

David Hubač

Permutace s předepsanými délkami cyklů

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 69 (2024), No. 2, 75–96

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152475>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*  
<http://dml.cz>

# Permutace s předepsanými délkami cyklů

David Hubač

*Abstrakt.* Článek se zabývá zkoumáním a počítáním permutací, jejichž cykly mají předepsané délky. V první části představíme třídu permutací složených pouze z jednocyklů a dvojcyklů a ukážeme některé související úlohy. Druhá část je věnována dalším třídám permutací a postupům, jak zjistit jejich počty. Vedle kombinatorického přístupu využíváme též analytický přístup pracující s exponenciálními generujícími funkcemi.

## 1. Úvod

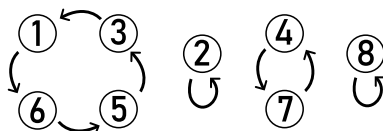
V následujících odstavcích nejprve připomeneme pojem *cyklus* ve vztahu k permutacím. Pak již budeme moci nastínit, čím se zabývá tento článek.

Mějme  $n$ -prvkovou množinu  $X$ . Pokud její prvky znázorníme jako různé body v rovině, pak jakékoliv zobrazení na množině  $X$  je možné popsat  $n$  šípkami mezi těmito body tak, že z každého bodu bude vést šipka k jeho obrazu. *Permutace* jsou bijektivní zobrazení na  $X$ , a tedy pro ně platí, že do každého bodu vede právě jedna šipka.

Znázorníme vše na příkladu. Mějme množinu čísel 1 až 8 a na ní permutaci zadanou následující tabulkou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 1 & 7 & 3 & 5 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Schéma s body a šípkami pak bude vypadat následujícím způsobem:



Díky tomu, že do každého i z každého bodu vede právě jedna šipka, lze ve schématu rozlišit takzvané *cykly*. V našem případě jsou čtyři: dva cykly délky 1, jeden délky 2 a jeden délky 4, či jinak řečeno dva *jednocykly*, jeden *dvojcyklus* a jeden *čtyřcyklus*.

Obecně platí, že schéma každé permutace bude tvořeno jedním či více cykly. Dává tedy smysl zavést alternativní zápis permutací právě pomocí cyklů. Abychom nemuseli kreslit podobná schémata, zavedeme pohodlnější „vektorový“ zápis cyklů. Ten může vypadat třeba takto:

$$(1, 6, 5, 3)(2)(4, 7)(8).$$

Jedny závorky představují jeden cyklus, každý prvek v závorkách je obrazem svého předchůdce a má za obraz svého následníka (poslední prvek má za následníka první prvek a naopak). Tento zápis není jednoznačný, nezáleží totiž na tom, který prvek

---

DAVID HUBAČ, č. p. 31, 398 21 Kestřany, e-mail: david.hubac@seznam.cz

napíšeme do závorek na prvú pozíciu, ani na poradí cyklů. Tedy i následující zápis popisuje stejné cykly a stejnou permutaci:

$$(8)(2)(7, 4)(5, 3, 1, 6).$$

V článku tuto nejednoznačnost několikrát obejdeme tím, že pro zápis určíme přísnější kritéria. Obecně nám to však nevadí – především nás totiž budou u permutací zajímat délky cyklů, které zůstávají neměnné.

Vztah mezi permutacemi a cykly budeme popisovat slovními spojeními „permutaci lze rozložit na cykly“, „permutace je tvořena cykly“, „permutace je složena z cyklů“, „permutace sestává z cyklů“ a podobně. Formálně se přitom vždy jedná o *nezávislé* cykly – to znamená, že žádný prvek se nevyskytuje ve více cyklech současně.

Protože každou permutaci lze zapsat pomocí cyklů a každá množina nezávislých cyklů popisuje nějakou permutaci, dává smysl zkoumat permutace podle vlastností příslušných cyklů. A to je hlavním cílem tohoto článku.

Nejprve představíme třídu permutací sestávajících pouze z jednocyklů a dvoj cyklů, a to rovnou třemi ekvivalentními pohledy. Jeden pohled nabízí úlohu, ve které je úkolem zjistit, kolika způsoby si může  $n$  domácností mezi sebou telefonovat. Ukážeme kombinatorický postup k řešení této úlohy. Další pohled zkoumá *involutorní zobrazení*, tedy zobrazení, která jsou sama k sobě inverzní. A třetí pohled nabízí interpretaci v jazyce teorie grafů.

Následovně budeme řešit zdánlivě nesouvisející úlohu o věžích na šachovnici. Otázka zní, kolika způsoby lze rozmístit  $n$  věží na šachovnici  $n \times n$  tak, aby se vzájemně neohrožovaly; přitom však chceme považovat rozmístění lišící se jen otočením nebo osovou symetrií za totožná. V průběhu řešení narazíme na výše zmíněnou třídu permutací z předchozí kapitoly.

Zbytek článku je věnován dalším třídám permutací s předepsanými délkami cyklů. Čtenáři budou jistě známy permutace bez pevných bodů – na ty lze nahlížet jako na permutace, v jejichž rozkladu na nezávislé cykly se nenachází jednocykly. Další z úloh je počítání permutací, jejichž cykly mají pouze liché délky nebo pouze sudé délky.

Vedle kombinatorického postupu představíme zpravidla obecnější analytický postup, pracující s takzvanými exponenciálními generujícími funkcemi. Oba postupy porovnáme hned na několika úlohách.

## 2. Telefonní čísla

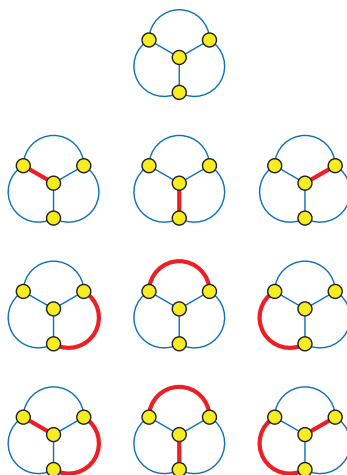
V této kapitole prozkoumáme zvláštní druh permutací, které se nazývají involutorní. Nejdříve se však podíváme na úlohu o takzvaných telefonních číslech. Vycházíme především z webových stránek [9] a [8].

**Úloha 1.** Mějme  $n$  (vzájemně rozlišitelných) domácností, v každé je jeden telefon. Jednoho telefonátu se účastní právě dvě různé domácnosti a každá domácnost může telefonovat v daný okamžik nejvýše jednou. Kolik existuje možností, jak mohou být domácnosti telefonicky vzájemně propojeny?

**Definice 2.** Řešení úlohy o telefonních číslech pro  $n$  domácností nazveme  *$n$ -tým telefonním číslem* a označíme je  $T_n$ .

Definujme ještě nulté telefonní číslo  $T_0 = 1$ , tedy pokud nemáme žádné domácnosti, není žádné telefonní spojení a to pokládáme za jednu validní možnost. Dalších několik čísel lze snadno odvodit:  $T_1 = 1$  (jediná možnost pro jednu domácnost je žádné spojení);  $T_2 = 2$  (domácnosti jsou nebo nejsou spojeny – dvě možnosti);  $T_3 = 4$  (buď žádné spojení, nebo vybereme ke spojení dvě domácnosti, což jsou tři možnosti).

Od  $T_4$  se ale situace začíná komplikovat. Můžeme si pomoci obrázkem a vidíme, že existuje deset možných schémat, tedy  $T_4 = 10$ .



Obr. 1. Schéma všech 10 možností propojení 4 domácností (převzato z Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/File:K4\\_matchings.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:K4_matchings.svg))

Pro vyšší čísla  $n$  je nasnadě využít kombinatorické postupy a hledat rekurentní a explicitní vzorec pro  $T_n$ . Než se ale dostaneme k vyřešení úlohy, pojďme se zamyslet nad jinými pohledy na telefonní čísla.

## 2.1. Spojení s teorií grafů

Představme si schéma jedné možnosti telefonního spojení mezi  $n$  domácnostmi. Všechny domácnosti jsou vzájemně propojeny a vybraná propojení ukazují, které domácnosti si právě telefonují. Jedná se vlastně o úplný graf s  $n$  vrcholy a se specifickým výběrem hran, kterému se říká *párování*.

