Rozhledy matematicko-fyzikální

Veronika Eclerová; Petr Zemánek

Fibonacci, Mersenne, Mendel

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 1, 18–24

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152333

Fibonacci, Mersenne, Mendel

Veronika Eclerová – Petr Zemánek
Ústav matematiky a statistiky, PřF MU, Brno

Abstrakt. Článek krátce přibližuje Mendelovy základní objevy týkající se jeho experimentů s hrachem a také s experimenty spojenou kontroverzi.

Čísla. Sotva se jako malí naučíme svá první slova, už chceme i počítat – nejdříve do deseti, pak do sta, a ti vytrvalejší z nás se dokáží zabavit i počítáním až do tisíce. Čísel je nekonečně mnoho a dokážeme jimi vyjádřit jakékoliv množství. Mnozí jistě máme i nějaké oblíbené číslo, pamatujeme si PIN ke své kartě nebo telefonu a leckdy i svá rodná čísla. Ale řekli byste o nějakém čísle, že se vám líbí? Nebo že se s ním setkáváte výrazně častěji než s ostatními? Vaši odpověď sice odhadnout nedokážeme, ale víme, že příroda takové oblíbence má.

V roce 1202 vydal italský matematik Leonardo Pisánský (dnes známý spíše jako Fibonacci, což znamená Bonacciho syn) Knihu počtů (Liber Abaci), ve které na různých problémech především ilustroval možnosti využití a praktičnost hindsko-arabského číselného systému, čímž výrazně přispěl k jeho rozšíření do Evropy. V jedné z těchto úloh popisuje Leonardo velmi idealizovaný model růstu populace králíků, kdy se králíci množí každý měsíc a nikdy neumírají. Při řešení této úlohy se dostaneme k číslům vyjadřujícím velikost populace v jednotlivých měsících

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ \ldots,$$

kde každé další číslo je součtem dvou předchozích. Tato čísla jsou známá jako Fibonacciho čísla. Matematici prozkoumali mnoho všelijakých vlastností této posloupnosti – od výskytu prvočísel přes čtvercová či trojúhelníková čísla až k různým formám jejich vyjádření, viz např. [1, 5, 6].

Navzdory tomu, že Leonardův model je poněkud naivní, má příroda překvapivě právě tato čísla velmi ráda. Kdybychom se podívali do včelího úlu a začali sestavovat rodokmen nějakého trubce (třeba Vilíka), tak v něm přesně tuto posloupnost objevíme, neboť včely se rozmnožují tzv. partenogeneticky (neboli pannobřezostí), což znamená, že sameček se narodí z neoplozeného vajíčka (tj. má jen jednoho rodiče), zatímco samička z oplozeného vajíčka (tj. má dva rodiče). Vilík má proto 1 rodiče (jenom matku, protože se narodil z neoplozeného vajíčka), 2 prarodiče (jeho matka se narodila z oplozeného vajíčka, takže ona má dva rodiče), 3 praprarodiče atd. Stejná situace nastane, budeme-li mapovat své předky pouze na linii chromozomu X, muži totiž dědí chromozom X pouze od matky, zatímco ženy od obou rodičů. Také když začneme počítat okvětní lístky u různých druhů květin nebo spirály na borovicových šiškách či v semeníku slunečnice, tak je celkem jisté, že jejich počet bude odpovídat právě některému z Fibonacciho čísel.

