha je poněkud náročná na výpočet, ukazuje nám ovšem, proč chytrý algoritmus dokáže při dostatečném počtu opakování člověka v této hře porazit – člověk je totiž velmi špatný generátor náhodných veličin. Tato chybovost byla studována například v [9], kde představili algoritmus úspěšný proti lidskému hráči. Nejedná se ovšem o rovnovážný bod, protože pokud vím, že soupeř hraje dle prezentované strategie, dokáži odhadnout jeho strategii v daném kole a odpovědět papírem na jeho kámen a podobně.

Existují i příklady s více body Nashovy rovnováhy. Například *úloha protijdoucích*, kde jde o minutí či střetnutí protijdoucích osob. Jednoduchá hra, kdy jdete po chodníku a přímo proti vám jde jiný chodec. Pokud půjde osoba proti nám napravo, chceme jít nalevo a minout ji. Pokud jde nalevo, stočíme se doprava a nesrazíme se. Nikoho by snad nenapadlo změnit směr a otočit se vpravo, pokud předpokládáme, že osoba jdoucí proti nám se bude držet vpravo od nás, naopak pokud by nás míjela zleva, nebudeme měnit strategii a zůstaneme vpravo. Zde jsou tedy dva Nashovy rovnovážné body. A pokud jdeme na chodníku přímo proti někomu, je nám jedno, který z nich nastane, ale jakmile jsou naše zamýšlené dráhy patrné, ani my, ani protijdoucí nezměníme trasu.

A co bylo na tomto triviálním pojmu tak fascinující, že se to dočkalo Nobelovy ceny? Předně důkaz existence takového bodu za určitých předpokladů konečnosti hry, ale také důsledky a aplikace v ekonomických modelech.

Aplikace vězňova dilematu

Jedním z příkladů, jak lze využít vězňovo dilema v ekonomii, je situace oligopolu. Pro jednoduchost se zaměříme na duopol, což je situace, kdy dvě firmy ovládají prakticky celý trh. Každá z nich se musí rozhodnout, jakou cenu stanoví pro svůj produkt. Tyto firmy mají možnost (pro zjednodušení) volby mezi nižší a vyšší cenou. Jestliže se obě firmy shodnou na nastavení vyšší ceny, budou si rovnoměrně rozdělovat trh a dosáhnou tak vyšších zisků. Naopak, pokud jedna firma zvolí nižší cenu než druhá, firma s nižší cenou získá celý trh a významné zisky, zatímco firma s vyšší cenou ztratí svou pozici na trhu. Když se obě firmy rozhodnou pro nižší cenu, budou si trh rozdělovat rovnoměrně, avšak dosáhnou menšího zisku než při vyšších cenách. Ekonomická teorie tvrdí, že v takovémto „trestném" prostředí si firmy nemohou vzájemně důvěřovat, a proto se neodváží zvolit vyšší cenu. Z pozorování reality však vyplývá, že omezení počtu subjektů na trhu často vede ke zvýšení cen, a to i přesto, že kartelová dohoda mezi firmami je zakázána zákonem (jako například u mobilních operátorů v České republice). Situaci duopolu lze znázornit pomocí výplatní matice, viz obr. 2.

		Firma 2	
		vyšší cena	nižší cena
Firma 1	vyšší cena	Vysoké zisky, férový podíl trhu Vysoké zisky, férový podíl trhu	Ztráta pozice na trhu Vysoké zisky, celý trh
	nižší cena	Vysoké zisky, celý trh Ztráta pozice na trhu	Nižší zisky, férový podíl trhu Nižší zisky, férový podíl trhu

Obr. 2: Rozhodování oligopolistů

Během pandemie Covid-19 jsme všichni čelili vězňovu dilematu, aniž bychom si toho byli plně vědomi, při rozhodování, zda nosit nebo nenosit roušku (samozřejmě za přijatého předpokladu, že nošení roušky přenos nemoci omezí). Tato situace se dá opět ilustrovat pomocí matice rozhodnutí, viz obr. 3. Pokud bude většina populace omezovat možnost přenosu, bude počet nakažených snížen, ale každý omezující se rouškou nebo omezením sociálního kontaktu obětovává své pohodlí.