**Definice 3.** Podmnožina hran v obecném grafu se nazývá *párování*, jestliže žádné dvě hrany této množiny nemají společný vrchol.

Zde vidíme ekvivalenci mezi úlohou o telefonních číslech a hledáním počtu párování na úplném grafu o  $n$  vrcholech. Každé párování lze převést na validní výběr telefonátů mezi domácnostmi (z žádného vrcholu nevedou dvě vybrané hrany – žádná domácnost netelefonuje dvakrát najednou) a zároveň každá možnost telefonického spojení je párováním grafu. Graf musí být úplný (tj. obsahující všechny hrany), aby libovolné spojení mezi domácnostmi mohlo být zahrnuto ve výběru hran v grafu.

Problém párování se zkoumá též u neúplných grafů (tedy některé hrany nelze vybrat), známý je například problém hledání největšího párování v bipartitních grafech.

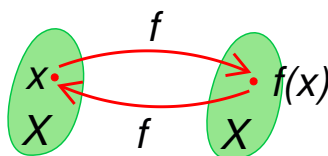
## 2.2. Involutorní zobrazení

Schémata telefonních spojení s  $n$  domácnostmi také odpovídají permutacím  $n$ -prvkové množiny. Domácnosti, které ve schématu netelefonují, se v permutaci zobrazují samy na sebe – tvoří jednocykly, a dvojice domácností navzájem si telefonujících se zobrazují jedna na druhou – tvoří transpozici, dvojcyklus. Tedy libovolné schéma lze převést na permutaci tvořenou pouze jednocykly a dvojcykly. Uvědomme si navíc, že každá domácnost je součástí právě jednoho cyklu, tedy cykly tvoří nezávislý rozklad permutace.

Za použití stejné logiky platí i druhá implikace: máme-li permutaci rozloženou na nezávislé jednocykly a dvojcykly, pak z ní lze zpětně zjistit, které domácnosti spolu telefonují.

Tato třída permutací má charakteristickou vlastnost.

**Definice 4.** Zobrazení se nazývá *involutorní*, pokud je samo sobě inverzí.



Obr. 2. Názorné schéma involutorního zobrazení (převzato z Wikipedia, <https://en.wikipedia.org/wiki/File:Involution.svg>)

Triviálním případem involutorního zobrazení je identita na libovolné množině. V geometrii jsou známými involutorními zobrazeními středová a osová souměrnost či kruhová inverze.

**Věta 5.** Množina všech permutací na  $n$ -prvkové množině  $X$  sestávajících pouze z jednocyklů a dvojcyklů tvoří množinu všech involutorních zobrazení na  $X$ .

*Důkaz.* Být involutorním zobrazením znamená, že složení dvou takových zobrazení utvoří identitu. Právě toto platí pro naši třídu permutací: zpermutování  $n$ -prvkové množiny dvakrát po sobě permutací složenou pouze z jednocyklů a dvojcyklů prvky v jednocyklu nepřesune a prvky v dvojcyklu přesune tam a zase zpátky. Tedy třída permutací tvoří podmnožinu involutorních zobrazení na dané množině.

Zároveň žádné involutorní zobrazení v této podmnožině nechybí. Aby pro zobrazení vůbec existovala inverze, musí se jednat o bijekci – a bijekce na konečné množině je dle definice permutace. Žádná permutace sestávající z alespoň jednoho nezávislého cyklu délky větší než dva není involutorní, protože na prvky z tohoto cyklu by se zobrazení muselo aplikovat alespoň tolikrát, jaká je délka cyklu. Teprve pak by se všechny prvky tohoto cyklu dostaly zpátky do výchozí pozice.  $\square$

Věta tedy říká, že právě tato třída permutací je involutorní a žádné jiné permutace tuto vlastnost nemají. Můžeme tedy používat termín *involutorní permutace*.

### 2.3. Rekurentní rovnice a explicitní vzorec

Pojďme tedy vyřešit úlohu o telefonních číslech, nejdříve pomocí rekurze. Ve schématu s  $n$  domácnostmi mohou nastat dvě situace: buď  $n$ -tá domácnost netelefonuje, nebo telefonuje s jinou domácností. V první situaci je počet možností roven  $(n-1)$ -nímu telefonnímu číslu. Ve druhé situaci má domácnost na výběr z  $n-1$  možností, s kým si telefonovat, a pro zbylých  $n-2$  domácností již víme, že je lze spojit  $T_{n-2}$  způsoby. Pro  $n \geq 2$  tedy dostáváme rekurentní vzorec

$$T_n = T_{n-1} + (n-1) \cdot T_{n-2}. \quad (1)$$

Úloha je tím vyřešena a můžeme sestavit tabulku hodnot prvních několika telefonních čísel.

| $n$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7   | 8   | 9     | 10    |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-------|-------|
| $T_n$ | 1 | 1 | 2 | 4 | 10 | 26 | 76 | 232 | 764 | 2 620 | 9 496 |

Pro výpočet telefonních čísel se může hodit též explicitní vzorec

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{2^k k!}. \quad (2)$$

Význam proměnné  $k$  je počet telefonátů, kterých může být 0 až  $\lfloor n/2 \rfloor$ . Kombinační číslo značí výběr  $2k$  domácností, které budou telefonovat, a následující zlomek udává počet možností, jak je mezi sebou spárovat. Člen  $(2k)!$  pomyslně seřadí všechny telefonující domácnosti a spáruje první s druhou, třetí se čtvrtou atd. Tím ale vzniknou duplicity. Nezáleží na pořadí párů ani na pořadí domácností v daném páru, tedy vydělíme sčítanec čísla  $k!$  (pro pořadí párů) a  $2^k$  (pro pořadí domácností v párech).

Zavedme ještě následující označení.

**Definice 6.** Mějme číslo  $k \in \mathbb{N}$ , pak *dvojitě faktoriály* čísel  $2k$  a  $2k-1$  definujeme po řadě následovně:

$$\begin{aligned} (2k)!! &:= (2k) \cdot (2k-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2 = 2^k k!, \\ (2k-1)!! &:= (2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = \frac{(2k)!}{2^k k!}. \end{aligned}$$

Dále definujeme  $(-1)!! := 1$  a  $0!! := 1$ .

Dodatečná definice pro čísla 0 a  $-1$  bude užitečná zde i v pozdějších částech. Definice je konzistentní s tím, že dosazením 0 za  $k$  do výrazů  $2^k k!$  a  $\frac{(2k)!}{2^k k!}$  skutečně získáme číslo 1.

Se zavedením dvojitěho faktoriálu lze zapsat vzorec (2) v kompaktnější podobě:

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!!.$$

### 3. Rozmístování věží

Nyní představíme další aplikaci telefonních čísel, a sice na jedné z úloh o šachových figurách. Tyto úlohy obecně zkoumají, jak lze rozmístit dané šachové figurky na šachovnici tak, aby se navzájem neohrožovaly; případně může být cílem spočítat, kolik takových možností existuje.

My se budeme zabývat věžemi, které se pohybují vertikálně a horizontálně o libovolný počet polí. Dvě věže se tedy navzájem ohrožují, pokud sdílí stejný řádek nebo stejný sloupec. Začneme nejdřív zjednodušenou variantou úlohy.

**Úloha 7.** Kolik existuje různých rozmístění  $n$  neohrožujících se věží na šachovnici  $n \times n$ ?

Stačí si uvědomit, že v žádném řádku (ani sloupci) nemůžou být dvě a více věží, tedy musíme do každého řádku umístit právě jednu věž. Pro nalezení jednoho řešení vlastně hledáme zobrazení, které věži z  $i$ -tého řádku přiřadí číslo sloupce od 1 do  $n$  takové, že není přiřazeno jiné věži (věž na  $i$ -tém řádku bude ve vybraném sloupci sama). Úloha vyžaduje spočítat všechny bijekce na  $n$ -prvkové množině, tedy všechny permutace. Těch je  $n!$ , a to je i řešení úlohy.

Následující věžovou úlohu vyřešíme tak, jak je popsáno ve článku [4]. Budeme k tomu potřebovat tzv. Burnsideovo lemma, jež je zformulováno a dokázáno například v knize [7].

**Úloha 8.** Kolik existuje různých rozmístění  $n$  neohrožujících se věží na šachovnici  $n \times n$ , pokud rozmístění lišící se otočením či zrcadlovým převrácením považujeme za totožná?

