

Ján Andres; Jan Čermák; Lucie Fedorková

Piers Bohl stále inspirující

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 69 (2024), No. 3, 133–152

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152592>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Piers Bohl stále inspirující

Jan Andres, Jan Čermák, Lucie Fedorková

Abstrakt. Článek je věnován památce Pierse Bohla (1865–1921), lotyšského matematika a šachisty, jehož mnohé výsledky předběhly svoji dobu a zůstaly tehdejší matematickou komunitou často nedoceny. Kromě uvedení základních životopisných údajů komentuje tento text jeho dnes již všeobecně uznávaný přínos do několika oblastí matematické analýzy, zejména pak vět o pevném bodě a teorie kvaziperiodických funkcí. Hlavní inspirací pro sepsání tohoto článku byl však jiný Bohlov výsledek, tentokrát z oblasti teorie polynomů. Ten, ač publikován v roce 1908, zůstal matematické veřejnosti donedávna prakticky neznámý. Přínos tohoto polynomiálního výsledku je přitom zásadní nejen pro teorii polynomů samotnou, ale nachází své významné uplatnění také při kvalitativní analýze diferenčních rovnic a v dalších souvisejících oblastech. Snahou autorů (a současně hlavním cílem příspěvku) je uvedení osobnosti Pierse Bohla a tohoto jeho výsledku do širšího matematického povědomí.

1. Osobnost Pierse Bohla

Patrně každý vědec se při svém výzkumu snaží eliminovat riziko opomenutí již existujících výsledků dalších autorů, které mají k jeho výzkumu úzkou vazbu (či dokonce na některé otázky jeho výzkumu dávají přímou odpověď). Za předpokladu standardně odvedené rešeršní práce se takové situace v dnešní elektronické době zdají být téměř vyloučené. Navzdory veškerému úsilí o jejich eliminaci se však stát mohou. A tento příspěvek pojednává právě o jednom takovém případě.

Sám o sobě by patrně tento případ nebyl natolik zajímavý, nebýt ovšem dalších doprovázejících okolností. Ve skutečnosti se zde totiž nejednalo pouze o jednoho vědce, který neodhalil, že klíčový výsledek jeho výzkumu již existuje, nýbrž o desítky vědců (a dodejme, že i obecně uznávaných). Další pozoruhodností je, že zmíněný výsledek je více než sto let starý. A konečně poslední moment, podtrhující specifičnost tohoto případu, je osobnost autora onoho výsledku. Jeho jméno není – alespoň v části odborné komunity specializující se na matematickou analýzu – neznámé. Ve známost však vešel paradoxně především tím, že ač některé významné objevy učinil prokazatelně jako první, historie připsala jejich autorství jiným. Svým způsobem se tedy nyní tato historie znovu opakuje, byť tentokrát v jiné oblasti, a to teorii polynomů. Oním utajeným objevitelem je vynikající lotyšský matematik a šachista Piers Bohl.

1.1. Základní životopisné údaje

Piers Bohl se narodil 23. října 1865 ve městě Valka (dřívější Walka) na lotyšsko-estonských hranicích do rodiny lotyšského Němce, zabývajícího se především obcho-

prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc., Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky, PříF UP v Olomouci, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, e-mail: jan.andres@upol.cz, prof. RNDr. Jan Čermák, CSc., Ústav matematiky FSI VUT v Brně, Technická 2, 612 00 Brno, e-mail: cermak.j@fme.vutbr.cz, Ing. Lucie Fedorková, Ústav matematiky FSI VUT v Brně, Technická 2, 612 00 Brno, e-mail: Lucie.Fedorkova@vutbr.cz



Obr. 1. Portrét zachycující Pierse Bohla

dem. Základní vzdělání získal v městské škole. V roce 1878 začal navštěvovat klasické německé gymnázium ve městě Viljandi v Estonsku.

Učitelem matematiky mu zde byl Edward H. Weidemann (1854–1887), absolvent Tartuské (dříve také Dorpatské) univerzity, který zařadil do učebního plánu studium rozličných funkcí a probudil tak v Bohlovi vášeň pro matematiku. Své vysokoškolské vzdělání začal P. Bohl v roce 1884 právě na Tartuské univerzitě, na fakultě fyziky a matematiky. V roce 1886 získal zlatou medaili za svoji práci o invariantech lineárních diferenciálních rovnic. O rok později absolvoval univerzitu s titulem „kandidát matematiky“. Na stejné univerzitě pak v roce 1889 začal pracovat na diplomové práci, zabývající se teorií tzv. kvaziperiodických funkcí, a v roce 1893 získal magisterský titul. Za výzkum v oblasti diferenciálních rovnic včetně aplikací v mechanice získal v roce 1900 doktorát z aplikované matematiky na téže univerzitě.

Vedle vlastního výzkumu se věnoval i výuce – od soukromého vyučování na venkovských školách (1887–1895) po výuku na Polytechnické univerzitě v Rize (od 1895). Zde se stal vedoucím ústavu matematiky, a v roce 1900 také profesorem. I nadále se intenzivně věnoval diferenciálním rovnicím a jejich aplikacím v mechanice (např. [2]), stejně tak jako výzkumu v dalších oblastech matematiky. Během první světové války působil P. Bohl na univerzitě v Moskvě, kam se pak také přestěhoval. Zpět do Rigy se vrátil roku 1919, kde začal pracovat na nově založené Lotyšské univerzitě jako profesor. Dlouho zde ovšem nesetřval. 25. prosince 1921 prodělal mozkovou mrtvici, jejímž následkům podlehl.

Seznam Bohlových publikací lze najít v [25]. Obsahuje 14 prací a 2 soubory. První soubor osmi článků, přeložených do ruštiny, edičně připravili Anatolij D. Myškis (1920–2009) a I. M. Rabinovič (1911–1977) v roce 1961. Druhý soubor, editovaný Linardsem Reizinšem (1924–1991) v roce 1974, představuje kritické vydání všech Bohlových prací, resp. jejich překladů do ruštiny.

Tento (byť stručný) životopisný přehled P. Bohla by nebyl úplný, pokud bychom nezmínili jeho šachové mistrovství. Už během studií v Estonsku se projevil jako ambiciózní a talentovaný šachista, na lotyšské šachové scéně pak patřil mezi nejlepší hráče.

Jeho styl hry zaujal tehdejšího šachového velmistra Emanuela Laskera (1868–1941) a později i mistra světa v šachu v letech 1948–1963 Michaila Botvinnika (1911–1995). P. Bohl představil také jedno z šachových zahájení, které je v dnešní literatuře známé jako „variacie Riga španělské hry“. Další informace o Bohlově životě lze najít v [31], [32], [25].

1.2. Některé výsledky P. Bohla z matematické analýzy

Hlavní doménou Bohlova výzkumu byly diferenciální rovnice, metody jejich řešení a metody jejich kvalitativní analýzy. Bohlovo jméno nesou např. Poincarého–Bohlova věta, Bohlova–Perronova věta, Bohlova–Bohrova–Kadecova věta, aj. Důležitými pojmy jsou rovněž tzv. Bohlova transformace, Bohlův exponent, Bohlovo spektrum či Bohlova dichotomie.

V následujícím textu se pro ukázkou omezíme jen na dvě věty související s Bohlovým originálním vkladem: Poincarého–Bohlovu větu o pevném bodě a Bohlovu–Bohrovu větu o integraci kvaziperiodických funkcí.