		Tvoje volba	
		rouška	bez roušky
Moje volba	rouška	nepohodlí, ale pandemie skončí rychle nepohodlí, ale pandemie skončí rychle	nepohodlí, ale pandemie skončí pomalu volnost
	bez roušky	volnost nepohodlí, ale pandemie skončí pomalu	pandemie neskončí pandemie neskončí

Obr. 3: Rozhodování o rouškách

Na poli randění můžeme také nalézt aplikaci vězňova dilematu. Začátek vztahu totiž závisí na vzájemném odhalení citů, kdy každá strana přiznává, že něco cítí ke druhému. Toto odhalení však nese určité riziko, neboť pokud se jedna strana přizná ke svým citům a druhá strana necítí totéž, může se ta první cítit trapně. Naopak, pokud obě strany sdělí svou náklonnost, je to radostná událost. Avšak často je riziko jednostranné lásky příliš velké, což vede k tomu, že účastníci volí Nashovu rovnováhu – tedy se ke svým citům nepřiznají.

V těchto příkladech vidíme, že počáteční modely o kooperaci a nekooperaci přichází do hry oba, a je třeba dalších úvah, abychom rozhodli, který z nich popíše právě zkoumanou situaci. Lze samozřejmě matematicky počítat přínos hráčů z kooperace, ale v aplikacích o navázání spolupráce rozhodnou zpravidla argumenty jiné než čistě racionální.

Opakované vězňovo dilema

Klíčový aspekt, který oddělí kooperaci od nekooperace, je důvěra. Pokud si hráči věří, mohou získat společně více, ale při základním nastavení se hráčům vyplatí si nevěřit. Nyní zkoumejme pozměněný model, takzvané opakované či iterované vězňovo dilema, kdy spolu hráči sehrají několik her po sobě a výsledná výplata je součet skóre v jednotlivých kolech.

Tento model je pro popis vztahů mnohem zajímavější. Partneři v obchodě, ve vědě i v životě se často ocitají v situaci, kdy mohou pracovat na společné věci a důvěřovat, že partner se zachová obdobně, ale mohou se také zachovat sobecky a jen sklízet práci a úsilí partnera. Pokud oba budou preferovat sobecký přístup, sice se nenamáhají zbytečně, ale také se zdaleka nebudou mít tak dobře jako ti, kteří se na sebe mohou spolehnout a něco spolu podniknout. Pokud například obchodnímu partnerovi nevěřím, nepošlu peníze, dokud neobdržím zboží, naopak prodejce bude vyžadovat zálohy a záruky, případně obě strany zaplatí prostředníkům či právníkům za pojištění před podvodem. Všechny tyto úkony stojí čas, úsilí a peníze a jsou zbytečné u partnera, který je spolehlivý. Dle Nashe je optimální v posledním kole iterované hry partnera zradit. Proto stačí o hře přemýšlet jen do předposledního kola. Ale tím se předposlední kolo stává posledním v modelu a opět je nejvýhodnější zradit. Pokračujme v úvaze a můžeme odhadnout, že optimální volba je nekooperativní hra, při které ale oba hráči (jednající dle teorie a optimálně) dopadnou velmi špatně.

Na druhou stranu Robert Axelrod uspořádal slavný turnaj umělých inteligencí, které se střetnou, sehrají spolu iterované vězňovo dilema s náhodným vyšším počtem kol. Vyzval odborníky napříč odvětvími vědy (sám byl politolog), aby navrhli algoritmus, který by v daném turnaji nejlépe uspěl. Přihlášeno bylo 14 strategií a jedna zcela náhodná, které se střetly. A mezi velmi složitými statistickými úvahami a Markovskými řetězci zvítězila strategie až triviální. Začíná spoluprací a v každém dalším kole provede přesně to, co udělal její partner v předchozím kole. Této strategii se říká Tit-for-Tat (obtížně přeložitelná fráze, volně „jak ty mně, tak já tobě“ či „oko za oko, zub za zub“) či Copycat (opisující, opičící se). Později byl tento proslavený turnaj zopakován s mnohem vyšším počtem strategií, mnohé z nich byly navržené tak, aby právě Tit-for-Tat porazili, protože vítěz prvního turnaje byl znám. Ovšem opět zvítězil Tit-for-Tat, protože všemožné komplikované strategie mezi sebou ztratily více. Tím se dostáváme k dalšímu zajímavému paradoxu, kdy experiment nesouhlasí s modelem. Je zde samozřejmě podstatný faktor, že umělé inteligence neznaly počet kol, přesto je překvapivé, že v turnaji je nám strategie oceněná Nobelovou cenou k velmi malému užitku.

