Jan Jekl

Sudoku pohledem matematiky: Odmocnina z jedné a soustava rovnic

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 99 (2024), No. 2, 6–11

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152484`

Sudoku pohledem matematiky: Odmocnina z jedné a soustava rovnic

Jan Jekl, Univerzita obrany, Brno

Abstrakt. Sudoku se nadále těší popularitě, a proto může sloužit jako motivační zdroj k podnícení zájmu studentů o matematiku. V tomto článku ukazujeme způsob, jak lze sudoku ztotožnit s úlohou hledání řešení jistého systému lineárních a nelineárních rovnic.

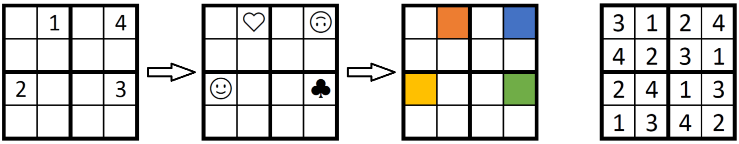
V této práci se věnujeme sudoku, kterému se již také věnovala řada jiných autorů, zmiňme například [2, 4, 5, 6, 7, 8].

Sudoku přitom fascinuje vědeckou komunitu již nějakou dobu (viz první výskyt slova sudoku v databázi Scopus z roku 2005, přičemž jediný starší výskyt odkazuje na autora jménem Sudoku). I v matematice byla řada výsledků v minulosti motivována hrami. Zmiňme například Hanojské věže, Patnáctku, Tetris, Rubikovu kostku a další [1]. Zmiňme také, že řada dalších výsledků byla motivována hrami, kde vzájemně soupeří dva a více hráčů proti sobě. Mezi příklady zde patří Dáma, Hex nebo Hra oware [1]. Tento fakt se také projevil v názvu matematického odvětví, které studuje konfliktní situace: *Teorie her*.

Cílem naší práce je zkoumat sudoku jako systém rovnic. Pro usnadnění pochopení budeme celou situaci rozebírat na 4×4 variantě sudoku, která se nazývá shidoku (z japonského shi, což znamená 4). Všechny zde uvedené informace lze s trochou práce rozšířit na obvyklé zadání 9×9 sudoku.

Pro úplnost připomeňme, že shidoku je předvyplněná 4×4 tabulka, do níž doplňujeme čísla 1 až 4. V tabulce se nachází 4 disjunktní 2×2 sekce a naším úkolem je do každého řádku, sloupce i do každé sekce doplnit každé ze čtyř čísel právě jednou. Systém rovnic získáme, když si uvědomíme, že do tabulky nemusíme doplňovat jenom čísla, ale stejně dobře by nám posloužily 4 rozdílné symboly. Navíc bychom nemuseli doplňovat pouze symboly. Úplně by stačilo do tabulky doplňovat barvy, nebo třeba zvuky, viz obr. 1.

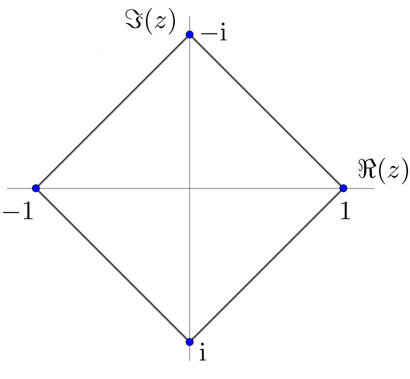
Uveďme ještě několik informací ohledně použitého značení. Každá tabulka se skládá z buněk, které budeme značit obvyklým maticovým značením. Pod pojmem buňka (k, l) tedy budeme myslet buňku v k-tém řádku a l-tém sloupci, počítáno z levého horního okraje dolů (k), resp. doprava (l).



Obr. 1: Shidoku, které je zadáno pomocí čísel, symbolů i barev – vpravo se nachází řešení tohoto shidoku

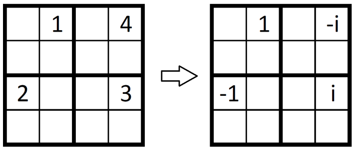
Hlavolam shidoku a čtvrtá odmocnina z jedné

