

Učitel matematiky

Jitka Panáčková

Mylné představy o nule u studentů učitelství 1. stupně ZŠ

Učitel matematiky, Vol. 32 (2024), No. 3, 154–171

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152661>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2024

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

MYLNÉ PŘEDSTAVY O NULE U STUDENTŮ UČITELSTVÍ 1. STUPNĚ ZŠ

JITKA PANÁČOVÁ

1. Úvod

Vytvoření správné představy o čísle nula je v učivu matematiky jeden z důležitých momentů. Předmětem zájmu řady odborných článků mnoha pedagogických výzkumníků bylo ukázat, že nejen žáci, ale i učitelé v přípravné fázi studia a samotní učitelé mají často o čísle nula mylné představy či nedostatečné znalosti, které mohou být příčinou nevhodného či nesprávného zavedení nuly ve výuce matematiky. V návaznosti na výsledky zmíněných výzkumů představuje tento článek studii vycházející z průzkumu znalostí zaměřeného na to, s jakými mylnými představami o čísle nula se mohou potýkat někteří studenti učitelství 1. stupně ZŠ a jakým způsobem by v souvislosti s tímto jevem zavedli pojem nula do výuky matematiky v 1. ročníku ZŠ. Výsledky této studie přináší překvapivý vhled do chápání tohoto pojmu ze strany studentů, který odhaluje jejich významné mezery ve sledované oblasti.

2. Budování pojmu přirozeného čísla u žáků v mladším školním věku

Pojem přirozeného čísla a početních výkonů s přirozenými čísly je obsahem učiva matematiky na 1. stupni ZŠ. Při vytváření a rozvíjení pojmu přirozeného čísla je třeba:

- respektovat psychologická kritéria, požadavky psychologie dítěte;
- vycházet z jevů a situací reálného světa a využívat dětských zkušeností a představ;

- důsledně zachovat soulad s matematickými teoriemi, na jejichž základě lze pojem přirozeného čísla zavést (Novák & Eberová, 1988).

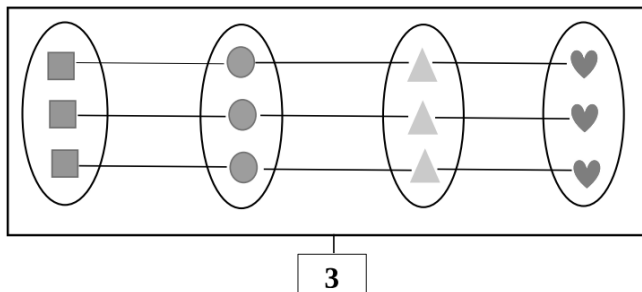
Teoretické základy, které jsou dle Nováka a Eberové (1988) důležitými kritérii pro vytváření a rozvíjení pojmu přirozeného čísla, jsou obsaženy v mnoha odborných publikacích zaměřených na aritmetiku a algebru. Níže stručně zmíníme tři možnosti jejich zavedení.

Přirozená čísla se zavádí jako:

1. Kardinální čísla konečných množin; pro tento případ je třeba chápat pojmy binární relace, zobrazení, ekvivalentní množiny a kardinální číslo množiny A . Připomeňme, že kardinální číslo množiny A je třída, do které patří množina A z neprázdného systému M množin a všechny množiny systému M , které jsou s množinou A ekvivalentní. Dvě množiny jsou ekvivalentní právě tehdy, když existuje prosté zobrazení jedné množiny na druhou. Kardinální číslo $|A|$ množiny A ze systému M , je tedy reprezentováno množinou A a všemi množinami ze systému M , které jsou s množinou A ekvivalentní.

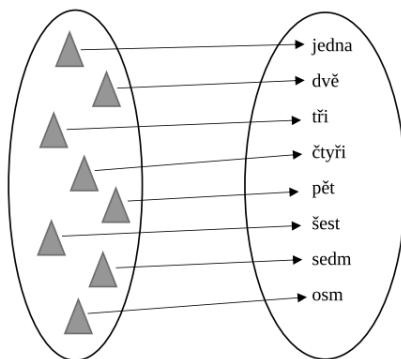
Této možnosti zavedení přirozených čísel využíváme v případě, že počet prvků souboru objektů lze určit pouhým pohledem. Jestliže tedy chceme zavést pojem čísla 3, tj. $|A| = 3$, pak se žáky modelujeme nějaký systém konečných množin, z nichž určíme třídu obsahující všechny množiny, které mají stejný počet prvků jako daná tříprvková množina A . Tato třída je pak přirozeným číslem 3 (Blažková et al., 1992), jak ilustruje obrázek 1.