Robert Axelrod, který nebyl matematikem, z turnaje vyzdvihnul aplikovatelné myšlenky. Napsal slavnou knihu [1], kde zdůvodnil vítězství Tit-for-Tat dodržením čtyř pravidel pro zdravý partnerský vztah:

1. Buďte milí, nebuďte tím, kdo zklame jako první.
2. Trestejte náhle, ať váš partner okamžitě ví, že mu to u vás neprojde.
3. Odpouštějte, pokud se partner po pochybení začne chovat správně, jednejte s ním, jako by se tak choval vždy.

4. Buďte čitelní, ať váš partner okamžitě ví, co bude po jeho akci vaše reakce.

Významnou popularizační prací je web Evolution of trust od Nicky Case [3], kde se formou hry dozvíme o iterovaném vězňově dilematu, a jehož cílem je propagovat tvorbu důvěry mezi lidmi. Na webu je zahrnut i problém šumu neboli neúmyslné nespolupráce. To je mnohem přesnější model, protože i u dobrých partnerů se můžeme dočkat nenaplnění dohody z objektivních důvodů. Dodavatel nedodá zboží, protože nedostal materiál od svého subdodavatele, spoluautor článku má zpoždění, protože mu onemocněly děti a musí je hlídat, naše milá či milý nedorazí na rande, protože vlak zastavil kdesi v polích a nedovezl je. V takovém modelu se zvažuje zjemnění strategie na Tit-for-two-Tats, kdy partnerovi nevracíme jeho předchozí tah, ale spolupracujeme, pokud od něj nepřišla nespolupráce ve dvou předchozích kolech. Pokud by se totiž střetli dva Tit-for-tat a jeden z nich neúmyslně nespolupracoval, tak si tuto nespolupráci budou předávat po celý zbytek jejich partnerství.

Zajímavá je simulace v pseudoevolučním algoritmu, kdy v nastavené populaci strategií dochází po vyhodnocení k odstranění neúspěšných a naklonování úspěšných. Toto bylo analyzováno například v [3, 5]. Tento model do jisté míry připomíná společnost, kde méně úspěšní lidé změní své chování podle vzoru úspěšných. Zde se ukazuje, za jakého složení převládne jaká strategie, například pokud budou naivní zneužíváni nespolupracujícími, tak naivní hráči časem z populace zmizí a budou nahrazeni nespolupracujícími strategiemi, podobně jako důvěřivý člověk může přestat důvěřovat cizincům, pokud se opakovaně setká s nepoctivým jednáním. Paradoxem právě tohoto modelu je, že ryze sobecké strategie mohou za určitých podmínek převážit, ale toto vítězství znamená, že tito hráči dostanou velmi malou výplatu, protože jejich zisk pramení ze zneužívání důvěry, kterou ale svým chováním z populace zcela vymýtili. Obecně ztráta důvěry znamená snížení výplaty všem zúčastněným, což je pozorování přesahující modely.

Jeden velmi zajímavý výsledek je uveden v článku Reného Levínského, Abrahama Neymana a Miroslava Zeleného [7]. Popisuje tvorbu strategie vedoucí k tomu, aby vás váš partner „neobral“. Řeší otázku, kolik informací musíme v hlavě držet, abychom byli schopni navrhnout proti soupeřově známé strategii dobrou odpověď. Překvapivě si stačí pamatovat stejně jako soupeř a není tedy třeba mít nutně větší paměť. Tento výsledek je sice velmi obecný, nevztahuje se jen k vězňovu dilematu, ale zrovna na něm se dobře vysvětluje jeho zajímavost.

Chování hráčů a optimální strategie

Po všech těchto modelech s vypočítanými strategiemi a umělými inteligencemi samozřejmě musíme zvážit, do jaké míry jsme se při tvorbě modelu odchýlili od reality a zda lidé při svých denních úvahách připomínají spíše Nashův model či model Axelrodův. Tato otázka však již leží mimo oblast matematiky a spadá spíše do sociálních věd, přesto ji nastíníme.

Již od počátku je patrno, že lidé se snaží vyhnout situaci oboustranně sobeckého jednání, a pokud existuje důvod pro důvěru, tak se ji snaží udržovat. Samozřejmě je velmi různé a individuální, při jakých situacích se důvěra ztrácí.