V této části se pokusíme do shidoku namísto čísel 1, 2, 3 a 4 doplňovat vhodná komplexní čísla (tato varianta byla prozkoumaná také v [3]). Obeznámený čtenář jistě ví, že imaginární jednotku i definujeme jako řešení rovnice $x^2 = -1$, a také ví, že v oboru reálných čísel tato rovnice nemá řešení. Podobně můžeme uvážit rovnici $x^4 = 1$, která má v oboru reálných čísel pouze dvě řešení, a to $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Přímo z definice imaginární jednotky však vyplývá, že v oboru komplexních čísel má rovnice $x^4 = 1$ navíc ještě řešení $x_3 = \mathrm{i}$, $x_4 = -\mathrm{i}$. Protože se jedná o řešení rovnice $x^4 = 1$, tak těmto řešením říkáme 4. odmocniny z jedné. Pokud řešení vykreslíme v komplexní rovině, pak řešení leží ve vrcholech čtverce, jak je zobrazeno na obr. 2. Pro zajímavost ještě uveďme, že řešení rovnice $x^n = 1$ určují vrcholy pravidelného n-úhelníku.



Obr. 2: Řešení rovnice $x^4 = 1$ vyobrazené v komplexní rovině; všechna řešení leží ve vrcholech čtverce

Když nyní víme, jak vypadají čtvrté odmocniny z jedné, tak je můžeme doplnit do hlavolamu shidoku například tak, že číslo k nahradíme x_k. Takové nahrazení vidíme např. na obr. 3.



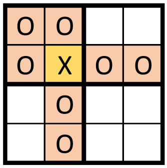
Obr. 3: Zadání hlavolamu shidoku, kde každou hodnotu k nahradíme 4. odmocninou z jedné x_k

Nyní specifikujeme systém rovnic, jehož řešení bude korespondovat s řešením shidoku. Začneme tak, že každé z 16 buněk shidoku přiřadíme jednu proměnnou y_k, $k \in \{1, \ldots, 16\}$. Toto propojení můžeme například provést tak, že buňce (k, l) přiřadíme proměnnou $y_{k+4(l-1)}$. Přiřazení proměnných buňkám je znázorněno níže.

y_1	y_2	y_3	y_4
y_5	y_6	y_7	y_8
y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}
y_{13}	y_{14}	y_{15}	y_{16}

Pro zadané počáteční nápovědy hlavolamu máme hodnoty některých proměnných předem zadané. V hlavolamu na obr. 3 tak víme, že platí $y_2 = 1$, $y_4 = -\mathrm{i}$, $y_9 = -1$, $y_{12} = \mathrm{i}$. Neznámé hodnoty ostatních proměnných y_k pak reprezentují chybějící hodnoty v hlavolamu. Abychom zaručili, že proměnné y_k budou skutečně čtvrté odmocniny z jedné, tak specifikujeme, že každá proměnná y_k musí řešit rovnici $y_k^4 = 1$.

Navíc si uvědomme, že některé proměnné nemohou mít stejnou hodnotu. Například proměnné y_1 a y_4 reprezentují buňky ve stejném řádku, a tedy musí platit, že $y_1 \neq y_4$. O takových dvojicích řekneme, že jsou v přímém vztahu. Můžeme si rozmyslet, že každá proměnná je v přímém vztahu se sedmi dalšími proměnnými. Toto platí proto, že každá buňka je ovlivněna sedmi jinými buňkami, jak můžeme vidět na obr. 4. Celkem máme 16 proměnných, které jsou ve vztahu vždy se sedmi buňkami. Protože nerozlišujeme situace, kde je proměnná y_k v přímém vztahu s proměnnou y_l a kde je y_l ve vztahu s y_k, tak máme dohromady $\frac{16 \cdot 7}{2} = 56$ dvojic proměnných v přímém vztahu.



Obr. 4: Buňka označená písmenem X je ve vztahu se sedmi buňkami označenými písmenem O

Uvažujme nyní libovolnou dvojici y_k, y_l proměnných v přímém vztahu. Nerovnost $y_k \neq y_l$ převedeme na rovnici, jejíž řešení tuto podmínku musí splňovat. Protože 4. odmocniny z jedné splňují, že $y_k^4 = 1 = y_l^4$, pak také musí splňovat rovnici $y_k^4 - y_l^4 = 0$. Tento vztah nyní splňují i proměnné, pro něž platí $y_k = y_l$, tj. kde $y_k - y_l = 0$. Abychom vyloučili tuto možnost, můžeme tímto výrazem dělit a máme

$$0 = \frac{y_k^4 - y_l^4}{y_k - y_l} = (y_k + y_l)(y_k^2 + y_l^2).$$

Vezmeme-li tedy pro libovolnou dvojici proměnných y_k, y_l v přímém vztahu rovnici

$$(y_k + y_l)(y_k^2 + y_l^2) = 0, \tag{1}$$

pak tyto rovnice zaručí, že proměnné y_k budou splňovat všechny požadavky na řešení shidoku.