Postihování a chápání množství na základě vjemu souvisí s ekvivalentností množin a vede ke kardinálnímu pojetí přirozeného čísla (Novák & Eberová, 1988; Hejný et al., 1990). Určit kardinální číslo dané konečné množiny bez počítání prvků po jedné se nám podaří jen u málo početných množin (Coufalová, 2011).



Obr. 1: Grafické znázornění pro vytvoření představy čísla 3 v kardinálním pojetí

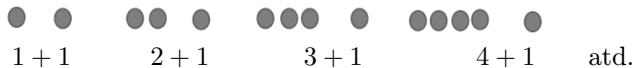
2. Ordinalní čísla konečných dobře uspořádaných množin; v tomto případě vycházíme z dobře uspořádaných množin. Zvolme si systém G dobře uspořádaných množin a definujme na něm binární relaci „množina A je podobná množině B “. Tato relace generuje rozklad systému G na třídy navzájem podobných množin a každá třída tohoto rozkladu je ordinalním číslem všech množin, které jsou v jedné třídě. Relace podobnost množin představuje existenci vzájemně jednoznačného zobrazení mezi dobře uspořádanými množinami A a B , přičemž pořadí obrazů v tomto zobrazení je určeno pořadím vzorů (Divíšek & Buřil, 1989).



Obr. 2: Grafické znázornění pro vytvoření představy čísla 8 v ordinalním pojetí

Ordinální číslo množiny A pak určíme tak, že tuto množinu uspořádáme (libovolným způsobem) a každému jejímu prvku postupně přiřazujeme jedno slovo z řady číslovek – jedna, dvě, tři, atd. Prvky takzvaně „počítáme po jedné“, žádný nesmíme vynechat a žádný nesmíme počítat dvakrát. Poslední použitá číslovka udává počet prvků v množině A (obrázek 2). Tento způsob zavedení přirozených čísel využíváme v případě, že počet prvků souboru objektů není možné určit pouhým pohledem. „Počítání prvků v číselné řadě po jedné“ vede k ordinálnímu pojetí přirozeného čísla (Novák & Ebeřová, 1988; Hejný et al., 1990) a nezávisí na uspořádání dané konečné množiny A . Ordinálně získaný počet prvků množiny A chápeme jako číslo kardinální. Tento přístup je podpořen faktem, že známe-li počet prvků nějaké množiny, nemusíme zjistit, jestli toto číslo bylo stanoveno prostřednictvím kardinálního či ordinálního pojetí. U konečných množin tato čísla nelze od sebe odlišit, můžeme pouze odlišit způsoby jejich stanovení (Divišek & Buřil, 1989).

3. Prvky Peanovy množiny; pro tento případ nejdříve vytvoříme představu čísla 1 prostřednictvím situací žákovi blízkých (máme jednu hlavu, jednu maminku, na obloze svítí jedno sluníčko apod.). K jednomu prvku přidáme další prvek, vytvoříme představu čísla 2 (následovník čísla 1), ke dvěma prvkům přidáme další prvek, vytvoříme představu čísla 3 (následovník čísla 2), a takto postupujeme dále (obr. 3). Množinu všech přirozených čísel tak získáme pomocí čísla 1 postupným vytvořením následovníka každého dalšího přirozeného čísla (Blažková et al., 1992).



Obr. 3: Grafické znázornění pro zavedení přirozených čísel prostřednictvím Peanovy množiny

S vytvářením představy pojmu čísla se žáci učí psát příslušnou číslici a později pomocí číslic zapisovat čísla víceciferná (Blažková,

2020). Je třeba zdůraznit, že při dnešním přístupu ve výuce matematiky si může učitel dle vlastního uvážení zvolit k zavádění přirozených čísel kteroukoli z výše uvedených možností, případně je může vhodně kombinovat.