Takových rozmístění bude samozřejmě méně než v úloze 7, protože některá budeme považovat za ekvivalentní. Tato ekvivalence je definována rotací (o 90, 180 a 270 stupňů), zrcadlovým převrácením (neboli osovou souměrností; vertikální i horizontální) a všemi zobrazeními z nich složenými.

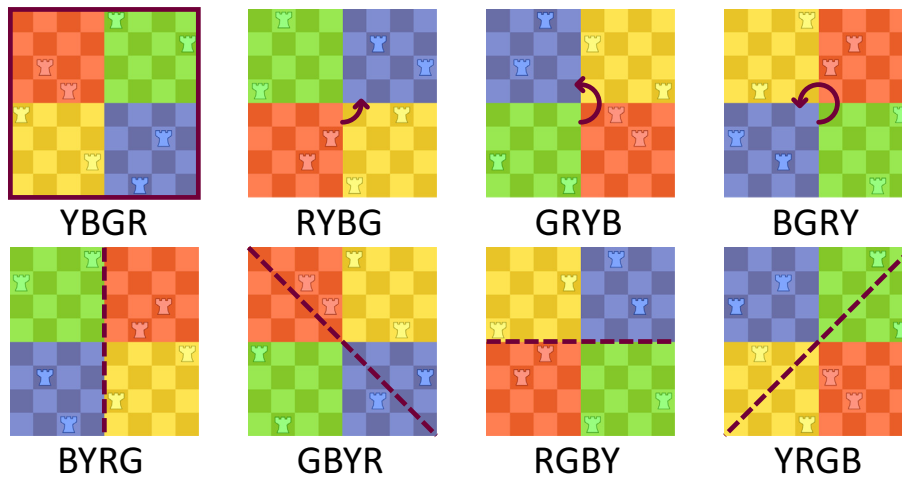
Začneme nalezením množiny všech relevantních zobrazení. Nechť  $x$  značí rotaci o 90 stupňů proti směru pohybu hodinových ručiček a nechť  $y$  značí vertikální zrcadlové převrácení. Tato dvě zobrazení budeme skládat a utvářet nová.

Skládáme-li pouze rotace, získáme  $x^2$  a  $x^3$ , což jsou rotace o 180 resp. 270 stupňů. Zobrazení  $x^4$  není nic jiného než identita  $Id$ . Pokud nejprve šachovnici převrátíme (použijeme  $y$ ) a poté otočíme, získáme další tři zobrazení  $xy$ ,  $x^2y$ ,  $x^3y$ .

Zkusme všech 8 zobrazení znázornit na jednom rozmístění věží. Šachovnice je pro názornost obarvena od levého dolního rohu proti směru hodinových ručiček barvami žlutá (Yellow), modrá (Blue), zelená (Green) a červená (Red) – přiřadíme jí zkratku  $YBGR$ . Obrazy pak budou mít jiné zkratky podle změněného pořadí těchto barev.

$$\begin{array}{ll} Id: & YBGR \mapsto YBGR \\ x: & YBGR \mapsto RYBG \\ x^2: & YBGR \mapsto GRYB \\ x^3: & YBGR \mapsto BGRY \end{array} \quad \begin{array}{ll} y: & YBGR \mapsto BYRG \\ xy: & YBGR \mapsto GBYR \\ x^2y: & YBGR \mapsto RGBY \\ x^3y: & YBGR \mapsto YRGB \end{array}$$

Při prozkoumání obrázku 3 si všimněme, že celý druhý řádek (odpovídající zobrazením  $y$ ,  $xy$ ,  $x^2y$  a  $x^3y$ ) lze získat pomocí osových souměrností. Zobrazení  $y$  a  $x^2y$  jsou



Obr. 3. Barevné zkratky v obrazech šachovnice

vertikální a horizontální převrácení, zatímco  $xy$  a  $x^3y$  jsou souměrnosti podle diagonál. Dále si všimněme, že rotace o 180 stupňů není nic jiného než středová souměrnost.

Celkem tedy máme 8 zobrazení: identitu, tři rotace, dvě převrácení a dvě diagonální souměrnosti. Získali jsme ale všechna navzájem ekvivalentní rozmístění věží? Více obrazů barevné šachovnice neexistuje, protože jsou 4 možnosti, jak obarvit levý dolní roh, a další 2 možnosti, jakým směrem budou další barvy postupovat, celkem tedy 8.

Množinu všech rozmístění věží označíme  $X$  a nalezenou množinu zobrazení na  $X$  označíme  $G = \{Id, x, x^2, x^3, y, xy, x^2y, x^3y\}$ .  $G$  je grupou, neboť je uzavřená na skládání, obsahuje  $Id$  a obsahuje inverze svých zobrazení. Z invertibility všech zobrazení vyplývá, že jsou bijektivní, tedy se jedná o permutace na množině  $X$  a  $G$  je podgrupa grupy všech permutací na  $X$ .

Dvě rozmístění věží  $x, y \in X$  považujeme za ekvivalentní, pokud existuje zobrazení  $\pi \in G$  takové, že  $y = \pi(x)$ . Tato relace je skutečně ekvivalencí a třídy této ekvivalence (což jsou podmnožiny  $X$ ) se nazývají *orbity*. Naším úkolem je zjistit počet těchto orbit, který označíme  $|\mathcal{O}|$ .

Burnsideovo lemma umožňuje určit počet orbit, pokud pro každé zobrazení  $\pi \in G$  zjistíme počet rozmístění věží, která jsou invariantní vůči  $\pi$ . Počet orbit pak získáme jako aritmetický průměr těchto hodnot.

Počet rozmístění neměnných vůči identitě je samozřejmě počet všech rozmístění, tedy  $n!$ . Počet rozmístění neměnných vůči středové souměrnosti  $x^2$  označme  $f(n)$ . Dále se budou výsledky opakovat: počet neměnných rozmístění vůči dvojici  $x$  a  $x^3$  (rotace o 90 stupňů) označíme  $g(n)$ , vůči  $xy$  a  $x^3y$  (diagonální souměrnosti) označíme  $h(n)$  a vůči  $y$  a  $x^2y$  (převrácení) označíme  $i(n)$ .

Podle Burnsideova lemmatu je pak počet orbit roven součtu všech těchto čísel dělený počtem zobrazení z  $G$ , tedy

$$|\mathcal{O}| = \frac{n! + f(n) + 2g(n) + 2h(n) + 2i(n)}{8}.$$



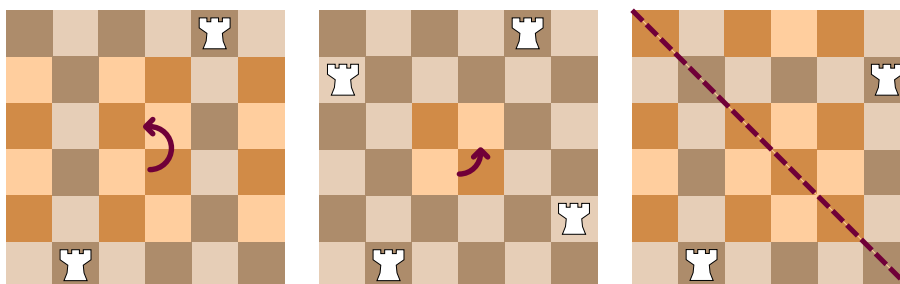
Nejprve spočítejme  $f(n)$  – počet rozmístění na šachovnici  $n \times n$ , jež jsou středově souměrná (neměnná vůči středové souměrnosti). Uvažujme nejdříve  $n$  sudé, tj. ve tvaru  $n = 2k$ .

Triviálně platí  $f(2) = 2$ . Dále mějme prázdnou šachovnici  $2k \times 2k$ . Protože každému řádku náleží právě jedna věž, můžeme první věž umístit na  $i$ -tou pozici zleva do posledního řádku a poté středově souměrně věž na  $i$ -tou pozici zprava do prvního řádku. Toto lze provést  $2k$  způsoby a pro všechny platí, že věže se navzájem nebudou ohrožovat (nemáme prostřední sloupec).