V roce 1904 odvodil Bohl v [2] speciální případ slavné *Brouwerovy věty o pevném bodě* pro $n = 3$, tedy že *spojité zobrazení uzavřené koule do sebe obsahuje pevný bod* (bod, který se zobrazuje sám na sebe). Přesněji, v [2], str. 1859, dokázal Bohl ekvivalentní verzi Brouwerovy věty pro $n = 3$, a sice, že (v moderní terminologii) hranice koule není jejím retraktem. Luitzen E. J. Brouwer (1881–1966) přitom vyslovil své tvrzení až roku 1909. O rok později, v roce 1910, si Jacques Hadamard (1865–1963) všiml, že je Bohlova věta také ekvivalentní se starším tvrzením z roku 1886 Henriho Poincarého (1854–1912), načež ji nazval *Poincarého–Bohlovou větou*. Tato věta bývá nyní formulována následovně (viz např. [8]):

Věta 1 (Poincarého–Bohlova). *Nechť $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení a nechť existuje $R > 0$ takové, že $\|x\| = R$ implikuje nerovnost $f(x) \neq \lambda x$ pro všechna $\lambda > 1$. Pak existuje $x \in \mathbb{R}^n$, pro které platí $f(x) = x$ a $\|x\| \leq R$.*

Existuje řada zobecnění a rozšíření věty 1 v různých směrech, např. Hadamardova verze z roku 1910 pro spojité zobrazení na kompaktních konvexních množinách do sebe nebo abstraktní Rotheho verze v Banachových prostorech (viz např. [29], kapitola 4). Formálně blízká vět 1 je také tzv. *Schaeferova verze Lerayovy–Schauderovy věty*, hojně užívaná v aplikacích na okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice (viz [30]). Pro čtenáře znalé teorie diferenciálních rovnic dodejme, že vyslovení této věty v původní nekonečnědimenzionální variantě by vyžadovalo abstraktnější přípravný aparát přesahující rámec a zaměření tohoto příspěvku. Omezíme se proto na konečně dimenzionální verzi tohoto tvrzení.

Věta 2 (Lerayova–Schauderova–Schaeferova). *Libovolné spojité zobrazení $f : \mathcal{B}_R \rightarrow \mathbb{R}^n$ uzavřené koule $\mathcal{B}_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq R\}$ takové, že $\lambda f(x) \neq x$ pro všechna $(x, \lambda) \in \partial \mathcal{B}_R \times (0, 1)$, kde $\partial \mathcal{B}_R := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = R\}$ značí hranici $\mathcal{B}_R$, má pevný bod v $\mathcal{B}_R$, tj. existuje $x \in \mathcal{B}_R$ takové, že $f(x) = x$.*

Ačkoliv za zakladatele teorie tzv. skoroperiodických funkcí je právem považován Harald Bohr (1887–1951), mladší bratr známějšího kvantového fyzika Nielse Bohra (1885–1962), P. Bohl se jako první zabýval speciální podtřídou tzv. kvaziperiodických funkcí (a to již v roce 1893, viz [1]). Název kvaziperiodická funkce nezávisle použil až

v roce 1904 Ernest Esclangon (1876–1954). Tuto okolnost si uvědomil Paul Painlevé (1863–1933), který zřejmě zprostředkoval korespondenci obou autorů. Ti gentlemansky přisuzovali prioritu jeden druhému.

Kvaziperiodickou funkci lze, zhruba řečeno, popsat pomocí alespoň dvou periodických funkcí takových, že podíl jejich period nemusí být racionální číslo, např. $\sin(x)$, $\sin(\sqrt{2}x)$. Přesněji, řekneme, že funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je *kvaziperiodická*, jestliže ji lze vyjádřit ve tvaru $f(t) = F(\omega_1 t, \dots, \omega_n t)$, kde $F(x_1, \dots, x_n)$ je spojitá funkce, která je 2π -periodická ve všech proměnných $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 2$. Kladná reálná čísla $\omega_1, \dots, \omega_n$, po nichž požadujeme, aby byla racionálně lineárně nezávislá, se nazývají *základní frekvence* funkce f . V případě funkce

$$f(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2}x) \quad (1)$$

jsou základními frekvencemi čísla $\omega_1 = 1$ a $\omega_2 = \sqrt{2}$. Poněvadž $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2}$ je iracionální číslo, je daná funkce ryze kvaziperiodická (tj. neperiodická).

Aniž bychom definovali obecnější pojem skoroperiodické funkce (případné zájemce o tuto problematiku odkazujeme na popularizační článek Alexandra Fischera [15]), lze následující Bohlova–Bohrova větu zúžit na již zmíněnou podtřídu kvaziperiodických funkcí (viz [3]).

Věta 3 (Bohlova–Bohrova). *Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá kvaziperiodická (obecněji skoroperiodická) funkce. Její integrál (primitivní funkce) $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ je opět kvaziperiodická (obecněji skoroperiodická) funkce právě tehdy, když je F ohraničená funkce.*

Jelikož pro (1) je

$$F(t) = \int_0^t \left[\sin(s) + \sin(\sqrt{2}s) \right] ds = -\cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\sqrt{2}t) + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ohraničená funkce, je podle věty 3 rovněž kvaziperiodická.

Rozšířením věty 3 do abstraktních Banachových prostorů je tzv. Bohlova–Bohrova–Kadecova věta, viz např. [16].

Další ukázky by vyžadovaly sofistikovanější přípravu, a proto od nich upustíme. Nicméně pro případné zájemce uvedeme alespoň odkaz na zajímavý článek [14] o určení a aplikaci Bohlova spektra pro lineární neautonomní diferenciální rovnice.

Jak bylo uvedeno výše, P. Bohl významně ovlivnil i jiné oblasti matematiky. My se v dalším textu soustředíme na jeho výsledek publikovaný v článku [4], který zůstal prakticky zapomenut, ačkoliv jeho přínos do teorie polynomů a teorie diferenciálních rovnic je zcela evidentní. Poněvadž je namístě uvést tento výsledek v širším kontextu, zaměříme se nejprve na několik obecných otázek spojených s lokalizací kořenů polynomů. Následující část pak věnujeme formulaci zmíněného Bohlova výsledku a řadě souvisejících komentářů.

2. O rozložení kořenů polynomů v komplexní rovině

Otázky spojené s lokalizací kořenů polynomů jsou studovány nejen v rámci analytické, algebraické a geometrické teorie polynomů, ale také v souvislosti s kvalitativní analýzou diferenciálních a diferenčních rovnic. Vyšetřování rozložení kořenů polynomu v závislosti na jeho vstupních parametrech probíhalo a dosud probíhá v obou zmíněných výzkumných směrech (a to do značné míry nezávisle na sobě). V další části budeme diskutovat několik základních otázek řešených v souvislosti s problematikou rozložení kořenů polynomu – nejprve v obecném případě, a poté ve speciálním případě trojčlenného polynomu, tzv. trinomu.

2.1. Příklad obecného polynomu

Uvažujme polynom k -tého stupně

$$P(\lambda) = \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \dots + p_{k-1}\lambda + p_k$$

s reálnými či komplexními koeficienty p_i . Problém lokalizace kořenů polynomu P lze uchopit různými způsoby; my se v dalším zaměříme především na otázku formulace podmínek zaručujících, že polynom P má právě m kořenů ležících ve vymezené části komplexní roviny. Tento problém má úzkou souvislost s kvalitativní analýzou dynamických rovnic. Skutečně, je-li P charakteristickým polynomem diferenciální rovnice

$$y^{(k)} + p_1y^{(k-1)} + \dots + p_{k-1}y' + p_ky = 0, \quad (2)$$

pak je otázka asymptotické stability této rovnice (tedy vlastnost, že každé řešení (2) se s rostoucí hodnotou argumentu blíží limitně k nule) ekvivalentní s příslušností všech charakteristických kořenů do levé poloviny komplexní roviny. Podobně v diskrétním případě, uvažujeme-li diferenční rovnici

$$x_n + p_1x_{n-1} + \dots + p_{k-1}x_{n-k+1} + p_kx_{n-k} = 0 \quad (3)$$

se stejným charakteristickým polynomem P , pak je otázka její asymptotické stability ekvivalentní požadavku, aby všechny kořeny P měly velikost menší než jedna. Tedy zatímco v případě rovnice (2) je onou vymezenou částí komplexní roviny (tzv. oblastí stability pro danou rovnici) její levá polovina, v případě rovnice (3) jde o jednotkový kruh. Jinak (a poněkud zjednodušeně) vyjádřeno, oblasti stability pro diferenciální rovnice kladou obvykle podmínky na úhel charakteristických kořenů, zatímco v případě diferenčních rovnic jde o podmínky kladené na jejich velikost.