3. Způsoby zavádění čísla 0

Z pohledu školské matematiky se nula zavádí v 1. ročníku ZŠ, kdy je realizována numerace a vybrané početní operace v rámci číselného oboru přirozených čísel 0–20. Výše popsaným způsobem zavádíme zpravidla nejdříve čísla 1–5, popř. 6. Následně věnujeme zvláštní pozornost vytvoření představy čísla 0 (Blažková, 2020). Nula je kardinální číslo prázdné množiny, tj. $|\emptyset| = 0$. Zavádíme ji tedy analogicky jako přirozená čísla dříve zavedená ve smyslu kardinálního pojetí (tj. jako počet prvků prázdné množiny), kdy například na jedné míse jsou tři jablka (označeno číslicí 3), na další míse jsou dvě jablka (označeno 2), na další míse je jedno jablko (označeno 1) a poslední mísa je prázdná (označeno 0). Tuto situaci pak znázorníme prostřednictvím obrázku 4.



Obr. 4: Zavedení čísla 0 jako kardinálního čísla prázdné množiny

Je zřejmé, že pro vybudování správné představy čísla nula je pro žáka podstatný dostatečný počet podnětů a situací, které problematiku spojenou s číslem nula představují nebo ilustrují. V souvislosti se zavedením čísla 0 jako kardinálního čísla prázdné množiny žáci sami a s oblibou vymýšlí prázdné množiny a počet jejich prvků zapisují číslem 0, např. „V naší třídě je 0 slonů.“, „V naší třídě je 0 opic.“ (Janků et al., 1984)

Další možný způsob vyvození čísla 0 je pomocí odčítání dvou sobě rovných čísel, jak ilustruje obrázek 5, kde postupně odebíráme jablčka z mísy, slovně tuto situaci popisujeme a vedle grafického znázornění zapisujeme odpovídající příklady.

„Od 3 jablíček odeberu 1 jablíčko,
na talířku zůstanou 2 jablíčka.“



„Od 3 jablíček odeberu 2 jablíčka,
na talířku zůstane 1 jablíčko.“



„Od 3 jablíček odeberu 3 jablíčka,
talířek je prázdný/na talířku je 0
jablíček.“



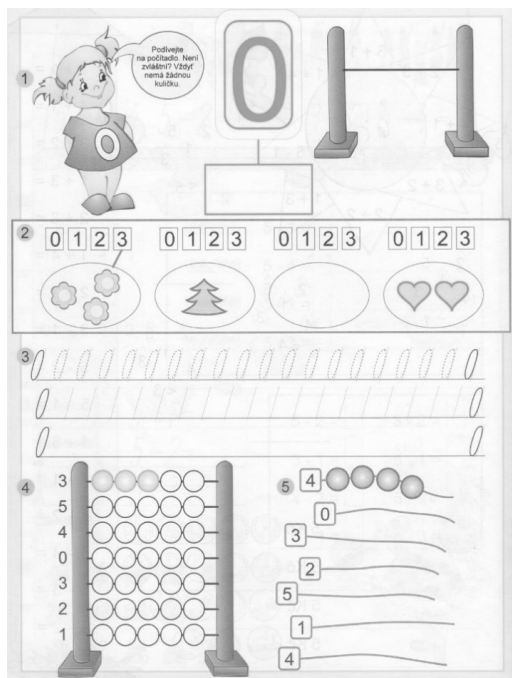
Obr. 5: Zavedení čísla 0 jako kardinálního čísla prázdné množiny

Podobně k této problematice přistupují Nováková a Vondrová (2015, s. 9) ve spojitosti se zaváděním přirozených čísel na 1. stupni ZŠ: „Přitom se nevyhýbáme ani vytvoření představy čísla 0 (nula) jako kvantity prázdné množiny, resp. početnosti prázdného souboru, ve smyslu významového porozumění, tj. umět propojit operaci s reálnou situací:

- a) v konfrontaci s představou početnosti neprázdné množiny (na stole jsou 4 knihy, 2 tužky, 5 listů papíru, žádná pastelka)
- b) jako rozdíl stejných čísel: na talíři byly 4 koláče, Jarda snědl všechny čtyři, žádný nezbyl ($4 - 4 = 0$); na talíři byly 4 koláče, Mírek snědl 2, Jana také 2, žádný nezbyl ($4 - 2 - 2 = 0$) atd.“

V souladu s Blažkovou (2020) a Novákovou a Vondrovou (2015) popisují analogicky proces zavádění čísla nula na 1. stupni ZŠ autoři Divíšek a Buřil (1989), Janků et al. (1984), Barton (2020), Kazima et al. (2023) a jiní. Vybranou ukázkou z učebnice matematiky na obrázku 6 lze tuto problematiku rovněž interpretovat.