Položením těchto věží jsme zabrali dva středově souměrné řádky a dva středově souměrné sloupce, které si můžeme ze šachovnice odmyslet, a zbyde nám šachovnice  $(2k - 2) \times (2k - 2)$  s tímž středem – viz obrázek 4 vlevo. Počet možností, jak na tomto zbytku rozmístit  $2k - 2$  neohrožujících se věží, je  $f(2k - 2)$ . Získali jsme tak rekurentní vzorec  $f(2k) = 2k f(2k - 2)$ . Protože  $f(2) = 2$ , pak  $f(4) = 4 \cdot 2$ ,  $f(6) = 6 \cdot 4 \cdot 2$  a obecně  $f(2k) = 2k \cdot (2k - 2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2$ , neboli

$$f(2k) = 2^k k! = (2k)!!.$$

Pro liché  $n = 2k + 1$  je na středově souměrném rozmístění pozice jedné věže pevně daná. Protože na šachovnici existuje prostřední řádek, pak věž v něm se musí nacházet v samotném středu šachovnice, jinak by se při zachování středové souměrnosti musely nacházet v tomto řádku dvě věže. Rozmístění zbylých věží pak provádíme na šachovnici  $2k \times 2k$ , tedy platí  $f(2k + 1) = f(2k)$ .



Obr. 4. Pokládání věže do posledního řádku při zachování souměrnosti v pořadí podle středu, „podle čtvrtin“ a podle diagonály

Nyní podobným způsobem vypočítejme  $g(n)$  – počet rozmístění, jež jsou neměnná vůči rotaci o 90 stupňů. Opět nejdřív budeme uvažovat sudé  $n = 2k$ .

První dvě hodnoty jsou  $g(2) = 0$ ,  $g(4) = 2$ . Mějme opět prázdnou šachovnici  $2k \times 2k$  a položme první věž někde do posledního řádku – řekněme, že na  $i$ -tou pozici zleva. Pro zachování souměrnosti pak musíme položit věž i do posledního sloupce na  $i$ -tou pozici zdola, do prvního řádku na  $i$ -tou pozici zprava a do prvního sloupce na  $i$ -tou pozici shora, jak je znázorněno na obrázku 4 uprostřed. Tyto věže se budou vzájemně ohrožovat právě tehdy, pokud se budou nacházet v rozích. Díky sudosti  $n$  nemůže dojít k tomu, že by se ohrožovaly protilehlé věže. Počet možností pro výběr pozice věže na posledním řádku je tedy  $2k - 2$  a rekurentní vzorec je  $g(2k) = (2k - 2)g(2k - 4)$ .

Pro  $n$  dělitelná 4 máme  $g(8) = 6 \cdot 2$  a obecně  $g(4k) = (4k - 2) \cdot (4k - 6) \cdot \dots \cdot 6 \cdot 2$ , odkud plyne

$$g(4k) = 2^k \cdot (2k - 1) \cdot (2k - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = 2^k(2k - 1)!!.$$

Pokud není sudé  $n$  dělitelné 4, pak  $n = 4k + 2$  a platí  $g(4k + 2) = 0$ . Pro lichá  $n$  stále platí, že v rozmístěních musí být věž uprostřed šachovnice (stále se totiž jedná o středově souměrná rozmístění), a tedy  $g(2k + 1) = g(2k)$ .

Další v pořadí je  $h(n)$  – počet rozmístění věží, jež jsou souměrná podle diagonály. První tři hodnoty jsou  $h(1) = 1$ ,  $h(2) = 2$ ,  $h(3) = 4$ . Představme si opět prázdnou šachovnici  $n \times n$  a pokládejme věž do  $n$ -tého řádku. Můžeme ji položit do rohu na diagonálu, pak na zbytek šachovnice lze rozmístit věže  $h(n - 1)$  způsoby. Pokud ji položíme na jedno ze zbylých  $n - 1$  polí, musíme pro zachování souměrnosti podle diagonály přidat příslušnou věž do  $n$ -tého sloupce, viz obrázek 4 vpravo. Tyto věže se nikdy ohrožovat nebudou. Po odmyšlení ohrožených polí zbývá pokrýt šachovnici  $(n - 2) \times (n - 2)$ , což je možné  $h(n - 2)$  způsoby. Získali jsme tedy rekurentní vzorec  $h(n) = h(n - 1) + (n - 1)h(n - 2)$ , který je společně s počátečními hodnotami totožný se vzorcem pro telefonní čísla z předchozí kapitoly, tedy platí

$$h(n) = T_n.$$

Nakonec  $i(n)$  jakožto počet rozmístění věží symetrických podle vertikální nebo horizontální osy je vždy roven nule, protože takové rozmístění pro  $n > 1$  vyžaduje dvojice věží ve stejném řádku či sloupci, čímž by se ohrožovaly.

Řešením celé úlohy pro  $n > 1$  je tedy číslo

$$|\mathcal{O}| = \frac{n! + f(n) + 2g(n) + 2T_n}{8},$$

kde

$$f(n) = \begin{cases} (2k)!! & \text{pro } n = 2k \text{ (sudé),} \\ (2k)!! & \text{pro } n = 2k + 1 \text{ (liché),} \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} 2^k(2k - 1)!! & \text{pro } n = 4k \text{ (dělitelné 4),} \\ 2^k(2k - 1)!! & \text{pro } n = 4k + 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Čtenáře jistě zajímá, jaký bude výsledek pro klasickou šachovnici  $8 \times 8$ . Konkrétní hodnoty pro nízká  $n$  jsou uvedena v následující tabulce.

| $n$                  | 2 | 3 | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             |
|----------------------|---|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $ \mathcal{O} $      | 1 | 2 | 7              | 23             | 115            | 694            | 5 282          | 46 066         | 456 454        |
| $n!$                 | 2 | 6 | 24             | 120            | 720            | 5 040          | 40 320         | 362 880        | 3 628 800      |
| $n! :  \mathcal{O} $ | 2 | 3 | $\approx 3,43$ | $\approx 5,22$ | $\approx 6,26$ | $\approx 7,26$ | $\approx 7,63$ | $\approx 7,88$ | $\approx 7,95$ |

Ve druhém řádku tabulky je výsledek této úlohy a ve třetím výsledek zjednodušené věžové úlohy 7, v obou případech pro  $n$  v rozsahu 2 až 10. Vidíme, že na

klasické šachovnici existuje celkem  $8! = 40\,320$  rozmístění a z nich lze vybrat nejvýše 5 282 reprezentantů takových, aby se vzájemně nelišili o rotaci ani o převrácení.

Ve čtvrtém řádku je vypočítán poměr předešlých dvou řádků, který říká, jak velké jsou v průměru třídy ekvivalence pro dané  $n$ . Z tabulky je patrné, že pro rostoucí  $n$  se tento poměr zdola blíží k číslu 8. Toto číslo jistě nebude překročeno, protože třídy ekvivalence mohou mít dle definice nejvýše 8 prvků. Dokonce lze snadno nahlédnout, že poměr bude konvergovat k 8, protože v čitateli řešení  $|\mathcal{O}|$  roste člen  $n!$  řádově rychleji než členy  $f(n)$ ,  $g(n)$  i  $T_n$ .

Při řešení věžové úlohy jsme tedy získali další pohled na telefonní čísla:  $n$ -té telefonní číslo odpovídá počtu rozmístění  $n$  navzájem se neohrožujících věží na šachovnici  $n \times n$ , která jsou souměrná podle diagonály.

#### 4. Permutace s cykly předeepsaných délek

V kapitole o telefonních číslech jsme uvažovali permutace složené pouze z nezávislých jednocyklů a dvojcyklů. Nyní nás budou zajímat permutace, které se skládají z cyklů jinak pevně zvolených délek. Opět se pokusíme zjistit jejich počet nad  $n$ -prvkovou množinou.

Množinu přípustných délek označme  $C \subset \mathbb{N}$ . Počet permutací  $n$ -prvkové množiny skládajících se z cyklů délek z  $C$  označme  $g_C(n)$ . V triviálním případě platí  $g_C(0) = 1$ . Víme, že pro involutorní permutace byla  $C = \{1, 2\}$ , a tedy  $g_{\{1,2\}}(n) = T_n$ .