Existují ale také čísla, která jsou zajímavá, protože mohou být velmi užitečná. Do této kategorie patří zejména prvočísla (přirozená čísla dělitelná pouze 1 a sama sebou) – obzvláště ta velká, která hrají velmi důležitou roli v kryptografii. Čím větší máte prvočíslo, tím bezpečnější šifru dokážete udělat. Francouzský kněz Marin Mersenne, který působil v první polovině 17. století jako „hub“ pro distribuci vědeckých informací správným směrem, zveřejnil v roce 1644 domněnku ohledně prvočíselnosti (Mersennových) čísel ve tvaru $2^n - 1$ pro některá prvočíselná n. Sice se ukázalo, že některé Mersennovy výsledky byly chybné, ale i tak jsou jeho myšlenky výborným základem pro hledání gigantických prvočísel. Momentálně (na konci roku 2023) největší známé prvočíslo je právě toho tvaru, má 24 862 048 cifer a odpovídá hodnotě $n = 82\,589\,933$. Toto prvočíslo bylo nalezeno v prosinci roku 2018. Kdybychom toto číslo chtěli napsat s ciframi o velikosti 1 cm, potřebovali bychom k tomu pás papíru dlouhý 248 km. Ten bychom bez problémů dokázali natáhnout z Brna do Vídně a zpět. K čemu jsou taková prvočísla dobrá? Zatím k ničemu, ale v budoucnu se jistě mohou hodit při zajišťování naší bezpečnosti.

Avšak Mendel (podobně jako Leonardo Pisánský o Fibonacciho číslech) ukázal, že i Mersennova čísla má příroda velmi ráda, když se zaměřil na sledování dědičných znaků při pěstování hrachu. Mendel ve své práci z roku 1866 popisuje výsledky křížení mezi druhy hrachu lišícími se v jednom znaku. Ve svých pokusech sledoval například tvar semen (kulatý/svraštělý), zbarvení dělohy (žluté/zelené) nebo barvu květu (bílá/růžová). V první generaci získal Mendel potomstvo, které bylo ve vzhledu jednotné a vykazovalo vždy znak jedné z rodičovských rostlin. Samosprašností[1)] těchto hybridů dospěl Mendel k závěrům, ze kterých získal

[1)] Samosprašností se rozumí proces pohlavního rozmnožování, při kterém se vajíčko oplozuje pylem ze stejné rostliny. Tedy, oba rodiče jsou jednou a touž rostlinou. Tato forma rozmnožování je často pozorována u rostlin s květy, které mají schopnost samoopylení, nebo u nichž je opylování uskutečňováno přímo v rámci jednoho květu.

poměr 2 : 1 : 1 mezi segregačně dominantními (tj. hybridními), čistě dominantními a recesivními znaky.

Podle Mendela: *proporce, ve kterých se potomci hybridů vyvíjejí a rozdělují v první a druhé generaci, pravděpodobně platí pro všechny další potomky.* Pro ujištění ještě provedl experimenty pro čtyři, pět a šest generací. Vždy se stejným výsledkem, mezi potomky kterýchkoli dvou hybridů jsou polovina opět hybridi, čtvrtina jsou jedinci nesoucí dominantní znak a čtvrtina jedinci vykazující recesivní znak. To jej přivedlo k formulaci matematického zákona, ze kterého se stal základní kámen jeho teorie: *Jestliže* $\mathbf{A}$ *označuje dominantní rys,* $\mathbf{a}$ *recesivní a* $\mathbf{Aa}$ *hybridní formu, ve které jsou oba spojeny, pak výraz* $\mathbf{A} + 2\,\mathbf{Aa} + \mathbf{a}$ *popisuje vývojovou řadu pro potomstvo hybridních rostlin v páru rozdílných znaků.* A pokračuje: *Lze ukázat, že počty hybridů pocházejících z jednoho opylení*[2] *oproti počtu nových nezměněných forem*[3] *a jejich potomstva z generace na generaci výrazně zaostávají, a přece nemohou nikdy zcela vymizet.* Viz [7].

Pro ilustraci posledního závěru využívá Mendel nalezený zákon pro hybridní segregaci k odvození matematického modelu, který popisuje obecný vývoj hybridních generací. Začíná s první generací potomků hybridů, ve které je průměrně jeden dominantní typ ($\mathbf{A}$), dva hybridní ($\mathbf{Aa}$) a jeden recesivní typ ($\mathbf{a}$). Pro konstrukci svého modelu Mendel nyní předpokládá, že

(i) každý z těchto typů je stejně plodný,

(ii) každý je samosprašný,

(iii) hybridy stále vykazují segregační poměr 2 : 1 : 1 neboli zapsáno v moderním pojetí $(\mathbf{A} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{A} + \mathbf{a}) = \mathbf{AA} + 2\mathbf{Aa} + \mathbf{aa}$,

(iv) každá rostlina produkuje přesně 4 nové rostliny.