Poznamenejme, že nula také reprezentuje prázdnou pozici v zápise čísla. V této souvislosti Blažková (2020) upozorňuje, že není vhodné při zavádění čísla 0 používat formulace typu „nula je nic“, neboť žáci se pak k nule chovají jako k „ničemu“ a neuznávají ji ani jako číslo, ani jako pozici v zápisu čísla. Nerozlišují tedy například zápis 45 a 405 apod.



Obr. 6: Zavedení čísla 0 v učebnici matematiky pro 1. ročník ZŠ od Potůčkové (1998)

4. Mylná představa o čísle nula popsaná v literatuře

Řada zahraničních výzkumů v minulosti ukázala, že někteří žáci, studenti učitelství matematiky i učitelé matematiky mají mylné představy o čísle nula.

Na otázku „Co je nula?“ mnoho učitelů matematiky i studentů učitelství matematiky odpovědělo, že „nula je nic“ (Crespo & Nicol, 2006; Leeb-Lundberg, 1977; Wheeler & Feghali, 1983; Wheeler, 1987; Wilcox, 2008). Na to, že dle mnohých dotázaných „je nula nic“, se jí ve výzkumech matematického vzdělávání dostalo velké pozornosti. Od 60. let 20. století se různí výzkumníci zabývali tím, jak chápou nulu žáci (Allinger, 1980; Baroody et al.,

1983; Crespo & Nicol, 2006; Evans, 1983; Inhelder & Piaget, 1964; Kamii, 1981; Leeb-Lundberg, 1977; Neurwith Beal, 1983; Paster-nak, 2003; Reys & Grouws, 1975; Wheeler, 1987), přičemž jejich zjištění se shodují v následujících odpovědích:

Dotazovaní žáci

- zaměňují nulu s písmenem „O“,
- domnívají se, že nula není číslo,
- si myslí, že nula je pouze součástí zápisu čísla deset,
- věří, že nula je nic a proto ji lze ignorovat,
- se domnívají, že nula je číslo, ale vyvíjí se odděleně od ostat-ních číselných pravidel.

Lze konstatovat, že všechna tato žákovská pojetí nuly mohou být zdrojem potíží souvisejících s aritmetickými výpočty zahrnujícími nulu.

Tato odhalení inspirovala Chernoffa a Russella (2011) k tomu, že se v rámci svého kvalitativního výzkumu zaměřili na otázky (a) Jak dva vybraní učitelé matematiky na základních školách chápou nulu? a (b) Jakým způsobem a kdy ji zavádí do výuky matematiky? Výsledky jejich studie přinesly nové překvapivé po-hledy na chápání nuly ze strany obou učitelů. Výzkum totiž odha-lil značné mezery a mylné představy jak v jejich chápání nuly, tak při jejím zavádění ve výuce matematiky. Obě tato zjištění by měla z pohledu autorů Chernoffa a Russella (2011) směřovat k tomu, aby programy předškolního a školního vzdělávání věnovaly pozor-nost rozvoji úplnějšího a smysluplnějšího chápání nuly.

K zajímavým a neočekávaným zjištěním dospěla Bohanesová (2023) ve svém výzkumu, který realizovala v rámci diplomové práce prostřednictvím rozhovorů s devíti učiteli 1. stupně na čes-kých základních školách. Podobně jako zahraniční výzkumníci Chernoff a Russell (2011) odhalila mylné představy učitelů o čísle nula i problémová místa v popise jejího zavedení ve výuce mate-matiky.