Ve výše zmíněných souvislostech můžeme zformulovat následující dva problémy z oblasti lokalizace kořenů polynomů (předpokládáme zde, že m je celé číslo splňující $0 \leq m \leq k$):

Problém A. Formulujte podmínky pro parametry polynomu P zaručující, že právě m jeho kořenů má zápornou reálnou část.

Problém B. Formulujte podmínky pro parametry polynomu P zaručující, že právě m jeho kořenů má velikost menší než jedna.

Položíme-li $m = k$, pak předepsanou lokalizační vlastnost požadujeme po všech kořenech P a formulace obou problémů se tak redukuje na podmínky asymptotické stability rovnic (2) a (3).

Odpovědi na oba uvedené problémy jsou známy a spojené se jmény význačných matematiků. V případě problému A se jedná o tzv. Routhovo–Hurwitzovo kritérium, které se běžně aplikuje v odborných člancích věnovaných analýze stability řešení diferenciálních rovnic a které je standardní součástí učebních textů k této problematice. Odpověď na problém B pak dává výsledek dokázaný Issaiem Schurem (1875–1941) a jeho žákem Arthurem Cohnem (1894–1940). Tento výsledek svojí formální podobou připomíná tvrzení Routhova–Hurwitzova kritéria, není však v matematické komunitě tak obecně známý; proto ho nejprve připomeneme v jeho klasické podobě (viz např. [22]). Než tak učiníme, v následující definici zavedeme jedno terminologické zjednodušení, které budeme užívat v celém dalším textu.

Definice 1. Kořen polynomu P , či jeho speciálních tvarů uvažovaných dále, nazveme *vnitřní* (resp. *unimodulární*), jestliže je jeho velikost menší než jedna (resp. rovna jedné).

Jinak vyjádřeno, vnitřní (unimodulární) kořen je takový, který leží v komplexní rovině uvnitř (na hranici) jednotkového kruhu.

Věta 4 (Schurovo–Cohnovo kritérium). *Nechť $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{C}$ a předpokládejme, že všechny determinanty*

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} p_k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & p_1 & \dots & p_{j-1} \\ p_{k-1} & p_k & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & p_{j-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{k-j+1} & p_{k-j+2} & p_{k-j+3} & \dots & p_k & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{p}_k & \bar{p}_{k-1} & \dots & \bar{p}_{k-j+1} \\ \bar{p}_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{p}_k & \dots & \bar{p}_{k-j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{p}_{j-1} & \bar{p}_{j-2} & \bar{p}_{j-3} & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & \bar{p}_k \end{vmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, k,$$

jsou nenulové (symbolem $\bar{p}_\ell$ zde rozumíme číslo komplexně sdružené k p_ℓ a dále kládeme $p_0 = \bar{p}_0 = 1$). Pak P nemá žádný unimodulární kořen a počet jeho vnitřních kořenů je roven počtu znaménkových změn v posloupnosti $1, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$.

Omezíme-li se na případ polynomu P s reálnými koeficienty, a položíme-li $m = k$, pak se Routhovo–Hurwitzovo kritérium a Schurovo–Cohnovo kritérium redukuje na podmínky asymptotické stability pro diferenciální a diferenční rovnice s charakteristickým polynomem P . V této souvislosti uvedeme následující důsledek Schurova–Cohnova kritéria (odvození tohoto důsledku není početně zcela bezprostřední).

Věta 5 (Důsledek Schurova–Cohnova kritéria). *Nechť $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{R}$ a označme*

$$D(j) = \det \begin{pmatrix} A_j & B_j \\ B_j & A_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

kde

$$A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ p_{j-1} & \dots & p_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_j = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & p_k \\ \vdots & \ddots & \ddots & p_{k-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ p_k & p_{k-1} & \dots & p_{k-j+1} \end{pmatrix}.$$

Pak všechny kořeny P jsou vnitřní právě tehdy, když

$$P(1) > 0, \quad (-1)^k P(-1) > 0 \quad (4)$$

a zároveň

$$D(1) > 0, \quad D(2) > 0, \quad \dots, \quad D(k-1) > 0. \quad (5)$$

Nyní blíže prozkoumáme, nakolik věta 5 dává odpověď na problém B (při volbě $m = k$). Posoudíme tedy, jaké generuje typy podmínek zaručujících, že polynom P s reálnými koeficienty $p_1, \dots, p_k$ má všechny své kořeny vnitřní. Zaměříme se přitom na případy $k = 2, 3, 4$, tedy polynomy kvadratické, kubické a kvartické.

Příklad 1. (a) Uvažujme nejprve kvadratický polynom

$$P_2(\lambda) = \lambda^2 + p_1\lambda + p_2.$$

Z podmínek (4) a (5) věty 5 vyplývá, že oba kořeny polynomu P_2 jsou vnitřní právě tehdy, když platí

$$\begin{aligned} P_2(1) &= 1 + p_1 + p_2 > 0, & (-1)^2 P_2(-1) &= 1 - p_1 + p_2 > 0, \\ D(1) &= \det \begin{pmatrix} 1 & p_2 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - (p_2)^2 > 0. \end{aligned}$$

Dohromady, kvadratický polynom P_2 má oba své kořeny vnitřní právě tehdy, když

$$|p_1| < 1 + p_2 < 2.$$

Oblast vymežující všechny takové koeficienty p_1, p_2 je ilustrována na obrázku 2. Dodejme, že tento výsledek lze získat (resp. ověřit) rovněž z přímého vyjádření kořenů polynomu P_2 pomocí jeho koeficientů.

(b) Tvar těchto podmínek nyní odvodíme pro kubický polynom

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda + p_3,$$

kdy z věty 5 dostáváme vztahy

$$P_3(1) = 1 + p_1 + p_2 + p_3 > 0, \quad (-1)^3 P_3(-1) = 1 - p_1 + p_2 - p_3 > 0$$

a

$$\begin{aligned} D(1) &= \det \begin{pmatrix} 1 & p_3 \\ p_3 & 1 \end{pmatrix} = 1 - (p_3)^2 > 0, \\ D(2) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & p_3 \\ p_1 & 1 & p_3 & p_2 \\ 0 & p_3 & 1 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 \end{pmatrix} = (1 - (p_3)^2)^2 - (p_2 - p_1 p_3)^2 > 0. \end{aligned}$$

Shrneme-li výše uvedené nerovnosti, pak má kubický polynom P_3 všechny své tři kořeny vnitřní právě tehdy, když

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \quad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - (p_3)^2. \quad (6)$$

Poznamenejme, že přímé odvození vztahů (6) z Cardanových vzorců pro vyjádření kořenů kubického polynomu by přineslo značné početní komplikace. Proto je zde výhodnost Schurova–Cohnova kritéria již evidentní.