Následující úlohy již nebudou mít podklad v reálném světě, jak to bylo s telefonními čísly. Jistou interpretaci tedy aspoň zmiňme zde:

*Kolika způsoby lze  $n$  osob rozesadit ke kulatým stolům? Chceme, aby počet osob u každého stolu byl z dané množiny  $C$ . Nezáleží na tom, kdo sedí u kterého stolu ani na jakém místě – záleží jen na tom, koho má po levé a pravé ruce.*

Zřejmě kulaté stoly představují cykly délek z množiny  $C$ . Takto tedy lze pohlížet na všechny následující úlohy.

##### 4.1. Kombinatorický postup

Nejdříve se pokusme řešit úlohy podobným postupem, který jsme použili i pro telefonní čísla. Cílem je získat rekurentní rovnici, případně explicitní vzorec vyjádřený sumou. Začneme úlohou velmi podobnou úloze 1 s telefonními čísly.

**Úloha 9.** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou, které sestávají pouze z nezávislých jednocyklů a trojcyklů?

V této úloze je  $C = \{1, 3\}$ , a tedy řešením pro  $n$  budeme rozumět číslo  $g_{\{1,3\}}(n)$ .

Jeden prvek ani dva prvky trojcyklus neutvoří, takže  $g_{\{1,3\}}(1) = 1$  a  $g_{\{1,3\}}(2) = 1$ . Ze tří prvků lze vytvořit dva trojcykly nebo trojici jednocyklů, takže  $g_{\{1,3\}}(3) = 3$ . Obecně platí, že  $n$ -tý prvek může být součástí trojcyklu, jenž vybereme  $(n-1)(n-2)$  způsoby (pomyslně vybíráme prvky na druhé a třetí místo v cyklu), nebo může tvořit jednocyklus. Pro  $n > 3$  tedy získáme rekurentní vzorec

$$g_{\{1,3\}}(n) = g_{\{1,3\}}(n-1) + (n-1)(n-2)g_{\{1,3\}}(n-3). \quad (3)$$

Všimněme si podobnosti s rekurentním vzorcem (1) pro telefonní čísla. I následující explicitní vzorec bude velmi podobný vzorci (2):

$$g_{\{1,3\}}(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{3k} \frac{(3k)!}{3^k k!}. \quad (4)$$

Proměnná  $k$  v této sumě značí počet trojic prvků tvořících cykly. Podobně jako u vzorce (2) pomyslně nejdříve vybereme všechny prvky účastníci se trojcyklu (kombinační číslo), ty seřadíme (čitatel zlomku), ale nezáleží vlastně na pořadí trojic v seřazení ( $k!$ ) ani na tom, který ze tří prvků je v cyklu uveden jako první ( $3^k$ ).

Uveďme tabulku hodnot  $g_{\{1,3\}}(n)$  pro nízká  $n$ :

| $n$              | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7   | 8     | 9     | 10     |
|------------------|---|---|---|---|---|----|----|-----|-------|-------|--------|
| $g_{\{1,3\}}(n)$ | 1 | 1 | 1 | 3 | 9 | 21 | 81 | 351 | 1 233 | 5 769 | 31 041 |

Povšimněme si, že člen  $(n-1)(n-2)$  ve vzorci (3) je vlastně počet 2-členných variací z  $(n-1)$ -prvkové množiny (bez opakování). Počet cyklů délky  $l$ , které obsahují jeden daný prvek, je stejný jako počet  $(l-1)$ -členných variací z  $(n-1)$ -prvkové množiny.

**Definice 10.** Počet  $l$ -členných variací z  $n$ -prvkové množiny označme symbolem

$$V(l, n) := n(n-1) \dots (n-l+1)$$

pro  $0 < l \leq n$ . Dále položíme  $V(l, n) := 0$  pro  $l > n$  a  $V(0, n) := 1$ .

V následující úloze již uvažujeme obecnou volbu  $C$ . Výsledný vzorec je převzat z knihy [1], s. 280.

**Úloha 11.** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou, které sestávají pouze z nezávislých cyklů délek z dané množiny  $C$ ?

Na pravé straně rekurentní rovnice bude suma, v níž každý sčítanec bude odpovídat jedné přípustné délce  $c \in C$  cyklu, jenž obsahuje  $n$ -tý prvek. Doplnit cyklus délky  $c \leq n$  lze  $(n-1)(n-2) \dots (n-c+1)$  způsoby a cyklus délky  $c > n$  nula způsoby, což oboje odpovídá počtu  $(c-1)$ -členných variací z  $(n-1)$ -prvkové množiny. Získáme tedy vzorec

$$g_C(n) = \sum_{c \in C} V(c-1, n-1) \cdot g_C(n-c). \quad (5)$$

Víme, že  $g_C(0) = 1$ , a pomocí rekurentního vzorce lze vypočítat  $g_C(n)$  pro libovolné  $n$ .

## 4.2. Exponenciální generující funkce

Kombinatorické postupy nyní nahradíme matematickou analýzou, konkrétně prací s mocninnými řadami. Náročnější cesta k cíli se nám následně splatí algoritmickým řešením hned několika úloh.

Ve zbytku článku vycházíme z knihy [2] (ze stran 113–118 je převzata teorie, kterou zde uvádíme ve zjednodušené podobě, a strany 118–122 obsahují příklady, které budeme posléze řešit).

Začneme zavedením hlavního pojmu.

**Definice 12.** *Exponenciální generující funkcí* posloupnosti  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  rozumíme mocninnou řadu

$$A(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Budeme potřebovat následující pomocné lemma, které říká, jak vypadají mocniny exponenciálních generujících funkcí.

**Lemma 13.** *Pro každou exponenciální generující funkci  $A$  a každé  $k \in \mathbb{N}$  platí:*

$$A^k(x) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{a_{i_1}}{i_1!} \cdots \frac{a_{i_k}}{i_k!} \right) x^n.$$

*Důkaz.* Mocninnou řadu  $A$  jsme umocnili na  $k$ -tou – představme si tedy součin  $k$  těchto mocninných řad. Jakými způsoby lze z tohoto součinu získat  $x^n$ ? Necht pro každé  $m \in \{1, \dots, k\}$  vybereme z  $m$ -té sumy člen obsahující mocninu  $x^{i_m}$ , kde  $i_m \in \mathbb{N}_0$ . Pokud zvolíme  $i_1, \dots, i_k$  tak, aby měla součet  $n$ , pak součin vybraných členů bude obsahovat mocninu  $x^n$  a její koeficient bude součinem koeficientů všech vybraných členů (zlomky na pravé straně rovnice).

Nyní stačí najít všechny takové výběry  $i_1, \dots, i_k$ , čímž získáme všechny součiny obsahující  $x^n$ .  $\square$

Pro další pozorování označme symbolem  $g_{C,k}(n)$  počet permutací nad  $n$ -prvkovou množinou tvořených právě  $k$  cykly, jejichž délky jsou z množiny  $C$ . Triviálně platí

$$g_C(n) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{C,k}(n).$$

Uvidíme, že se nám vyplatí uvažovat nekonečnou sumu, i když sčítance samozřejmě mohou nabývat nenulových hodnot pouze pro  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Lemma 14.** *Platí*

$$g_{C,k}(n) = \frac{n!}{k!} \left( \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{f(i_1)}{i_1!} \cdots \frac{f(i_k)}{i_k!} \right),$$

kde funkce  $f$  je definována předpisem

$$f(i) = \begin{cases} (i-1)! & \text{pro } i \in C, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

*Důkaz.* Zkusme sestavit permutaci množiny  $\{1, \dots, n\}$  o  $k$  cyklech, které mají délky z množiny  $C$ . Vyberme pro  $m \in \{1, \dots, k\}$  čísla  $i_m$  tak, aby  $i_m \in C$  a  $i_1 + \dots + i_k = n$ , přičemž  $i_m$  bude značit délku  $m$ -tého cyklu permutace. Permutujme čísla  $1, \dots, n$  a položme je do seřazených cyklů od prvního do  $k$ -tého. To je zdánlivě  $n!$  možností, vznikly by nám ale duplicity: jednak nezáleží na pořadí cyklů, jednak nezáleží na vybraném prvním prvku v cyklu. Vydělíme tedy čísla  $k!$  (pořadí cyklů) a  $i_m$  pro každé  $m$  (výběr prvního prvku v  $m$ -tém cyklu).