Za těchto předpokladů v následující generaci z každého z typů $\mathbf{A}$ a $\mathbf{a}$ získáme přesně čtyři nové téhož typu (tj. $4\times$ $\mathbf{A}$ a $4\times$ $\mathbf{a}$), zatímco každý ze dvou hybridů by se opět rozdělil a získali bychom z něj $1\times$ $\mathbf{A}$, $2\times$ $\mathbf{Aa}$ a $1\times$ $\mathbf{a}$. Proto v následující generaci budeme mít $6\times$ $\mathbf{A}$ ($4\times$ z $\mathbf{A}$ a $2\times$ z hybridů), $4\times$ $\mathbf{Aa}$ a $6\times$ $\mathbf{a}$, tj. nyní máme poměr 6 : 4 : 6 neboli 3 : 2 : 3. Mendel to až takto dopodrobna nerozebírá. Místo toho nabízí čtenářům

[2] Ve svých pokusech dále provádí Mendel již pouze samosprašnost.

[3] Tím Mendel míní jedince nesoucí pouze recesivní nebo pouze dominantní znaky, ne rostlinné hybridy.

tabulku se souhrnnými výsledky s počty jednotlivých typů v několika generacích.

generace	**A**	**Aa**	**a**	poměr **A** : **Aa** : **a**
1	1	2	1	1 : 2 : 1
2	6	4	6	3 : 2 : 3
3	28	8	28	7 : 2 : 7
4	120	16	120	15 : 2 : 15
5	496	32	496	31 : 2 : 31
n	$2^{n-1}\cdot(2^n-1)$	2^n	$2^{n-1}\cdot(2^n-1)$	$2^n-1:2:2^n-1$

Čísla v prvním a druhém řádku jsme si před chvílí podrobně odvodili. Hodnoty v dalších řádcích získáme podobným způsobem, tj. označíme-li jako $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{Aa}_n$ a $\mathbf{a}_n$ počty jednotlivých typů v n-té generaci, pak pro následující generaci (v pořadí $n+1$) platí

$$\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{Aa}_n + 4\,\mathbf{A}_n, \qquad \mathbf{Aa}_{n+1} = 2\,\mathbf{Aa}_n, \qquad \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{Aa}_n + 4\,\mathbf{a}_n,$$

odkud lze odvodit hodnoty v posledním řádku předchozí tabulky, tj. celkový počet rostlin v n-té generaci je 4^n a z toho je 2^n hybridů, takže polovina ze zbývajících rostlin má dominantní znak a druhá polovina recesivní znak, neboli

$$\mathbf{A}_n = (4^n - 2^n)/2, \qquad \mathbf{Aa}_n = 2^n, \qquad \mathbf{a}_n = (4^n - 2^n)/2.$$

Mendel zakončuje tuto část slovy: *Např. v desáté generaci jich bude $2^n - 1 = 1023$. Proto z celkových 2 048 rostlin v této generaci je 1 023 s dominantním znakem, 1 023 s recesivním znakem a pouze 2 hybridní.* Ve skutečnosti to nejsou celková čísla – jde pouze o vyjádření jednotlivých poměrů. V 10. generaci totiž budeme mít $\mathbf{A}_{10} = 523\,776$, $\mathbf{Aa}_{10} = 1\,024$ a $\mathbf{a}_{10} = 523\,776$, viz také [10].

Mendelovy výsledky zůstaly opomíjeny až do roku 1900, kdy byly „znovuobjeveny“ de Vriesem, Corrensem a Tschermakem. Je však těžké zpětně zjistit, jak přesně Mendel k těmto číslům dospěl. Možných cest je několik, ale je téměř jisté, že to nebyl jen odhad na základě počtů v několika prvních generacích, nýbrž že vzhledem ke svým matematickým dovednostem si k tomu sepsal i jakýsi matematický důkaz. Každopádně podle Gliboffa hlavním bodem Mendelova článku bylo objasnit *matematický zákon evoluce* a předchozí úvahy byly zlatým hřebem celého článku, viz [3].