Také další výzkumníci se ve svých studiích zaměřili na zjištění a popis konkrétní představy nuly u učitelů matematiky a způsobu jejího zavedení ve výuce tohoto předmětu. Dle Bartona (2020) je třeba vytvořit u žáků představu nuly v prvních letech výuky ma-

tematiky. Žáci se ve většině případů s nulou seznamují, když se učí počítat a rozpoznávat čísla a číslice pomocí konkrétních objektů, kde nepřítomnost objektu se označuje jako nula. Zavedení pojmu nuly jako čísla tedy postupuje od nuly jako vyjádření nepřítomnosti k nule jako k číslu (Barton, 2020). Tento přechodný krok ve vnímání nuly je náročný pro řadu žáků i učitelů (Chernoff & Russell, 2011) a vyplývá z dvojích protichůdných matematických a filozofických názorů. Z matematického hlediska je nula kardinální číslo prázdné množiny (tj. mohutnost množiny stejně jako ostatní přirozená čísla), kdežto z filozofického pohledu nula představuje nicotu či nebytí. Barton (2020) shledává problém se správným vytvořením představy čísla nula z pohledu filozofického v porovnání s ostatními čísly v tom, že jeden, dva či tři předměty můžeme vidět či uchopit, což je obtížné si představit pro nula předmětů. Tato skutečnost klade u žáků velké nároky na abstraktní myšlení v souvislosti s chápáním prázdné množiny, kterou je třeba taktéž považovat za mentální objekt (Nieder, 2016). Další překážkou pro správné chápání nuly může být fakt, že při počítání objektů ji nepoužíváme (Barton, 2020). Jako podporu pro zprostředkování pojmu nula jako čísla Nieder (2016) doporučuje zapojení žáků do úkolů a aktivit, které ilustrují její kardinalitu a postavení v číselné řadě.

5. Představa studentů vztahující se k číslu nula a jejímu zavedení na 1. stupni ZŠ

V rámci výuky předmětu Didaktika matematiky na Pedagogické fakultě Masarykovy univerzity v Brně jsou studenti učitelství 1. stupně ZŠ ve čtvrtém ročníku seznámeni s procesem zavedení nuly ve výuce matematiky prostřednictvím dvou možných způsobů, které byly interpretovány v předchozím textu, tj. jako kardinální číslo prázdné množiny nebo pomocí odčítání dvou sobě rovných přirozených čísel. Autorka tohoto článku si dala za cíl identifikovat stav znalostí v této problematice u popsané skupiny studentů po absolvování předmětu Didaktika matematiky před jeho ukončením.

5.1. Průzkum znalostí a jeho výsledky

Průzkum znalostí a představ vztahujících se k číslu nula a jejímu zavedení ve výuce matematiky v 1. ročníku ZŠ byl realizován formou písemné práce v závěru podzimního semestru akademického roku 2023/2024 a zúčastnilo se ho 75 studentů čtvrtého ročníku učitelství 1. stupně na Pedagogické fakultě MU v Brně. Prostředkem pro identifikaci znalostí v této oblasti byly dvě otevřené otázky zadané v písemné práci, která je běžnou součástí úspěšného zakončení předmětu Didaktika matematiky. Otázky byly formulovány následovně:

- a) Co je to nula?
- b) Jaké jsou možnosti zavedení nuly v 1. ročníku základní školy?

Z výsledků písemné práce vyplynulo, že 80 % dotazovaných studentů odpovědělo na obě zadané otázky zcela správně nebo v souladu s navrhovanými možnostmi zavedení čísla nula.

Zbývajících 20 % dotazovaných studentů nevedlo správné ani uspokojivé odpovědi na jednu či obě ze zadaných otázek. Z této skupiny studentů autorka vybrala odpovědi na zadané otázky písemné práce.

Níže v textu uvádíme vybrané odpovědi studentů na otázku (a) „Co je to nula?“ (odpovědi studentů jsou zapsány kurzívou):

1. *Číslo 0 je prázdná množina.*
2. *Číslo 0 je číslo, které označuje nulový počet.*
3. *Číslo 0 je samo o sobě prázdná množina.*
4. $0 = \emptyset$.
5. $|0| = \emptyset$.
6. *Nula má v matematice složité postavení.*

Z formulací studentských odpovědí na otázku (a) lze identifikovat neúplné či mylné pohledy na sledovanou problematiku, což potvrzuje poznatky výzkumníků Chernoffa a Russella (2011):

- Odpovědi 1–5 interpretují studentovo uvědomění si vztahu nuly a prázdné množiny, forma interpretace nuly však není zvolena matematicky správně.
- Případy 4 a 5 uvádí chybný symbolický zápis nuly jako kardinálního čísla prázdné množiny, tj. $|\emptyset| = 0$.
- Odpověď 6 není v kontextu s původní otázkou „Co je to nula?“ dále rozvinuta. V jakém smyslu má nula v matematické složité postavení již autor nevysvětluje.