(c) Pokračujeme-li v našich úvahách dál, pak lze podobným (pochopitelně však početně náročnějším) způsobem zjistit, že polynom

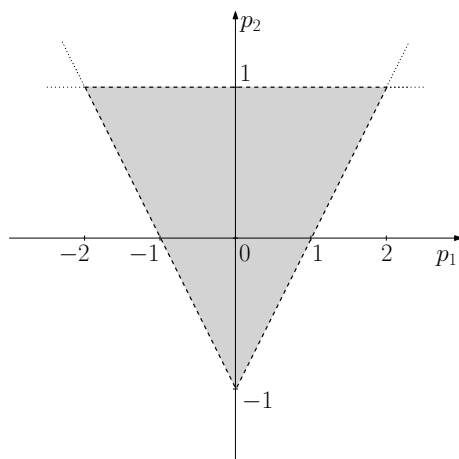
$$P_4(\lambda) = \lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2 + p_3 \lambda + p_4$$

má všechny své čtyři kořeny vnitřní právě tehdy, když

$$|p_4| < 1, \quad |p_1 + p_3| < 1 + p_2 + p_4$$

a

$$|p_2(1 - p_4) + p_4(1 - (p_4)^2) + p_1(p_1 p_4 - p_3)| < p_2 p_4(1 - p_4) + 1 - (p_4)^2 + p_3(p_1 p_4 - p_3).$$



Obr. 2. Množina všech reálných dvojic (p_1, p_2) (šedá barva), které generují dva vnitřní kořeny polynomu P_2

Z komplikujícího se tvaru těchto výrazů je evidentní, že Schurovo–Cohnovo kritérium nemůže dát pro polynom P obecného stupně k podobně explicitní podmínky, jako v případě polynomů nižších (pevných) stupňů. Podstata, proč tomu tak je, spočívá v tom, že formulace Schurova–Cohnova kritéria neumožňuje stanovit hodnotu m počtu vnitřních kořenů P v přímé závislosti na jeho koeficientech $p_1, \dots, p_k$; neznáme tedy explicitní vyjádření funkce $m = g(p_1, \dots, p_k)$. Pokud bychom takové vyjádření znali, pak by odpověď na problém B byla na dosah – stačilo by provést příslušnou početní analýzu tohoto vyjádření.

Otázka nalezení předpisu $m = g(p_1, \dots, p_k)$ však zodpovězena není (a pro komplikovanost tohoto problému ji současný stav teoretického poznání zřejmě ani neumožňuje). Proto se výzkum v této oblasti zaměřil na různé speciální případy polynomu P . Jedním z nejvýznamnějších je případ, kdy se P redukuje na tříčlenný polynom, tzv. trinom, ve tvaru

$$Q(\lambda) = \lambda^k + a\lambda^\ell + b, \quad (7)$$

kde $k > \ell$ jsou přirozená čísla a a, b jsou reálné, příp. komplexní konstanty. Tento polynom lze chápat nejen jako rozšíření kvadratického polynomu P_2 směrem k obecným mocninám, ale také jako významný speciální případ s řadou aplikací v teorii diferenčních rovnic. Dodejme ještě, že v dalším textu se omezíme na případ nesoudělných mocnin k, ℓ trinomů Q . Činíme tak bez újmy na obecnosti, poněvadž v případě soudělnosti zajistí substituce $\lambda^{\gcd(k, \ell)} = \mu$, kde $\gcd(k, \ell)$ je největší společný dělitel čísel k a ℓ , přechod mezi oběma případy.

2.2. Příklad trojčlenného polynomu (trinomů)

Vyšetřování kořenů trinomů Q má bohatou historii, počínaje pracemi maďarského matematika Jánoše Bolyaie (1802–1860), přes další generace matematiků až do současnosti (podrobný historický přehled k této problematice je uveden v článcích [24] a [33]). Navzdory jejich úsilí (i navzdory formální jednoduchosti trinomů Q) však výzkum k tomuto tématu není stále ukončen. Mezi studované problémy patří otázky spojené s lokalizací kořenů Q , tedy stanovení sektorů v komplexní rovině obsahujících právě jeden kořen Q , dále nalezení podmínek, při jejichž splnění má Q alespoň/právě jeden kořen s předepsanou velikostí, a v neposlední řadě i výše zmíněná otázka stanovení počtu vnitřních kořenů Q v závislosti na jeho koeficientech. Z tohoto výčtu zformulujeme dva problémy pregnantněji:

Problém C. Uvažujme trinom Q s obecně komplexními koeficienty a, b a necht m je počet jeho vnitřních kořenů. Nalezněte explicitní vyjádření závislosti $m = g(a, b, k, \ell)$.

Problém D. Formulujte podmínky na parametry a, b, k, ℓ zaručující, že Q má alespoň jeden unimodulární kořen.

V další části stručně okomentujeme aktuální stav poznání k těmto otázkám. Z nedávných výsledků úzce souvisejících s problémem C zmiňme následující tvrzení, které je shrnutím poznatků postupně uveřejněných v článcích [6], [7] a [17] pro trinom Q se speciálními koeficienty $a = 1$ a $b = -1$.

Věta 6. *Necht $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Uvažujme trinom*

$$R(\lambda) = \lambda^k + \lambda^\ell - 1$$

a necht m je počet jeho vnitřních kořenů. Pak

$$m = 2 \left\lceil \frac{k + \ell}{6} \right\rceil - 1 \quad (8)$$

(symbol $\lceil \cdot \rceil$ znamená horní celou část příslušného čísla). Navíc, jestliže 6 dělí $k + \ell$, pak má R právě 2 unimodulární kořeny.

Věta 6 tedy popisuje tvar funkce g , jejíž nalezení je požadováno ve formulaci problému C, a to pro speciální trinom R (přesněji, věta 6 zachycuje závislost m na mocninách k a ℓ obsažených v tomto trinom). Navíc se vyjadřuje i k problému D. Zodpovězením problému D, tentokrát již přímo pro trinom Q (dokonce s komplexními a, b), se zabýval článek [33]. Uvedme formulaci příslušného tvrzení.

Věta 7. *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$ a necht' $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Jestliže b chápeme jako pevné, pak Q má alespoň jeden unimodulární kořen právě tehdy, když pro reálnou a imaginární část koeficientu a platí vztahy*

$$\begin{aligned}\Re(a) &= -\cos\left(t + \frac{(k-\ell)\arg(b)}{k}\right) - |b| \cos\left(\frac{\ell t}{\ell-k} + \frac{(k-\ell)\arg(b)}{k}\right), \\ \Im(a) &= -\sin\left(t + \frac{(k-\ell)\arg(b)}{k}\right) - |b| \sin\left(\frac{\ell t}{\ell-k} + \frac{(k-\ell)\arg(b)}{k}\right)\end{aligned}\quad (9)$$

pro vhodné $t \in (-(k-\ell)\pi, (k-\ell)\pi]$.

Upozorněme na jistou geometrickou zajímavost vyplývající z tohoto tvrzení. Vztahy (9) jsou totiž parametrickými rovnicemi hypotrochoidy v komplexní Gaussově a -rovině (tedy křivky, kterou opisuje bod spojený s jistou kružnicí, odvalující se po vnitřku jiné, větší kružnice).

Jak již bylo výše naznačeno, uvedené polynomiální problémy mají zásadní důležitost také při kvalitativní analýze diferenčních rovnic. Skutečně, problém B je součástí procesu hledání podmínek asymptotické stability pro tyto rovnice, problém D naopak úzce souvisí s formulací podmínek zaručujících existenci periodického řešení. Proto není překvapující, že významným přispěvatelem k zodpovězení těchto polynomiálních problémů byla také komunita matematiků pracujících v oblasti diferenčních rovnic.

V dalším přehledu se zaměříme především na výsledky související s trinomem Q , který je charakteristickým polynomem diferenční rovnice

$$x_n + ax_{n-k+\ell} + bx_{n-k} = 0. \quad (10)$$

Navíc, uvažujeme-li (10) ve vektorovém tvaru

$$x_n + Ax_{n-k+\ell} + Bx_{n-k} = 0, \quad (11)$$

kde A, B jsou čtvercové matice řádu d , pak za předpokladu komutativity A, B (tj. při splnění vlastnosti $AB = BA$) lze provést dekompozici charakteristického polynomu soustavy (11) na součin d trinomů tvaru (7), kde a, b jsou (odpovídajícím způsobem seřazená) vlastní čísla matic A, B . Má tedy dobrý smysl vyšetřovat trinom Q také s komplexními koeficienty a, b .