V nedávné práci se touto otázkou zabývala spoluautorka tohoto příspěvku a pomocí webu [4] došla k zajímavým pozorováním. Zdá se, že mezi muži a ženami není při hře velký rozdíl, ale v našem vzorku respondentů se starší hráči chovali více poctivě a byli úspěšnější a také metodičtější. A samozřejmě byla položena otázka, jaká předem naplánovaná strategie by přinesla nejlepší výsledek pro konečný počet her. A ukazuje se, že nejlepší je zpočátku důvěru budovat poctivostí, a v závěru partnerovu důvěru využít a chovat se sobecky. Tuto strategii jsme pro účely práce nazvali Zlatokopka.

Potěšující ovšem je, že ačkoli hráči hráli jen o fiktivní peníze a jejich sobectví by přineslo vyšší skóre, ale neublížilo skutečným lidem, tak se většina z 300 hráčů, konkrétně 94 %, chovala velmi slušně. Po čtyřech kolech, kdy si oba partneři pomáhali, jen velmi malý počet hráčů poslechl v posledním kole Nashe a zachoval se sobecky. Hráči tím paradoxně nemaximalizovali své skóre, svůj zisk, ale hráli vstřícně a slušně. Tato absence optimalizace není výhodná pro hráče, ale podává příznivou zprávu o chování lidí a naší společnosti.

Závěr

Článkem jsme chtěli především čtenáře navnadit na bohaté a atraktivní pole teorie her, kterému se lze věnovat odborně i rekreačně. Řada matematických hříček a úvah může vést k úlohám této teorie, zároveň je tato teorie jednou z těch oblastí matematiky, jejíž aplikace jsou srozumitelné a okamžitě použitelné. Též chceme čtenáře tímto textem varovat před bezhlavým aplikováním výsledků modelů, což je velmi aktuálním tématem. Často se totiž bohužel setkáváme s tím, že z mnoha možných variant je model zvolen tak, aby podpořil názor rozhodce, a nikoliv na základě jeho vhodnosti, zejména v ekonomických, politických, ale i zdravotnických otázkách.

Literatura

[1] Axelrod, R.: *Evolution of cooperation.* Basic books, New York, 1984.

[2] Berec, L.: *Matematické modelování v ekologii a epidemiologii.* Matematika pro život, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2023, [online přednáška] `https://www.youtube.com/watch?v=zaW0Rgv3RIg`.

[3] Case, N.: *Evolution of trust.* `https://ncase.me/trust/`.

[4] Čapková, T.: *Web Creation of trust.* `https://creationoftrust.capek.io/`.

[5] Čapková, T., Roskovec, T.: *Short sequence iterated prisoner's dilemma in simulations and applications.* In: 16th International Scientific Conference Inproforum, roč. 16 (2022), s. 215–221.

[6] Kruml, D.: *Vězeň to má spočítané.* Masarykova univerzita, Brno, 2018.

[7] Levínský, R., Neyman, A., Zelený, M.: Should I remember more than you? Best responses to factored strategies. *International Journal of Game Theory*, roč. 49 (2020), s. 1105–1124.

[8] von Neumann, J., Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, Princeton, 1944.

[9] Xu, B., Zhou, H.-J., Wang, Z.: Cycle frequency in standard Rock–Paper–Scissors games: Evidence from experimental economics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, roč. 392 (2013), č. 20, s. 4997–5005.

Využijme Pythagorovu větu

Vlastimil Dlab, Bzí u Železného Brodu

V literatuře, ať už v učebnicích či časopisech pro školy, se často setkáváme s důkazy jednoduchých tvrzení, která používají pojmy a znalosti nepřiměřené dané úloze. Nezřídka to souvisí s aplikací nabiflovaných vzorečků. Typické je užívání kosinové věty Al Kašího (1380–1429) v případech, kdy plně a s větším porozuměním postačí jednoduchá aplikace podobnosti trojúhelníků a nebo věta Pythagorova. Takových příležitostí lze nalézt v literatuře nadmíru (viz [2]). Zde je třeba zdůraznit, že aplikace jednoduchých a pro žáky nižších ročníků přístupných metod přináší do výuky porozumění a jako důsledek zájem o matematiku.