Dále jsou uvedeny vybrané odpovědi studentů na otázku (b) „Jaké jsou možnosti zavedení nuly v 1. ročníku základní školy?“ (odpovědi studentů jsou zapsány kurzívou):

1. *Pokud od sebe odečteme stejný počet prvků, máme 0 prvků.*
Pozn. autorky: Tento text je pak doplněn následujícím obrázkem:



2. *Číslo 0 zavádíme jako prázdnou množinu.*
3. *Nulu zavádíme jako prázdnou množinu.*
4. *Nulu žákům vysvětlujeme jako prázdnou množinu.*
5. *Číslo 0 zavedeme jako prvek prázdné množiny.*
6. *Číslo 0 můžeme žákům zavést jako odčítání dvou stejných čísel.*
7. *Motivační úlohy na příklady s nulou se nevymýšlí.* Pozn. autorky: Toto tvrzení je doplněno následujícím obrázkem a popisem:



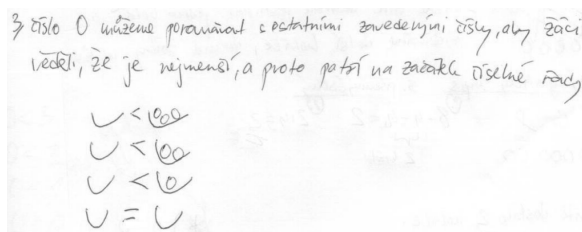
$$\begin{aligned} 3 - 1 &= 2 \\ 2 - 1 &= 1 \\ 1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

8. *Máme v misce 5 jableček, maminka do misky přidala 0 jableček. Kolik jableček je v misce?*

9. Grafické znázornění pro zavádění nuly. Pozn. autorky: Grafický názor je bez popisků.

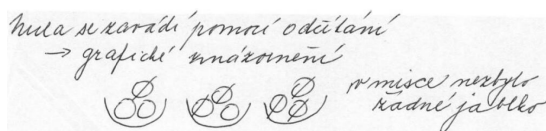


10. Obrázek 7 ilustruje ukázkou studentské odpovědi související s porovnáváním přirozených čísel s nulou zaznamenaným graficky:



Obr. 7: Ukázka studentské odpovědi související s porovnáváním přirozených čísel

11. Obrázek 8 představuje ukázkou studentské odpovědi související se zaváděním nuly pomocí odčítání sobě rovných čísel.



Obr. 8: Ukázka studentské odpovědi související se zaváděním nuly

Je vidět, že formulace studentských odpovědí na otázku (b) odráží nedostatečné schopnosti a dovednosti studenta popsat správně tento proces, který je úzce spojen s oblastí didaktiky matematiky.

- Odpověď 7 by mohla být uspokojivá nebýt doplňujícího náskru, který nelze považovat za vhodné znázornění uvažované situace.

- V případech 8–11 shledáváme čtyři výroky představující podobný způsob zavedení nuly, ve kterém studenti reflektují vztah nuly a prázdné množiny, ale interpretace tohoto vztahu je nepřesná.
- Studentská úvaha v odpovědi 12 nasvědčuje nerozlišení pojmů čísla a cifry jako číselného zápisu.
- Odpověď 13 zůstává pro autorku tohoto článku nejasná, škoda, že student více nerozvinul vyslovenou myšlenku, která by možná pomohla tuto úvahu objasnit. Ani obrázek doplněný o vypsání spoje pro odčítání situaci vztahující se k této otázce nezachránil.
- Hlavním úmyslem motivační úlohy u odpovědi 14 je zřejmě procvičení odčítání nuly, nicméně pro zavedení nuly do výuky matematiky postrádá tato úloha význam.
- U odpovědi 15 student sice využil správného grafického názoru, ale zřejmě opomněl uvést pod jednotlivými obrázky číslice, bez kterých nulu prakticky nezavedl.
- Obrázek 7 ilustruje ukázkou studentské odpovědi 16 související s porovnáváním přirozených čísel s nulou zaznamenaným pouze graficky. Použité znázornění pro porovnávání nuly bez číselného popisu postrádá smysl. Navíc umístění znamének nerovnosti a rovnosti mezi znázorněnými objekty je nevhodné (prostřednictvím těchto znamének lze porovnávat pouze čísla nikoli objekty).
- Obrázek 8 představuje ukázkou studentské odpovědi 17 související se zavedením nuly prostřednictvím odčítání přirozených čísel: Bez číselných popisů u jednotlivých místíček je grafické znázornění pro zavedení nuly neúplné.