Současně zdůrazněme, že kořenová analýza trinomu Q má důležitou roli také při vyšetřování diskrétních modelů ve tvaru nelineárních diferenčních rovnic (speciálně při posuzování stability jejich ekvilibrií metodou linearizace). V rámci teorie diferenčních rovnic byly právě tyto modely prvotním impulsem pro vyšetřování zmíněných polynomiálních problémů. Než uvedeme stručný přehled a komentáře k existujícím výsledkům, přeformulujeme problém B pro případ trinomu Q a volbu $m = k$, tedy do tvaru, který byl nejčastějším předmětem vyšetřování.

Problém B*. Nalezněte podmínky na parametry a, b, k, ℓ zaručující, že Q má všechny své kořeny vnitřní.

První výsledek v tomto směru získali Simon A. Levin a Robert M. May v článku [21] při studiu stability rovnovážného stavu některých populačních modelů. Ačkoliv má tento článek bezesporu zajímavý interpretační charakter, jeho hlavním výsledkem je následující vlastnost speciálního trinomu

$$S(\lambda) = \lambda^k - \lambda^{k-1} + b.$$

Věta 8. *Nechť $b \in \mathbb{R}$. Pak všechny kořeny trinomu S jsou vnitřní právě tehdy, když*

$$0 < b < 2 \cos \frac{(k-1)\pi}{2k-1}. \quad (12)$$

Věta 8 tedy dává odpověď na problém B* ve speciálním případě Q s parametry $a = -1$ a $\ell = k - 1$. Rozšíření tohoto výsledku na případ trinomu Q s obecnými reálnými koeficienty a, b (stále však při volbě $\ell = k - 1$) bylo motivováno prací [9], ve které byl studován model populace antarktických velryb. Opět v souvislosti s užitím metody linearizace zde vyvstala otázka nalezení podmínek zaručujících, že trinom Q (při $\ell = k - 1$) má všechny své kořeny vnitřní.

Články [21] a [9] našly odezvu mezi matematiky specializujícími se na teorii diferenčních rovnic, kteří se začali těmito otázkami, speciálně pak problémem B*, systematicky zabývat. Jako ilustraci dvou hlavních typů podmínek, které byly v tomto směru dosaženy, okomentujeme následující dva výsledky.

Autoři článku [19] zformulovali odpověď na problém B* pro případ reálných hodnot a, b . Pro tento účel zavedli otevřenou oblast Ω ležící v (a, b) -rovině, která je omezena dvěma přímkami

$$a + b = -1 \quad \text{a} \quad (-1)^{k-\ell}a + (-1)^kb = -1$$

a dvěma transcendentními křivkami

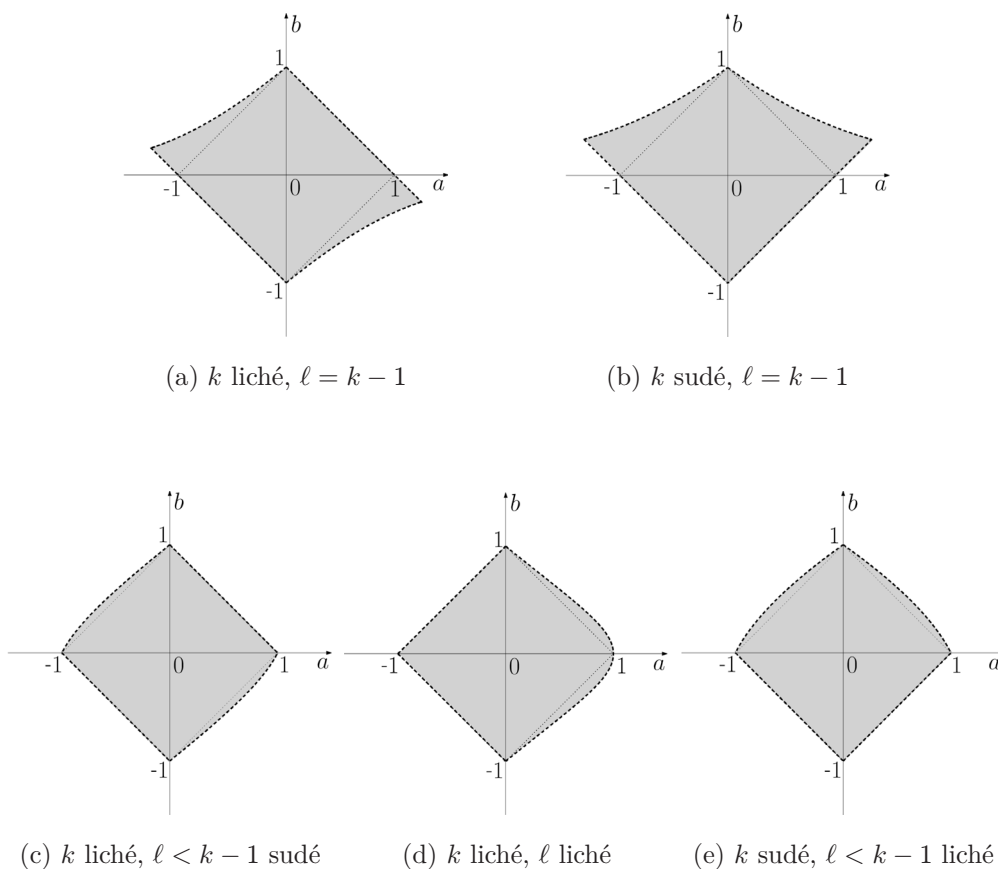
$$\begin{aligned} a &= -\frac{\sin(k\varphi)}{\sin(\ell\varphi)}, & b &= \frac{\sin((k-\ell)\varphi)}{\sin(\ell\varphi)}, \\ a &= (-1)^{k-\ell+1} \frac{\sin(k\varphi)}{\sin(\ell\varphi)}, & b &= (-1)^k \frac{\sin((k-\ell)\varphi)}{\sin(\ell\varphi)}, \end{aligned}$$

kde φ probíhá mezi $\frac{j\pi}{k}$ a $\frac{s\pi}{k-\ell}$, přičemž j, s jsou přirozená čísla splňující Bézoutovu rovnost $|(k-\ell)j - ks| = 1$, $j < k$, s je liché. Pak platí:

Věta 9. *Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ a nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Všechny kořeny trinomu Q jsou vnitřní právě tehdy, když $(a, b) \in \Omega$.*

Z této věty tedy vyplývá popis hranice množiny všech reálných dvojic (a, b) generujících trinom Q , jehož všechny kořeny jsou vnitřní (viz také obrázek 3).

Druhý základní typ podmínek, dávajících odpověď na problém B*, byl formulován poněkud odlišně. Jako ilustraci uvedme např. výsledek z článku [23], který vyšetřoval problém B* pro případ trinomu Q s reálným koeficientem a , ryze imaginárním koeficientem b a mocninou $\ell = k - 1$.



Obr. 3. Oblast Ω v závislosti na paritě k a ℓ (šedá barva)

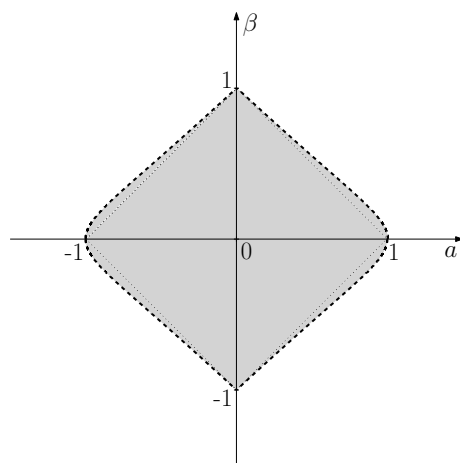
Věta 10. *Nechť $a, \beta \in \mathbb{R}$ a necht $k \in \mathbb{N}$. Pak všechny kořeny trinomu Q , kde $b = i\beta$ a $\ell = k - 1$, jsou vnitřní právě tehdy, když parametry a, β splňují nerovnosti*

$$|a| < 1 \quad \text{a} \quad |\beta| < \sqrt{a^2 + 1 - 2|a| \cos \varphi},$$

kde φ řeší rovnici $|a| \cos((k - 1)\varphi) = \cos(k\varphi)$ na intervalu $(0, \frac{\pi}{2k})$.