Zaměřme se opět na hlavolam shidoku, který jsme studovali na obr. 3. Jemu odpovídající systém rovnic by vypadal následujícím způsobem:

$$\begin{array}{llllllll}
y_1^4 = 1 & y_2 = 1 & y_3^4 = 1 & y_4 = -\mathrm{i} & y_5^4 = 1 & y_6^4 = 1 & y_7^4 = 1 & y_8^4 = 1 \\
y_9 = -1 & y_{10}^4 = 1 & y_{11}^4 = 1 & y_{12} = \mathrm{i} & y_{13}^4 = 1 & y_{14}^4 = 1 & y_{15}^4 = 1 & y_{16}^4 = 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(y_1 + y_2)(y_1^2 + y_2^2) = 0 & (y_7 + y_5)(y_7^2 + y_5^2) = 0 & (y_{10} + y_9)(y_{10}^2 + y_9^2) = 0 \\
(y_1 + y_3)(y_1^2 + y_3^2) = 0 & (y_7 + y_6)(y_7^2 + y_6^2) = 0 & (y_{10} + y_{11})(y_{10}^2 + y_{11}^2) = 0 \\
(y_1 + y_4)(y_1^2 + y_4^2) = 0 & (y_7 + y_8)(y_7^2 + y_8^2) = 0 & (y_{10} + y_{12})(y_{10}^2 + y_{12}^2) = 0 \\
(y_1 + y_5)(y_1^2 + y_5^2) = 0 & (y_7 + y_3)(y_7^2 + y_3^2) = 0 & (y_{10} + y_2)(y_{10}^2 + y_2^2) = 0 \\
(y_1 + y_9)(y_1^2 + y_9^2) = 0 & (y_7 + y_{11})(y_7^2 + y_{11}^2) = 0 & (y_{10} + y_6)(y_{10}^2 + y_6^2) = 0 \\
(y_1 + y_{13})(y_1^2 + y_{13}^2) = 0 & (y_7 + y_{15})(y_7^2 + y_{15}^2) = 0 & (y_{10} + y_{14})(y_{10}^2 + y_{14}^2) = 0 \\
(y_1 + y_6)(y_1^2 + y_6^2) = 0 & (y_7 + y_4)(y_7^2 + y_4^2) = 0 & (y_{10} + y_{13})(y_{10}^2 + y_{13}^2) = 0
\end{array}$$

$$(y_{16}+y_{13})(y_{16}^2+y_{13}^2)=0 \quad (y_4+y_2)(y_4^2+y_2^2)=0 \quad (y_{11}+y_9)(y_{11}^2+y_9^2)=0$$
$$(y_{16}+y_{14})(y_{16}^2+y_{14}^2)=0 \quad (y_4+y_3)(y_4^2+y_3^2)=0 \quad (y_{11}+y_{12})(y_{11}^2+y_{12}^2)=0$$
$$(y_{16}+y_{15})(y_{16}^2+y_{15}^2)=0 \quad (y_4+y_8)(y_4^2+y_8^2)=0 \quad (y_{11}+y_3)(y_{11}^2+y_3^2)=0$$
$$(y_{16}+y_4)(y_{16}^2+y_4^2)=0 \quad (y_4+y_{12})(y_4^2+y_{12}^2)=0 \quad (y_{11}+y_{15})(y_{11}^2+y_{15}^2)=0$$
$$(y_{16}+y_8)(y_{16}^2+y_8^2)=0 \quad (y_6+y_5)(y_6^2+y_5^2)=0 \quad (y_{13}+y_{14})(y_{13}^2+y_{14}^2)=0$$
$$(y_{16}+y_{12})(y_{16}^2+y_{12}^2)=0 \quad (y_6+y_8)(y_6^2+y_8^2)=0 \quad (y_{13}+y_{15})(y_{13}^2+y_{15}^2)=0$$
$$(y_{16}+y_{11})(y_{16}^2+y_{11}^2)=0 \quad (y_6+y_2)(y_6^2+y_2^2)=0 \quad (y_{13}+y_5)(y_{13}^2+y_5^2)=0$$
$$(y_6+y_{14})(y_6^2+y_{14}^2)=0 \qquad (y_{13}+y_9)(y_{13}^2+y_9^2)=0$$

$$(y_2+y_3)(y_2^2+y_3^2)=0 \quad (y_8+y_5)(y_8^2+y_5^2)=0 \quad (y_9+y_{14})(y_9^2+y_{14}^2)=0$$
$$(y_2+y_5)(y_2^2+y_5^2)=0 \quad (y_8+y_{12})(y_8^2+y_{12}^2)=0 \quad (y_{15}+y_3)(y_{15}^2+y_3^2)=0$$
$$(y_2+y_{14})(y_2^2+y_{14}^2)=0 \quad (y_9+y_5)(y_9^2+y_5^2)=0 \quad (y_{15}+y_{12})(y_{15}^2+y_{12}^2)=0$$
$$(y_8+y_3)(y_8^2+y_3^2)=0 \quad (y_9+y_{12})(y_9^2+y_{12}^2)=0 \quad (y_{15}+y_{14})(y_{15}^2+y_{14}^2)=0$$