Nicméně se příroda ne vždy zcela přesně řídí matematickými zákony, takže Mendelovi rozhodně ne vždy v jeho experimentech s pěstováním hrachu vycházely přesně tyto hodnoty. Navíc statistika je mocná čarodějka, a tak se v roce 1936 rozhořel ex post spor mezi Mendelem (zemřel 1884) a uznávaným britským statistikem a biologem Fisherem, viz [2]. Ten totiž považoval Mendelovy výsledky za příliš dobré, jelikož se mu podařilo spočítat, že pravděpodobnost takového výsledku je pouze 0,007 % (tj. v sedmi případech ze 100 000). To jej přivedlo k závěru, že Mendel (nebo spíše nějaký jeho asistent) výsledky experimentů upravoval tak, aby mu vycházely požadované hodnoty. Mendel skutečně výsledky některých experimentů opomíjel s tím, že výsledné hodnoty byly až příliš vychýlené od ostatních – nikdy to však nepopíral a také tyto situace ve svém článku popsal. Navíc si musíme uvědomit, že moderní, dnes již zavedené statistické postupy při zpracování dat nebyly v Mendelově době známy.

Fisherův hlavní argument se opíral o to, že při určování počtů **A** a **Aa** existuje cca 5,63% pravděpodobnost chyby v jejich identifikaci, a tak by naměřený poměr mezi těmito skupinami v první generaci měl být cca 1,7 : 1 (**Aa** : **A**) místo 2 : 1, jak to Mendelovi v experimentech vychází (v souladu s matematickým modelem). Kde je pravda? To je složité. Například: Při trochu bližší analýze bychom mohli zjistit, že onen naměřený poměr je dán vztahem

$$\mathbf{Aa} : \mathbf{A} = \frac{\frac{2}{3}\left(1 - (\frac{3}{4})^i\right)}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^i},$$

kde i je počet rostlin v nulté generaci. Odtud pro $i = 20$ dostaneme poměr $1,98109 : 1$, pro $i = 30$ máme 1,99893 : 1, pro $i = 40$ pak 1,99994 : 1 a s rostoucím i se stále blíže a blíže dostáváme k hodnotě 2 : 1. Avšak Mendel prováděl experimenty pouze pro $i = 10$, což vede k Fischerem očekávanému poměru 1,69632 : 1. K tomuto tématu byly sepsány desítky článků a všelijakých analýz. Avšak ne vždy vedly správným směrem. Např. v [8, 9] bylo uvedeno, že tento naměřený poměr je spíše roven

$$\mathbf{Aa} : \mathbf{A} = \frac{\sum_{i=1}^{10} \binom{10}{i} v^i (1-v)^{10-i} \frac{2}{3}\left(1 - (\frac{3}{4})^i\right)}{v^{10}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times (\frac{3}{4})^{10}\right)},$$

kde v je pravděpodobnost, že z uvažovaného semínka vyroste rostlina, kterou lze klasifikovat. Pro hodnoty v velmi blízké 1 dostaneme Fischerův očekávaný poměr (např. pro $v = 0{,}999$ budeme mít 1,71304 : 1). Ovšem jaká je skutečná hodnota v? Žádná oficiální hodnota asi neexistuje, ale Novitski z Mendelových pokusů dovozuje $v = 0{,}98$ (k selhání prý došlo u 11 semen z 556), což vede k poměru 2,06758 : 1. Jenže v Mendelově článku [7] je možné najít ještě i další možné hodnoty (11 z 315; 5 ze 101; 6 ze 108; 2 ze 32), což vede k hodnotám v jako 0,964; 0,951; 0,944; 0,938 s odpovídajícími poměry 2,4291 : 1; 2,7741 : 1; 2,9819 : 1; 3,1734 : 1. To ukazuje, že uvedený vzorec asi nebude tím správným, viz také [4].