Množinu všech reálných dvojic (a, β) vyhovujících podmínkám věty 10 zachycuje obrázek 4.

Na velmi podobných principech, vycházejících z formulací vět 9 a 10, je postavena i řada dalších výsledků vztahujících se k problému B*. V této souvislosti zmiňme alespoň články [18] (případ $a, b \in \mathbb{R}$), [12] (případ $a, b \in \mathbb{R}$), [13] (případ $a, b \in \mathbb{R}$, $\ell = 1$), [20] (případ $a, b \in \mathbb{R}$, $\ell = k - 1$), [26] (případ $a, b \in \mathbb{R}$, $\ell = k - 1$) a [28] (případ $a, b \in \mathbb{R}$, $\ell = k - 2$). Další odkazy a komentáře k tomuto tématu lze nalézt v přehledovém článku [10].



Obr. 4. Množina všech reálných dvojic (a, β) (šedá barva) generujících trinom Q , jehož všechny kořeny jsou vnitřní

V další kapitole ukážeme, že k větám 6–10 (stejně tak jako k závěrům mnoha dalších prací, viz např. výše citované články) má podstatným způsobem co říci jeden pozapomenutý výsledek P. Bohla. Ten některé z komentovaných výsledků implikuje přímo, jiné po menších početních úpravách a pro další zase nabízí nová alternativní vyjádření.

3. P. Bohl a počet vnitřních kořenů trinomů

Do výčtu vědeckých výsledků a prací P. Bohla, které jsme dosud nekomentovali, patří také článek [4]. Sám Bohl hlavní tvrzení tohoto článku okomentoval ve smyslu, že je užitečné především v jiném jeho výzkumu, týkajícím se teorie sekulárních perturbací. Další vývoj však ukázal, že význam tohoto výsledku je podstatně širší.

3.1. Bohlovův výsledek z roku 1908

Prozatím bez dalšího předběžného komentáře uvedeme hlavní výsledek článku [4]. Až na drobné stylistické a technické úpravy ho ponecháváme v původní formulační podobě.

Věta 11. *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$, a nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Pro určení počtu m vnitřních kořenů trinomů Q rozlišíme dva případy:*

I. *Je-li každá z hodnot 1, $|a|$, $|b|$ menší než součet dvou zbývajících hodnot, pak lze sestavit trojúhelník, jehož délky stran jsou rovny právě číslům 1, $|a|$, $|b|$. Označme α úhel ležící oproti straně s délkou 1, a β úhel ležící oproti straně s délkou $|a|$. Počet vnitřních kořenů trinomů Q je pak roven počtu celých čísel ležících mezi hodnotami*

$$\frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b) + (k - \ell)\pi}{2\pi} - \frac{k\alpha + \ell\beta}{2\pi}$$

a

$$\frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b) + (k - \ell)\pi}{2\pi} + \frac{k\alpha + \ell\beta}{2\pi}.$$

II. Je-li některá z hodnot 1, $|a|$, $|b|$ větší nebo rovna součtu dvou zbývajících hodnot, pak, až na dvě dále uvedené výjimky, platí pro počet m vnitřních kořenů Q tyto vztahy:

(i) Jestliže $|b| \geq 1 + |a|$, pak $m = 0$.

(ii) Jestliže $|a| \geq 1 + |b|$, pak $m = \ell$.

(iii) Jestliže $1 \geq |a| + |b|$, pak $m = k$.

Výše zmíněné výjimky jsou tyto: Za prvé, je-li $|a| = 1 + |b|$, $|a| \geq \frac{k}{\ell}$ a nadto číslo

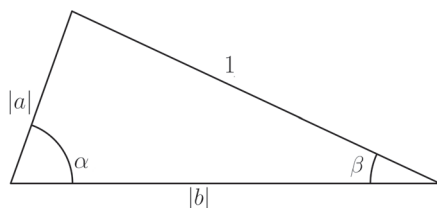
$$\frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b)}{\pi} + k$$

je celé. Za druhé, je-li $1 = |a| + |b|$ a nadto číslo

$$\frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b)}{\pi} - \ell$$

je celé. V obou těchto výjimečných případech se výše uvedená hodnota počtu vnitřních kořenů snižuje o jedničku, takže v případě první výjimky platí $m = \ell - 1$, a v případě druhé $m = k - 1$.

Formulace věty 11 se po prvním přečtení zdá být možná poněkud těžkopádná. Je z ní sice zřejmá úzká souvislost s problémem B*, ale nemusí z ní být hned jasné požadované vyjádření závislosti $m = g(a, b, k, \ell)$. Pokusme se tedy větu 11 převést do více analytické podoby.



Obr. 5. Trojúhelník se stranami o velikostech 1, $|a|$, $|b|$ a rozložení úhlů α , β

Předpoklady části I zachycuje obrázek 5. Užitím kosinové věty z něj vyplývají vyjádření úhlů α , β ve tvaru

$$\alpha = \arccos \left(\frac{-1 + |a|^2 + |b|^2}{2|ab|} \right), \quad \beta = \arccos \left(\frac{1 - |a|^2 + |b|^2}{2|b|} \right). \quad (13)$$

Vyjádření vztahu pro výpočet vnitřních kořenů Q dále pracuje s termínem „počet celých čísel ležících mezi dvěma reálnými hodnotami“. Ponecháme na rozmyšlení čtenáře, jak lze tento počet zachytit analytickým vztahem (viz dále).

Část II Bohlovy věty je již formulačně jednodušší (dodejme, že některé vlastnosti uvedené v této části platí i pro obecný polynom P). Po zapracování dvou výjimek zmíněných v části II a užitím předcházejících poznámek k části I dostáváme následující reformulaci věty 11 (viz také [11]).

Věta 12. *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$, a nechť $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Počet m vnitřních kořenů trinomu Q lze stanovit takto:*

- (i) *Jestliže $|b| \geq 1 + |a|$, pak $m = 0$.*
- (ii) *Jestliže $1 > |a| + |b|$, pak $m = k$.*
- (iii) *Jestliže $|a| > 1 + |b|$, pak $m = \ell$.*
- (iv) *Jestliže $|a| = 1 + |b| < \frac{k}{\ell}$ a $\frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b) + (k - \ell)\pi}{\pi} + \ell$ je celé sudé, pak $m = \ell$.*
- (v) *Jestliže*

$$|b| < 1 + |a|, \quad 1 \leq |a| + |b|, \quad |a| \leq 1 + |b|$$

a alespoň jeden z předpokladů (iv) neplatí, pak

$$m = \lceil \tau^+ \rceil - \lfloor \tau^- \rfloor - 1, \quad (14)$$

kde symboly $\lceil \cdot \rceil$, $\lfloor \cdot \rfloor$ znamenají horní, resp. dolní celou část daného čísla a

$$\tau^\pm = \frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b) + (k - \ell)\pi}{2\pi} \pm \frac{k\alpha + \ell\beta}{2\pi} \quad (15)$$

(vyjádření úhlů α, β jsou dána vztahy (13)).

Věta 12 dává úplnou odpověď na problém C, specifikuje tedy počet m vnitřních kořenů Q v přímé závislosti na jeho parametrech a, b, k, ℓ . V další části ukážeme, jak lze s pomocí věty 12 odvodit odpovědi na další výše formulované problémy, a ukážeme také její souvislost s dříve komentovanými výsledky.