6. Závěr

Budování představy o čísle nula jako o kvantitě prázdné množiny, resp. početnosti prázdného souboru je třeba věnovat v učivu matematiky 1. ročníku základní školy zvláštní pozornost. Pokud žák

nemá dostatek podnětů k získání správné představy o nule nebo je proces zavedení nuly ve výuce matematiky veden nevhodným postupem, lze u žáků později očekávat problémy v aritmetice spojené s operacemi s nulou či potíže při zápisu přirozených čísel, v nichž se nula vyskytuje.

V rámci různých výzkumů bylo v minulosti prokázáno, že skutečnost, kdy mnozí žáci a studenti mají mylné představy o čísle nula, je reálná. Některá šetření také odhalila značné mezery v chápání nuly u samotných učitelů matematiky, která přirozeně vedla k nevhodnému postupu zavedení nuly ve výuce matematiky (Chernoff & Russell, 2011).

Tento článek je výsledkem průzkumu znalostí, který byl realizován v závěru podzimního semestru akademického roku 2023/2024. Nástrojem tohoto průzkumu byla písemná práce, která prostřednictvím otevřených otázek zjišťovala znalosti a představy vztahující se k číslu nula a jejímu zavedení ve výuce matematiky v 1. ročníku ZŠ u studentů čtvrtého ročníku učitelství ZŠ na Pedagogické fakultě MU v Brně. Tato písemná práce bývá běžnou součástí zkoušky k úspěšnému zakončení předmětu Didaktika matematiky.

Prostřednictvím dvou otázek

- a) Co je to nula?
- b) Jaké jsou možnosti zavedení nuly v 1. ročníku základní školy?

byly sledovány a identifikovány znalosti a dovednosti studentů v popsané oblasti. Dle správnosti odpovědi byli dotazovaní studenti rozděleni na dvě skupiny. Odpovědi první skupiny dotazovaných studentů byly správné či uspokojivé pro obě položené otázky (a) i (b). Druhou skupinu tvořilo 20 % dotazovaných studentů, kteří neodpověděli na alespoň jednu ze zadaných otázek jasně, vhodně či správně. Odpovědi studentů této druhé skupiny ve vztahu k otázce (a) často reflektovaly uvědomění si vztahu nuly a prázdné množiny, avšak forma, jakou byla nula interpretována v kontextu s prázdnou množinou, nebyla zvolena matematicky správně, případně odhalila chybný způsob symbolického zápisu nuly jako početnosti prázdného souboru. Lze tedy konstatovat, že

studenti uvažované skupiny si sice uvědomují, že nulu je třeba chápat ve vztahu s prázdnou množinou, ale postrádají schopnost slovně či symbolicky správně tento pojem formulovat. Rovněž v odpovědích studentů druhé skupiny na otázku (b) byly identifikovány četné nepřesnosti, mezery, případně nezralost v dovednosti vysvětlit zadané učební téma. Problémy vztahující se k otázce (b) byly odhaleny převážně v souvislosti s chybnými formulacemi či s nepřesným grafickým znázorněním uvažovaných situací.

Po ukončení popsaného průzkumu byla se studenty druhé skupiny provedena reflexe jejich nesprávných odpovědí za účelem eliminace mezer a chyb v odhalených problematických oblastech, aby se proces nevhodného zavádění nuly v učivu matematiky nepřenesl do samotné výuky.

Literatura

- [1] Allinger, G. D. (1980). Johnny got a zero today. *The Mathematics Teacher*, 73(3), 187–190.
- [2] Baroody, A. J., Gannon, K. E., Berent, R., & Ginsburg, H. P. (1983). *The development of basic formal math abilities*. Paper presented at Biennial Meeting of the Society for Research in Child Development.
- [3] Barton, N. (2020). Absence perception and the philosophy of zero. *Synthese*, 197, 3823–3850.
- [4] Blažková, R., Matoušková, K., & Vaňurová, M. (1992). *Texty k didaktice matematiky pro studium učitelství 1. stupně základní školy. 2. část*. Masarykova univerzita.
- [5] Blažková, R. (2020). *Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení*. Munipress.
- [6] Bohanesová, K. (2023). *Zavádění nuly ve výuce matematiky na 1. stupni základní školy* [Diplomová práce, Masarykova univerzita].
- [7] Coufalová, J. (2011). *Matematika s didaktikou pro 1. ročník učitelství 1. stupně ZŠ*. Západočeská univerzita.