To souhlasí s dokázaným vztahem, protože pokud skutečně pro všechna  $m$  platí  $i_m \in C$ , pak násobíme  $\frac{f(i_m)}{i_m!} = \frac{(i_m-1)!}{i_m!} = \frac{1}{i_m}$ . Pokud existuje  $m$  takové, že  $i_m \notin C$ , pak z definice  $f$  vyjde celý sčítanec nulový.  $\square$

Označme symbolem  $G_C$  exponenciální generující funkci posloupnosti  $\{g_C(n)\}_{n=0}^\infty$ . Podle následující věty lze  $G_C$  vyjádřit dvěma způsoby: jednak podle definice, jednak pomocí exponenciály.

**Věta 15.** Pro libovolný výběr  $C \subset \mathbb{N}$  platí:

$$G_C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_C(n) \frac{x^n}{n!} = \exp \left( \sum_{n \in C} \frac{x^n}{n} \right).$$

*Důkaz.* Platí

$$G_C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_C(n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{C,k}(n)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_{C,k}(n)}{n!} x^n.$$

Rozepíšeme  $g_{C,k}(n)$  podle lemmatu 14:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!} \left( \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{f(i_1)}{i_1!} \dots \frac{f(i_k)}{i_k!} \right) \frac{x^n}{n!}.$$

Upravíme,  $n!$  se pokráčí:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k \in \mathbb{N}_0 \\ i_1 + \dots + i_k = n}} \frac{f(i_1)}{i_1!} \dots \frac{f(i_k)}{i_k!} \right) x^n.$$

Použijeme lemma 13 a definici funkce  $f$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=0}^{\infty} f(i) \frac{x^i}{i!} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \in C} (i-1)! \frac{x^i}{i!} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i \in C} \frac{x^i}{i} \right)^k.$$

Nakonec si stačí všimnout, že součet mocninné řady lze vyjádřit pomocí exponenciály

$$\exp \left( \sum_{i \in C} \frac{x^i}{i} \right).$$

$\square$

Tato věta bude klíčem k vyřešení všech následujících úloh. Postup lze shrnout do dvou kroků: nejdříve vyjádříme exponenciálu co nejjednodušším způsobem ve tvaru mocninné řady a následně porovnáme koeficienty u  $x^n$  dvou mocninných řad, z čehož získáme vzorec pro  $g_C(n)$ .

### 4.3. Analytický postup

**Úloha 16.** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou, které sestávají pouze z nezávislých dvojcyklů?

Ekvivalentně lze říci, že zjišťujeme počet involutorních permutací bez pevných bodů (tzn. neobjevují se jednocykly).

Máme tedy množinu  $C = \{2\}$ , čemuž odpovídá generující funkce  $G_{\{2\}}(x)$  a řešení úlohy  $g_{\{2\}}(n)$ . Dle věty 15 platí  $G_{\{2\}}(x) = \exp(x^2/2)$ . Pro nalezení rozvoje této exponenciály do mocninné řady si vzpomeňme na vzorec

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad (6)$$

kam stačí dosadit  $x^2/2$  za  $x$ . Získáme rovnost

$$G_{\{2\}}(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Nyní použijeme definici exponenciální generující funkce, čímž obdržíme rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_{\{2\}}(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!}.$$

Zbývá zjistit  $g_{\{2\}}(n)$  porovnáním koeficientů u  $x^n$ . Pro  $n$  liché je koeficient na pravé straně rovnosti 0. Pak i  $g_{\{2\}}(2k+1) = 0$ , což není žádné překvapení: neexistuje permutace nad lichým počtem prvků složená jen z dvojcyklů.

Uvažujme tedy  $n = 2k$ . Ze vzorce vyplývá, že  $g_{\{2\}}(2k) = \frac{(2k)!}{2^k k!} = (2k-1)!!$ . K tomuto výsledku lze snadno dojít i kombinatorickou cestou. Ptáme se, kolika způsoby je možné spárovat  $2k$  různých prvků. Nejmenší prvek lze spárovat  $(2k-1)$  způsoby. Vezměme teď nejmenší prvek, který jsme ještě nepoužili – ten lze spárovat  $(2k-3)$  způsoby. Takto lze pokračovat, dokud nezbydou poslední dva prvky. Řešením tedy je  $(2k-1) \cdot (2k-3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = (2k-1)!!$ .

**Úloha 17.** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou bez pevných bodů? (Pevný bod je bod, který se zobrazí sám na sebe, tj. jde o cyklus délky 1.)

Označíme  $D_n$  počet řešení dané úlohy a  $D$  příslušnou generující funkci. Máme  $C = \{2, 3, \dots\}$ , tedy dle věty 15

$$D(x) = \exp\left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right).$$

Pro úpravu argumentu exponenciály se hodí známý vztah

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad (7)$$

do kterého dosadíme  $-x$  za  $x$ :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}.$$

Řada v argumentu exponenciály je tedy  $-\ln(1-x) - x = \ln \frac{1}{1-x} - x$  (protože suma začíná až od  $n=2$ , je třeba odečíst první člen  $x$ ). Platí tedy

$$D(x) = \exp\left(\ln \frac{1}{1-x} - x\right) = \frac{1}{1-x} \exp(-x),$$

což lze dále převést na součin dvou mocninných řad

$$D(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}\right).$$

Součinem je opět mocninná řada. Zpozorujeme, že sčítanec s  $x^n$  získáme vynásobením  $k$ -tého členu druhé sumy s  $(n-k)$ -tým členem první sumy, kde  $0 \leq k \leq n$ . Tento sčítanec bude mít koeficient  $\frac{(-1)^k}{k!}$ , celkový koeficient u  $x^n$  pak bude sumou těchto zlomků přes všechna  $k$ . A generující funkci  $D$  lze zapsat jako sumu přes všechna  $n$ , čímž získáme vzorec

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Nakonec stačí rozepsat  $D$  podle definice a vyjádřit  $D_n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}, \\ D_n &= n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Tento vzorec se často odvozuje kombinatoricky pomocí principu inkluze a exkluze, jako řešení známé úlohy o šatnářce je například uveden v knize [6].

Podívejme se nyní znova na úlohu 1, kterou jsme již dokázali vyřešit kombinatoricky, a zkusme dojít ke stejnému výsledku pomocí věty 15.

**Úloha 18 (o telefonních číslech).** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou, které sestávají pouze z nezávislých jednocyklů a dvojcyklů?

Počet řešení dané úlohy je  $T_n$  ( $n$ -té telefonní číslo), příslušnou generující funkci označme  $T$ . Použitím věty 15 získáme

$$T(x) = \exp\left(x + \frac{x^2}{2}\right) = \exp(x) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$



Odkážeme se na rozvoje exponenciální funkce z úlohy 16 a získáme součin dvou mocninných řad

$$\left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k k!} \right).$$

Budeme zjišťovat koeficient u  $x^n$  tohoto součinu. Každý sčítanec s  $x^n$  získáme vynásobením  $k$ -tého členu z druhé řady s  $(n - 2k)$ -tým členem z první řady, kde  $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$ . Koeficient tohoto sčítance je  $\frac{1}{(n-2k)! 2^k k!}$ . Koeficient součtu všech členů s  $x^n$  pak bude

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^k k! (n-2k)!}$$

a výsledná mocninná řada má tvar

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^k k! (n-2k)!}.$$

Nyní stačí jen řadu upravit do vhodné podoby, aby se z ní podle definice  $T$  dala vyčíst čísla  $T_n$ :

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(2k)!(n-2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!!, \\ T_n &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (2k-1)!!. \end{aligned}$$

## 5. Další příklady

Na závěr vyřešíme ještě dvojici příkladů. Vycházíme stále knihy [2] (strany 120–122), nabízíme však vlastní kombinatorické řešení úlohy 20.

**Úloha 19.** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou, které sestávají právě z cyklů sudých délek?

**Analytické řešení.** Označíme písmenem  $S$  množinu kladných sudých čísel, tedy pracujeme s generující funkcí  $G_S$  a řešením úlohy je  $g_S(n)$ .