3.2. Bohlovův výsledek v kontextu výzkumu dalších autorů

Začneme větou 6, která by měla být přímým důsledkem věty 12 pro případ trinomu R . Skutečně, položíme-li $a = 1$, $b = -1$, pak tato volba vede na případ (v) věty 12, přičemž $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$. Vzorec (14) pak dává

$$m = \left\lceil \frac{k + \ell}{6} \right\rceil - \left\lfloor -\frac{k + \ell}{6} \right\rfloor - 1 = 2 \left\lceil \frac{k + \ell}{6} \right\rceil - 1,$$

což je vztah (8) věty 6.

Dále se zaměříme na problém B*, na který výsledek P. Bohla rovněž umí dát odpověď – tentokrát s přispěním o něco většího úsilí, než tomu bylo v předcházejícím případě (pro větší formální jednoduchost se v dalším omezíme na trinom Q s reálnými

koeficienty a, b). Potřebujeme tedy nalézt podmínky na všechny parametry a, b, k, ℓ , které zajistí pouze vnitřní kořeny Q . Ptáme se tedy, jaké podmínky na parametry a, b, k, ℓ dávají ve větě 12 odpověď $m = k$. Evidentně jde o případ (ii) této věty, patrně však může jít i o případ (v). Zabývejme se proto blíže tímto případem a analyzujeme s přihlédnutím k (14) vztah

$$k = \lceil \tau^+ \rceil - \lfloor \tau^- \rfloor - 1 \quad (16)$$

(kde $\tau^\pm$ je dáno (15)), ze kterého bychom potřebovali získat zmíněné podmínky.

Protože hodnoty a, b jsou reálné, číslo

$$\theta = \frac{k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b) + (k - \ell)\pi}{\pi}$$

je celé. Snadno ověříme, že θ je sudé právě tehdy, když $a^k(-b)^{k-\ell} > 0$ (podobně θ je liché právě tehdy, když $a^k(-b)^{k-\ell} < 0$). Necht nejprve θ je sudé. Pak se (16) zjednoduší na tvar

$$\frac{k+1}{2} = \left\lceil \frac{k\alpha + \ell\beta}{2\pi} \right\rceil.$$

Tedy k musí být liché a navíc platí $k\pi - \pi < k\alpha + \ell\beta \leq k\pi + \pi$. Pravá (neostrá) nerovnost je přitom splněna automaticky. Skutečně, užitím obrázku 5 lze pravou nerovnost přepsat na vztah

$$-\pi \leq k \arccos \frac{1+a^2-b^2}{2|a|} + (k-\ell) \arccos \frac{1-a^2+b^2}{2|b|},$$

který je splněn pro všechna a, b , pro něž mají uvedené cyklometrické funkce smysl. Odvodili jsme tedy, že za předpokladu sudosti θ vztah (16) platí právě tehdy, je-li k liché a $k\pi - \pi < k\alpha + \ell\beta$ neboli

$$k(\pi - \alpha) - \ell\beta < \pi. \quad (17)$$

Podobně pro θ liché dostáváme, že (16) platí právě tehdy, je-li k sudé a platí (17). Užitím vlastnosti $\pi - \arccos(x) = \arccos(-x)$, $|x| \leq 1$, tedy dostáváme následující důsledek věty 12.

Důsledek 1. *Necht $a, b \in \mathbb{R}$, $ab \neq 0$, a necht $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Pak všechny kořeny trinomů Q jsou vnitřní právě tehdy, když platí buď $1 > |a| + |b|$, nebo*

$$|b| \leq 1 + |a|, \quad 1 \leq |a| + |b|, \quad |a| \leq 1 + |b|, \quad (-1)^\ell a^k b^{k-\ell} < 0, \\ k \arccos \left(\frac{1+a^2-b^2}{2|a|} \right) + (k-\ell) \arccos \left(\frac{1-a^2+b^2}{2|b|} \right) < \pi.$$

Obdobným způsobem lze z věty 12 odvodit odpověď na problém B* i v případě komplexních a, b . Pro formulaci příslušného tvrzení zavedeme funkci $\omega = \omega(x)$ jako 2π -periodické rozšíření funkce $\omega^*(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ (ekvivalentně, $\omega(x) = \arccos(\cos(x))$, $x \in (-\infty, \infty)$). Pak platí:

Důsledek 2. *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$, a necht $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná. Pak všechny kořeny trinomů Q jsou vnitřní právě tehdy, když platí buď $1 > |a| + |b|$, nebo*

$$\begin{aligned} |b| \leq 1 + |a|, \quad 1 \leq |a| + |b|, \quad |a| \leq 1 + |b|, \\ k \arccos \left(\frac{1 + |a|^2 - |b|^2}{2|a|} \right) + (k - \ell) \arccos \left(\frac{1 - |a|^2 + |b|^2}{2|b|} \right) < \\ < \omega(k \arg(a) - (k - \ell) \arg(b) + \ell\pi). \end{aligned}$$

Porovnáme-li závěry důsledků 1 a 2 s dalšími výsledky k problému B^* (viz např. články [18], [12], [13], [19], [20], [23], [26] a [28] ilustrované větami 9 a 10), pak lze konstatovat následující: Bohlovův výsledek umožňuje dát odpověď na problém B^* s obecnými komplexními koeficienty a, b a obecnými přirozenými mocninami k, ℓ , zatímco výše komentované články řeší jeho speciální varianty. Navíc, formulace důsledků 1 a 2 dávají v několika ohledech efektivnější odpověď na problém B^* a zdají se být „přirozeným“ zobecněním podmínky (12) věty 8 z článku [21]. Speciálně zdůrazněme, že podmínky důsledků 1 a 2 jsou explicitní vzhledem k mocninám k a ℓ , což umožňuje efektivní posuzování stability pro příslušné diferenční rovnice.

Nakonec se vyjádříme ke vztahu věty 12 k problému C, tedy k existenci unimodulárních kořenů Q . Hlavní myšlenka příslušného odvození vychází ze spojitě závislosti kořenů trinomů Q na koeficientech a, b , užitím které lze existenci unimodulárního kořene detekovat pomocí změny hodnoty m . Po provedení příslušné početní analýzy pak věta 12 dává:

Důsledek 3. *Nechť $a, b \in \mathbb{C}$, $ab \neq 0$, necht $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k > \ell$, jsou nesoudělná a necht hodnoty $\tau^\pm$ jsou dány vztahem (15). Pak trinom Q má alespoň jeden unimodulární kořen právě tehdy, když*

$$|b| \leq 1 + |a|, \quad 1 \leq |a| + |b|, \quad |a| \leq 1 + |b|$$

a alespoň jedna z hodnot $\tau^\pm$ je celočíselná.

Snadno můžeme nahlédnout, že tento důsledek Bohlovy věty nabízí alternativní podmínku existence unimodulárního kořene trinomů Q v porovnání s podmínkou věty 7 z článku [33]. Vzhledem k výše popsané geometrické interpretaci podmínky věty 7 se tím také otevírá možnost pro alternativní popis příslušné hypotrochoidy.

3.3. Závěrečné poznámky

V kontextu předcházejících porovnání se nabízí poměrně zřejmá otázka: Jak je možné, že tento Bohlovův výsledek zapadl a po dlouhá desetiletí zůstal téměř nepovšimnut? O důvodech lze jen spekulovat, svoji roli mohlo sehrát více faktorů. Článek byl napsán v německém jazyce, což mohlo způsobit jistou překážku na cestě k jeho širší publicitě (na druhé straně, časopis *Mathematische Annalen*, v němž byl článek publikován, je tradiční a velmi kvalitní časopis již od svého založení v roce 1868). P. Bohl také možná nebyl (a stále není) v očích odborné veřejnosti spojen s teorií polynomů; koneckonců on sám tento svůj výsledek považoval spíše za „pomocný“, jak bylo zmíněno výše.