- [8] Crespo, S., & Nicol, C. (2006). Challenging preservice teachers' mathematical understanding: The case of division by zero. *School Science and Mathematics*, 106(2), 84–97.
- [9] Divíšek, J., & Buřil, Z. (1989). *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ*. SPN.
- [10] Evans, D. W. (1983). *Understanding zero and infinity in the early school years*. University of Pennsylvania
- [11] Hejný, M., Benešová, M., Bereková, H., Bero, P., Hrdina, L., Repáš, V., & Vantuch, J. (1990). *Teória vyučovania matematiky 2*. Slovenské pedagogické nakladateľstvo.
- [12] Chernoff, E. J., & Russell, G. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers' conceptions of zero. *The Mathematics Enthusiast*, 8(1), 77–112.
- [13] Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child: Classification and seriation*. (E. A. Lunzer & D. Papert, Trans.). Routledge and Kegan Paul.
- [14] Janků, M., Bálint, L., Kabele, J., & Kopka, J. (1984). *Metodická příručka k matematice pro 1. ročník ZŠ*. SPN.
- [15] Kamii, M. (1981). Children's ideas about written number. *Topics in learning and learning disabilities*, 47–59.
- [16] Kazima, M., Jakobsen, A., Mwadzaangati, L., & Gobede, F. (2023): Teaching the concept of zero in Malawi primary school: illuminating the language and resource challenge. *Mathematics Education*, 55, 627–639.
- [17] Leeb-Lundberg, K. (1977). Zero. *Mathematics Teaching*, 78, 24–25.
- [18] Neurwith Beal, S. R. (1983). *Understanding of numeration system and computational errors in subtraction*. The University of Chicago.
- [19] Nieder, A. (2016). Representing something out of nothing: The dawning of zero. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(11), 831–842.

- [20] Novák, B., & Eberová, J. (1988). *Kapitoly z didaktiky matematiky I*. Pedagogická fakulta Univerzity Palackého.
- [21] Nováková, E., & Vondrová, N. (2015). Tematické okruhy Číslo a početní operace, Číslo a proměnná. In E. Fuchs & E. Zelendová (Eds.), *Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání*. Národní ústav pro vzdělávání.
- [22] Pasternack, M. (2003). 0–99 or 1–100. *Mathematics Teaching*, 182, 34–35.
- [23] Potůčková, J. (1998). *Matematika 1. díl pro 1. třídu základní školy*. Studio 1+1.
- [24] Reys, R. E., & Grouws, D. A. (1975). Division involving zero: Some revealing thoughts from interviewing children. *School science and mathematics*. 75(7), 593–605.
- [25] Wheeler, M. M. (1987). Children's understanding of zero and infinity. *Arithmetic Teacher*, 35, 42–44.
- [26] Wheeler, M. M., & Feghali, I. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(3), 147–155.
- [27] Wilcox, V. B. (2008). Questioning zero and negative numbers. *Teaching Children Mathematics*, 15(4), 202–206.

Abstract

Building the correct idea of the number zero in 1st grade students can appear as a difficult moment in the mathematics curriculum. Many researches in the past have shown that not only pupils and students, but also some mathematics teachers have misconceptions about zero, the consequence of which is the incorrect introduction of the number zero in mathematics lessons. This phenomenon can then contribute to the occurrence of difficulties for some students in arithmetic in cases where they perform operations with numbers whose notation includes zero. The aim of the article is to present the results of the survey, which reveal the difficulties that students of the fourth year of the elementary teaching may

face when describing the procedure for introducing the number zero in the teaching of mathematics in the first year of elementary school. In connection with this investigation, the author points to the uncovered gaps that these students show when formulating the concept of zero as the number of the empty set. This study could become inspiring and useful for students of mathematics teaching as well as teachers at the elementary school.

Jitka Panáčová

Katedra matematiky

Pedagogická fakulta MU

Poříčí 31

603 00 Brno

e-mail: panacova@ped.muni.cz