Vycházejme opět z věty 15:

$$G_S(x) = \exp \left( \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} + \dots \right) = \exp \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k} \right).$$

K nalezení součtu nekonečné řady se nám vyplatí použít trik: řadu zderivovat, upravit a pak zpátky zintegrovat:

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2k} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}.$$

Vyšel nám zlomek, jež je před integrováním třeba upravit na součet parciálních zlomků

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2}.$$

Z porovnání čitatelů plynou rovnice  $0 = A + B$  a  $1 = A - B$ , z nichž vypočteme  $A = \frac{1}{2}$  a  $B = -\frac{1}{2}$ . Parciální zlomky zintegrujeme a máme

$$-\frac{1}{2} \ln(1-x) - \frac{1}{2} \ln(1+x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \ln \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \ln \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}.$$

Tento výraz je stále v argumentu exponenciály generující funkce  $G_S$ , tj.

$$G_S(x) = \exp \left( \ln \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} \right) = \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}.$$

Generující funkci lze nyní rozvinout do mocninné řady použitím zobecněné binomické věty:

$$\begin{aligned} (1-x^2)^{-1/2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-1)^k x^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)(-3/2) \dots (-1/2-k+1)}{k!} (-1)^k x^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (1+2k-2)}{2^k k!} x^{2k} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k}. \end{aligned}$$

Nakonec použijeme definici generující funkce a získáme řešení

$$\begin{aligned} G_S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_S(n) \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k}, \\ g_S(2k) &= (2k)! \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = ((2k-1)!!)^2. \end{aligned}$$

Liché členy tentokrát na pravé straně rovnosti zcela chybí, tedy

$$g_S(2k+1) = 0.$$

**Kombinatorické řešení.** Je zřejmé, že sudé cykly lze sestavit pouze ze sudého počtu prvků, tedy platí  $g_S(2k+1) = 0$  pro  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Zbývá spočítat způsoby, jak utvořit cykly sudých délek z  $2k$  prvků pro  $k \in \mathbb{N}$ . Nejdříve prvky spárujeme do dvojcyklů – to činí  $(2k-1)!!$  možností, jak jsme zjistili v úloze 16. Dvojcykly uspořádáme vzestupně podle jejich menšího prvku, a menší prvky napíšeme na první pozici cyklů. Tomuto uspořádání budeme říkat *vzestupné*. Tímto způsobem lze uspořádat jakoukoliv permutaci.

Pro znázornění vezměme 8 spárovaných prvků ve vzestupném uspořádání:

$$(1, 5)(2, 3)(4, 8)(6, 7).$$

Nyní budeme dvojcykly spojovat. Budeme postupovat zleva doprava, a buď navštívený cyklus „rozšíříme“ (připojíme na jeho konec některý z nenavštívených dvojcyklů), nebo jej „uzavřeme“ a pokročíme k následníkovi. Jeden krok algoritmu vlastně vždy znamená zafixování dvou prvků permutace a posun o dvě pozice doprava.

Podívejme se, jak může algoritmus probíhat. Zvýrazněné prvky značí konec navštíveného cyklu.

$$\begin{aligned} (1, \mathbf{5})(2, 3)(4, 8)(6, 7) \\ (1, 5)(2, \mathbf{3})(4, 8)(6, 7) \\ (1, 5)(2, 3, 7, \mathbf{6})(4, 8) \\ (1, 5)(2, 3, 7, 6, 4, \mathbf{8}) \\ (1, 5)(2, 3, 7, 6, 4, 8) \end{aligned}$$

První cyklus se rovnou uzavřel, další se hned dvakrát rozšířil. Poprvé o cyklus (6, 7) s prvním prvkem 7, podruhé o cyklus (4, 8) s prvním prvkem 4.

Obecně se dá říci, že volba rozšíření je dána výběrem prvku, jenž se nachází napravo od konce navštíveného cyklu. Počet možností je tak nejdříve  $2k - 2$ , pak  $2k - 4$ , a tak dále, až ke 2 a 0. Navíc máme vždy navíc možnost uzavření, tedy možností spojování je  $(2k - 1) \cdot (2k - 3) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = (2k - 1)!!$ .

Zřejmě výsledkem bude permutace sestávající z cyklů sudých délek, zatím ale nevíme, zda každá taková permutace půjde vygenerovat právě jedním způsobem.

Všimněme si, že spojování nenarušilo vzestupné uspořádání. Je díky tomu možné jednoznačně uskutečnit zpětný chod z již pospojovaných cyklů: zprava doleva „trháme“ dvojcykly a řadíme je podle vzestupného uspořádání, což je vždy napravo od navštíveného cyklu.

Zpětný chod je možné provést na každé permutaci s cykly sudých délek, protože jediná podmínka je její vzestupné uspořádání. To znamená, že pokud máme vhodně spárované prvky, je právě jeden způsob, jak provést spojování k získání zadané permutace. A párování prvků je při spojování zachováno (spárované prvky zůstanou vedle sebe), lze je tedy vyčíst přímo ze zadané permutace.

Tedy počet hledaných permutací je roven počtu možností, jak utvořit dvojcykly, krát počet možností, jak je pospojovat do větších cyklů. Získáme

$$g_S(2k) = ((2k - 1)!!)^2.$$

**Úloha 20.** Kolik existuje permutací nad  $n$ -prvkovou množinou, které sestávají právě z cyklů lichých délek?

**Analytické řešení.** Necht  $L$  je množina všech kladných lichých čísel. Generující funkcí je  $G_L$  a řešením úlohy  $g_L(n)$ . Podle věty 15 platí

$$G_L(x) = \exp \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) = \exp \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right).$$

Stejně jako u předchozí úlohy 19 použijeme trik se zderivováním a zintegrováním exponentu:

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Před integrací je potřebná úprava na parciální zlomky:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1-x^2}.$$

Z čitateľů vyčteme  $1 = A + B$  a  $0 = A - B$ , odkud plyne  $A = B = \frac{1}{2}$ . Po zintegrování zlomků získáme

$$-\frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \ln \sqrt{1+x} = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Vyjádříme generující funkci  $G_L$ :

$$G_L(x) = \exp \left( \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Dále se rozšířením  $\sqrt{1+x}$  zbavíme odmocniny v čitateli, jmenovatel poté půjde převést na mocninnou řadu pomocí zobecněné binomické věty:

$$G_L(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)(1-x^2)^{-1/2}.$$

Rozvoj  $(1-x^2)^{-1/2}$  jsme hledali v předchozí úloze 19, takže stačí řadu opsat:

$$G_L(x) = (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k}.$$

Mocninná řada s pouze sudými členy je oproti úloze 19 násobena  $(1+x)$ , takže i liché členy budou nenulové. Při rozepsání podle definice generující funkce získáme

$$G_L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_L(n) \frac{x^n}{n!} = (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} x^{2k}.$$

Nyní je třeba spočítat  $g_L(n)$  separátně pro sudá a lichá  $n$ :

$$\begin{aligned} g_L(2k) &= (2k)! \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = ((2k-1)!!)^2, \\ g_L(2k+1) &= (2k+1)! \frac{(2k-1)!!}{2^k k!} = (2k+1)((2k-1)!!)^2. \end{aligned} \quad (8)$$

**Kombinatorické řešení.** Všimněme si, že pro  $n$  sudé nám vyšlo řešení totožné s předchozí úlohou 19, tedy  $g_L(2k) = g_S(2k)$ . Nabízí se tedy zkusit dokázat tuto rovnost kombinatoricky. Toho docílíme nalezením bijekce mezi permutacemi se všemi

cykly lichých délek (zkráceně *vzory*) a permutacemi, které mají všechny cykly sudých délek (zkráceně *obrazy*). Bijektivnost zdůvodníme tím, že ke každému obrazu půjde jednoznačně najít vzor.

Zobrazení samotné bude jednoduché: nalezneme rozklad vzoru na nezávislé cykly a na konec každého druhého cyklu přesuneme poslední prvek cyklu předchozího. Takto ze všech cyklů lichých délek získáme cykly sudých délek. Zatím to ale není korektní postup: různá uspořádání cyklů a prvků v cyklech vedou k různým obrazům též permutace, takže je třeba určit nějaký jednoznačný předpis, jak zapsat permutaci pomocí rozkladu na cykly.

K předchozímu odstavci je třeba učinit dvě pozorování. Zaprvé počet cyklů lichých délek je vždy sudý, skutečně tedy polovina cyklů prvek ztratí a druhá polovina prvek získá. Zadruhé odebráním prvku z jednocyklu se tohoto cyklu zbavíme, tedy obrazy obecně mohou sestávat z méně cyklů než vzory. Tím vzniká problém s hledáním vzoru k obrazu: obecně u cyklu nevíme, zda byl jeho poslední prvek v zobrazení přidělen z jeho předchůdce nebo ze zaniklého jednocyklu.