Zajímavý pohled se naskytá na citační ohlas Bohlova článku [4], kde byl tento výsledek publikován. Z databáze *Mathematical Reviews* se lze dozvědět, že do roku

2016 měl tento článek citace od pouhých dvou autorů. Jedním byl Horst Brunotte, který Bohlův výsledek evidentně znal, komentoval i aplikoval ve třech svých článcích. Tyto citace však zapadly a nevzbudily patřičnou reakci. Druhým autorem je Akihiro Kanamori, který měl podle této databáze článek [4] citovat ve své přehledové práci o teorii množin (v seznamu referencí samotné Kanamoriho práce ovšem článek [4] uveden není). V roce 2016 byl tento Bohlův výsledek citován v článku [33], z něhož se o existenci výsledku dozvěděli i autoři tohoto příspěvku. Jistým paradoxem je, že ačkoliv Bohlově výsledku byla v článku [33] věnována poměrně velká pozornost v rámci historického přehledu (je zde uveden v mírně modifikované původní formulační podobě), autoři článku [33] ho při řešení problému C nijak nevyužili. Relevance Bohlova výsledku k tomuto problému je přitom evidentní (viz důsledek 3). Během posledních několika let se pak objevily další citace článku [4], které naznačují, že matematická komunita začíná jeho význam postupně docenovat.

Na závěr zdůrazníme, že tento příspěvek v žádném případě nenahlíží kriticky na komentované výsledky odvozené bez vědomí existence Bohlova článku [4]. Ostatně i jeden z autorů tohoto příspěvku o článku [4] dlouho nevěděl, ačkoliv prováděl výzkum v související oblasti (viz [10]). Bylo by také nekorektní srovnávat práce dalších autorů s (jakýmkoliv) článkem P. Bohla, jednoho z nejvýznamnějších matematiků přelomu 19. a 20. století. Navíc některé z výše komentovaných prací obsahují i další důležitá tvrzení, s výsledkem P. Bohla již přímo nesouvisející.

Hlavním smyslem tohoto příspěvku bylo především připomenout, jak mimořádným matematikem Piers Bohl byl a ukázat, že i jeho „pomocný“ výsledek z teorie trinomů, jak ho sám chápal, významně předběhl svoji dobu. Lze proto jen doporučit bližší seznámení s alespoň některými z dalších Bohlových prací (pravidelné čtenáře Pokroků pak speciálně upozorňujeme na příspěvek Luboše Pícky [27], který uvádí a komentuje další důležitý výsledek P. Bohla z článku [5]). Nepochybně se v těchto pracích podaří najít mnohé inspirující myšlenky a třeba i další skryté překvapivé výsledky.

Poděkování. Článek byl podpořen projektem FSI-S-23-8161 Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně. Autoři také děkují recenzentovi a doc. RNDr. Antonínu Slavíkovi, Ph.D., za jejich cenné připomínky, které přispěly k vylepšení textu.

L i t e r a t u r a

- [1] BOHL, P.: *Ueber die Darstellung von Functionen einer Variablen durch trigonometrische Reihen mit mehreren einer Variablen proportionalen Argumenten*. Magisterské teze. Jurjew (Dorpat), 1893.
- [2] BOHL, P.: *Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage*. J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 179–276.
- [3] BOHL, P.: *Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie*. J. Reine Angew. Math. 131 (1906), 268–321.
- [4] BOHL, P.: *Zur Theorie der trinomischen Gleichungen*. Math. Ann. 65 (1908), 556–566.
- [5] BOHL, P.: *Über ein in der Theorie der säkularen Störungen vorkommendes Problem*. J. Reine Angew. Math. 135 (1909), 189–283.
- [6] BRILLESLYPER, M. A., SCHAUBROECK, L. E.: *Locating unimodular roots*. College Math. J. 45 (2014), 162–168.

- [7] BRILLESLYPER, M. A., SCHAUBROECK, L. E.: *Counting interior roots of trinomials*. Math. Mag. 91 (2018), 142–150.
- [8] BROWN, R. F.: *Retraction methods in Nielsen fixed point theory*. Pacific J. Math. 115 (1984), 277–297.
- [9] CLARK, C. W.: *A delayed-recruitment model of population dynamics, with an application to baleen whale populations*. J. Math. Biol. 3 (1976), 381–391.
- [10] ČERMÁK, J.: *Stability conditions for linear delay difference equations: A survey and perspectives*. Tatra Mt. Math. Publ. 63 (2015), 1–29.
- [11] ČERMÁK, J., FEDORKOVÁ, L.: *On a nearly forgotten polynomial result by P. Bohl*. Amer. Math. Monthly. 130 (2023), 176–181.
- [12] DANNAN, F. M.: *The asymptotic stability of $x(n+k) + ax(n) + bx(n-l) = 0$* . J. Difference Equ. Appl. 10 (2004), 589–599.
- [13] DANNAN, F. M., ELAYDI, S.: *The asymptotic stability of linear difference equations of advanced type*. J. Comput. Anal. Appl. 6 (2003), 1–11.
- [14] DOAN, T. S., PALMER, K. J., RASMUSSEN, M.: *The Bohl spectrum for linear nonautonomous differential equations*. J. Dyn. Differ. Equations 29 (2017), 1459–1485.
- [15] FISCHER, A.: *Od funkcí periodických ke skoroperiodickým*. PMFA 45 (2000), 273–283.
- [16] GÜNZLER, H.: *Integration of almost periodic functions*. Math. Z. 102 (1987), 253–287.
- [17] HOWELL, R., KYLE, D.: *Locating trinomial zeros*. Involve 11 (2018), 711–720.
- [18] CHENG, S. S., HUANG, S. Y.: *Alternate derivations of the stability region of a difference equation with two delays*. Appl. Math. E-Notes 9 (2009), 225–253.
- [19] KIPNIS, M. M., NIGMATULIN, R. M.: *Stability of the trinomial linear difference equations with two delays*. Autom. Remote Control. 65 (2004), 1710–1723.
- [20] KURUKLIS, S. A.: *The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$* . J. Math. Anal. Appl. 188 (1994), 719–731.
- [21] LEVIN, S. A., MAY, R.: *A note on difference delay equations*. Theor. Popul. Biol. 9 (1976), 178–187.
- [22] MARDEN, M.: *Geometry of polynomials*. Second edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1966.
- [23] MATSUNAGA, H., HAJIRI, C.: *Exact stability sets for a linear difference system with diagonal delay*. J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 616–622.
- [24] MELMAN, A.: *Geometry of trinomials*. Pacific J. Math. 259 (2012), 141–159.
- [25] O’CONNOR, J. J., ROBERTSON, E. F.: *Piers Bohl, MacTutor History of Mathematics* [online], [cit. 25. 3. 2024].
Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bohl/>
- [26] PAPANICOLAOU, V. G.: *On the asymptotic stability of a class of linear difference equations*. Math. Mag. 69 (1996), 34–43.
- [27] PICK, L.: *O využití iracionality při hledání sedmého nebe*. PMFA 67 (2022), 37–44.
- [28] REN, H.: *Stability analysis of second order delay difference equations*. Funkcial. Ekvac. 50 (2007), 405–419.
- [29] ROTHE, E. H.: *Introduction to various aspects of degree theory in Banach spaces*. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

- [30] SCHAEFER, H.: *Über die Methode der a priori Schranken*. Math. Ann. 129 (1955), 415–416.
- [31] ŠOSTAK, A.: *The Latvian Mathematical Society after 10 years*. J. Eur. Math. Soc. 48 (2003), 21–25.
- [32] TAIMINA, D.: *Some notes on mathematics in Latvia through the centuries* [online], [cit. 25. 3. 2024]. Dostupné z:
<https://pi.math.cornell.edu/~dtaimina/mathinLV/mathinlv.html>
- [33] THEOBALD, T., DE WOLFF, T.: *Norms of roots of trinomials*. Math. Ann. 366 (2016), 219–247.