Tato soustava je poměrně složitá a nalezení jejího řešení přímým výpočtem by jistě nebylo jednoduché. Nicméně vzpomeňme si, že soustava byla vytvořena tak, aby korespondovala s shidoku, které je zobrazeno na obr. 3. Soustavu nyní snadno vyřešíme nalezením řešení samotného shidoku. Toto řešení je

$y_1=\mathrm{i}$	$y_2=1$	$y_3=-1$	$y_4=-\mathrm{i}$
$y_5=-\mathrm{i}$	$y_6=-1$	$y_7=\mathrm{i}$	$y_8=1$
$y_9=-1$	$y_{10}=-\mathrm{i}$	$y_{11}=1$	$y_{12}=\mathrm{i}$
$y_{13}=1$	$y_{14}=\mathrm{i}$	$y_{15}=-\mathrm{i}$	$y_{16}=-1$

Čtenář si nyní může vyzkoušet, jak by vypadala rovnice (1) pro klasické sudoku 9×9 nebo jeho jiné varianty 6×6, 16×16 apod. Čtenář může také určit, kolik rovnic by obsahoval systém pro tyto varianty.

Závěr

Úkolem tohoto textu bylo ukázat, jak lze sudoku spojit s řešením soustavy rovnic. Domníváme se, že hlavolam sudoku je dostatečně známý, aby následně mohl sloužit jako motivace pro studenty v rámci probírané látky. Avšak zdá se nám, že je tento problém dostatečně zajímavý sám o sobě, aby sloužil výzkumníkům k dalšímu bádání. Z historie je známo, že řada teoretických poznatků byla motivována hrami a hlavolamy [1].

Řada chybných pokusů o nalezení minimálního ireducibilního sudoku (viz [9, 10]) dle nás ilustruje, že se o téma sudoku v minulosti zajímala také širší veřejnost. Z posledního dotazníkového šetření firmy YouGov vyplývá, že se sudoku líbí 46 % dotázaných [11].

Poděkování

Tento příspěvek vznikl s podporou projektu DZRO Vojenské autonomní a robotické systémy.

Literatura

[1] Pickover, C. A.: *Matematická kniha*. Dokořán, Praha, 2012.

[2] Rosenhouse, J., Taalman, L.: *Taking sudoku seriously: The Math Behind the World's Most Popular Pencil Puzzle*. Oxford University Press, Oxford, 2011.

[3] Arnold, E., Lucas, S., Taalman, L.: Gröbner basis representations of sudoku. *College Mathematics Journal*, roč. 41 (2010), č. 2, s. 101–112.

[4] Delahaye, J. P.: The science behind sudoku. *Scientific American*, roč. 294 (2006), č. 6, s. 81–87.

[5] Felgenhauer, B., Jarvis, F.: Mathematics of sudoku I. *Mathematical Spectrum*, roč. 39 (2006), č. 1, s. 15–22, `https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122734246`.

[6] Russel, E., Jarvis, F.: Mathematics of sudoku II. *Mathematical Spectrum*, roč. 39 (2006), č. 2, s. 54–58.

[7] McGuire, G., Tugemann, B., Civario, G.: There is no 16-clue sudoku: solving the sudoku minimum number of clues problem via hitting set enumeration. *Experimental Mathematics*, roč. 23 (2014), č. 2, s. 190–217, `https://doi.org/10.1080/10586458.2013.870056`.

[8] Katrnoška, F., Křížek, M., Somer, L.: Magické čtverce a sudoku. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 53 (2008), č. 2, s. 113–124.

[9] Papke, A.: Mindestens 17 müssen es sein: Untersuchungen zur eindeutigen Lösbarkeit von sudokus. *Junge Wissenschaft*, roč. 84 (2009), s. 1–8.

[10] Néstor, R. A.: Proof that no 16-clue sudoku puzzle exists. November (2010), `https://nestorgames.com/docs/16s/16s.html`.

[11] *Sudoku*. `https://today.yougov.com/topics/society/explore/activity/Sudoku`. [cit. 12.6.2023].