Zachrání nás následující uspořádání: na první pozici každého cyklu umístíme jeho největší prvek a cykly samotné uspořádáme vzestupně podle hodnoty onoho největšího prvku. Například permutace

$$(4)(5, 1, 3)(7)(8)(9, 2, 6)(10)$$

je ve správném tvaru, jakákoliv jiná podoba je špatně.

Všimněme si, že uspořádání je zachováno i pro všechny obrazy, protože pořadí cyklů se nemění a při každém přesunu vkládáme na konec cyklu číslo menší než to, které je na začátku cyklu. Zánik jednocyklů též uspořádání nenaruší, jen změní celkový počet cyklů obrazu. Můžeme tak uvažovat obrazy pouze uspořádaném tvaru.

Obraz předchozí permutace v popsaném uspořádání je

$$(5, 1, 3, 4)(8, 7)(9, 2)(10, 6).$$

Nakonec si uvědomme, že máme-li v daném cyklu v obrazu prvek, o kterém víme, že jej zobrazení přesunulo, pak dokážeme říct, kam ve vzoru patří. Pokud má totiž prvek menší hodnotu než první prvek předchůdce daného cyklu, pak ve vzoru náleží na poslední pozici předchůdce. Pokud je naopak daný prvek větší nebo daný cyklus předchůdce nemá, pak prvek ve vzoru tvořil jednocyklus, který umístíme těsně před daný cyklus.

Právě jsme popsali jeden krok algoritmu rekonstrukce vzoru z daného obrazu. Postupujeme od posledního cyklu dopředu, z navštíveného cyklu odebíráme poslední prvek, a pro další krok přeskakujeme cykly, jímž byl přidán prvek. Takto jednoznačně nalezneme k obrazu vzor.

Provedme rekonstrukci vzoru s obrazem naší demonstrační permutace:

$$(5, 1, 3, 4)(8, 7)(9, 2)(10, 6)$$

$$(5, 1, 3, 4)(8, 7)(9, 2, 6)(10)$$

$$(5, 1, 3, 4)(7)(8)(9, 2, 6)(10)$$

$$(4)(5, 1, 3)(7)(8)(9, 2, 6)(10).$$

Tučně jsou zobrazeny přesouvané prvky. První krok byl přesun 6 na konec předchůdce, protože  $6 < 9$ , druhý krok přesun 7 do nového jednocyklu, protože  $7 > 5$ , a nakonec 4 vytvoří jednocyklu na začátku, protože předchůdce už cyklus nemá. Vidíme, že jsme získali zpět původní vzor, se kterým jsme začínali.

Tímto jsme dokázali

$$g_L(2k) = g_S(2k) = ((2k - 1)!!)^2.$$

Jsme ale zatím pouze v polovině řešení – je ještě třeba spočítat  $g_L(2k + 1)$ . Protože  $g_S(2k + 1) = 0$ , nemá smysl hledat bijekci mezi sudými a lichými cykly. Namísto toho se pokusíme využít již získanou hodnotu  $g_L(2k)$ .

Použijeme uspořádání popsané v předešlých odstavcích a ptáme se, kam lze v takto uspořádané permutaci nad  $(2k + 1)$ -prvkovou množinou umístit největší prvek, aby všechny cykly byly lichých délek. Tento prvek bude vždy na první pozici cyklu, který dosahuje až k poslední pozici. Aby tento v pořadí poslední cyklus měl lichou délku, musí i největší prvek být na liché pozici – je tedy  $k + 1$  možností, kam jej položit. Položme tedy prvek na pozici  $2i + 1$ , kde  $0 \leq i \leq k$ . Zbylé prvky rozdělme na ty, které napíšeme před obsazenou pozici, a ty, které napíšeme za ni. Rozdělení je možné provést  $\binom{2k}{2i}$  způsoby. Prvky na pozicích 1 až  $2i$  představují permutaci  $2i$ -prvkové množiny tvořenou pouze lichými cykly. Víme, že počet takových permutací je  $g_L(2i) = ((2i - 1)!!)^2$ . Prvky na pozicích  $2i + 2$  až  $2k + 1$  umísťujeme na druhé až poslední místo posledního cyklu délky  $2k + 1 - 2i$ , to činí  $(2k - 2i)!$  možností. Sečítáním přes všechna  $i$  získáme sumu, kterou dále zjednodušíme:

$$\begin{aligned} g_L(2k + 1) &= \sum_{i=0}^k \binom{2k}{2i} (2k - 2i)! ((2i - 1)!!)^2 = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(2k)!}{(2k - 2i)! (2i)!} (2k - 2i)! ((2i - 1)!!)^2 = \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{(2k)!! (2k - 1)!!}{(2i)!} ((2i - 1)!!)^2 = \\ &= (2k - 1)!! \sum_{i=0}^k \frac{(2k)!!}{(2i)!!} (2i - 1)!! \end{aligned}$$

Z analytického postupu víme, že hodnota sumy by měla být  $(2k + 1)!!$ . Toto tvrzení snadno dokážeme například matematickou indukcí. Pro  $k = 1$  je hodnota sumy rovna  $2 + 1 = 3 = 3!!$ . A nyní indukční krok, známe-li výsledek pro  $k - 1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \frac{(2k)!!}{(2i)!!} (2i - 1)!! &= \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{(2k)!!}{(2i)!!} (2i - 1)!! \right) + (2k - 1)!! = \\ &= (2k) \sum_{i=0}^{k-1} \left( \frac{(2k - 2)!!}{(2i)!!} (2i - 1)!! \right) + (2k - 1)!! = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2k)(2k-1)!! + (2k-1)!! = \\
&= (2k+1)(2k-1)!! = \\
&= (2k+1)!!.
\end{aligned}$$

I kombinatorickou cestou jsme tedy dokázali vztah

$$g_L(2k+1) = (2k+1)!!(2k-1)!! = (2k+1)((2k-1)!!)^2.$$

## 6. Závěr

Tento článek vychází z autorovy bakalářské práce [5]. V ní je navíc podrobněji popsáno Burnsideovo lemma a uvedena řešení dalších úloh na počítání permutací s předepsanými délkami cyklů. Jde například o úlohu, kde  $C$  je množina všech násobků čísla  $k \in \mathbb{N}$ , a její obdoba, kde  $C$  je množina všech čísel, která nejsou násobky čísla  $k$ . Zájemcům o další aplikace exponenciálních generujících funkcí doporučujeme knihy [10] a [3].

**Poděkování.** Děkuji panu dr. Daliboru Šmídovi za cenné připomínky k článku i při oponentuře bakalářské práce. Velmi děkuji doc. Antonínu Slavíkovi za vedení této práce a za velké množství píce, které věnoval pomoci vyladit článek do finální podoby.

## L i t e r a t u r a

- [1] ARNDT, J.: *Matters computational: Ideas, algorithms, source code*. Springer, 2010.
- [2] BÓNA, M.: *Combinatorics of permutations*. CRC Press, 2012.
- [3] GRAHAM, R. L., KNUTH, D. E., PATASHNIK, O.: *Concrete mathematics: a foundation for computer science*. 2nd edition, Addison-Wesley Publishing Group, 1994.
- [4] HOLT, D. F.: *Rooks inviolate*. The Mathematical Gazette 58 (1974), 131–134.
- [5] HUBAČ, D.: *Permutace s předepsanými délkami cyklů*. Bakalářská práce. MFF UK, 2024. Dostupné z: <https://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/bp-hubac.pdf>
- [6] MATOUŠEK, J., NEŠETŘIL, J.: *Kapitoly z diskrétní matematiky*. Karolinum, 2009.
- [7] STANOVSKÝ, D.: *Základy algebry*. MatfyzPress, 2010.
- [8] WIKIPEDIA: Involution (mathematics) [online]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Involution\\_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Involution_(mathematics))
- [9] WIKIPEDIA: Telephone number (mathematics) [online]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Telephone\\_number\\_\(mathematics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Telephone_number_(mathematics))
- [10] WILF, H. S.: *Generatingfunctionology*. 3rd edition, A. K. Peters, 2006.