I přes zpochybnění některých Mendelových postupů byl Mendel inspirací pro generace vědců, které po něm následovaly. Ačkoli nedisponoval nástroji, jako jsou počítač nebo kalkulačka, a musel si vystačit s tužkou, papírem a předchůdci dnešních kalkulaček, kterými byla logaritmická pravítka a arithmometry, dokázal systematicky nasbírat a zpracovat obrovské množství dat. Stal se průkopníkem v oblasti statistiky a analýzy dat, matematické disciplíny, která je jedním ze základních kamenů veškeré moderní vědy.

V dnešní době vědecká komunita po celém světě stále čerpá z Mendelových poznatků. Posun v pochopení genetiky nás dovedl k možnostem, které dnes nabízí syntetická biologie a bioinženýrství. Obě vědní disciplíny přispěly k levné, rychlé a masové výrobě mRNA vakcíny proti SARS-CoV-2, která nám pomohla v efektivnějším boji s nedávnou globální pandemií. mRNA vakcíny vznikly i díky tzv. metodě CRISPR, která umožňuje také vznik nových genových terapií pro dříve nevyléčitelné choroby.

Matematika se stala součástí dnešní biologie a biochemie, vysvětluje složitost nerovnovážných stavů uvnitř buněk, existenci kvazirovnováh, jejich bistabilitu nebo vznikající cykly, může tak popsat biochemické přepínače i cirkadiánní rytmy. Matematika dokáže pracovat s kódováním, tedy i DNA, dokáže simulovat skutečné proteiny, enzymy i jejich chemické reakce, umožňuje vytvářet nové struktury, a dokonce navrhovat jejich vlastnosti s pomocí dalších chytrých nástrojů, jako je umělá inteligence (která také stojí na matematice, především na lineární algebře a optimalizaci). Tak jako stála matematika u zrodu nových řešení a technologií ve fyzice a inženýrství během technologické revoluce v minulých dvou stoletích, stala se matematika stejně významnou pro biochemii v 21. století.

Poděkování

Autoři by rádi na tomto místě poděkovali recenzentovi za velmi podrobné a pečlivé pročtení prvotní verze a nemalé množství návrhů, které přispěly ke zlepšení (nejenom) srozumitelnosti našeho pojednání.

Literatura

[1] Alzer, H., Luca, F.: An inequality for Fibonacci numbers. *Mathematica Bohemica*, roč. 147 (2022), č. 4, s. 587–590.

[2] Fisher, R. A.: Has Mendel's work been rediscovered?. *Annals of Science*, roč. 1 (1936), č. 2, s. 115–137.

[3] Gliboff, S.: Gregor Mendel and the Laws of Evolution. *History of Science*, roč. 37 (1999), č. 2, s. 217–235.

[4] Hartl, D. L., Fairbanks, D. J.: Mud sticks: on the alleged falsification of Mendel's data. *Genetics*, roč. 175 (2007), s. 975–979.

[5] Jarošová, M.: Fibonacci a jeho čísla. *Učitel matematiky*, roč. 16 (2008), č. 2, s. 94–100.

[6] Křížek, M., Luca, F., Somer, L.: Aritmetické vlastnosti Fibonacciových čísel. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 50 (2005), č. 2, s. 127–140.

[7] Mendel, J. G.: Versuche über Pflanzen-Hybriden. *Verhandlungen des Naturforschenden Vereines in Brünn*, roč. 4 (1866), s. 3–47.

[8] Novitski, E.: On Fisher's criticism of Mendel's results with the garden pea. *Genetics*, roč. 166 (2004), č. 3, s. 1133–1136.

[9] Novitski, E.: Revision of Fisher's analysis of Mendel's garden pea experiments. *Genetics*, roč. 166 (2004), č. 3, s. 1139–1140.

[10] Teicher, A.: Mendel's use of mathematical modelling: ratios, predictions and the appeal to tradition. *History and Philosophy of the Life Sciences*, roč. 36 (2014), s. 187–208.