Pavel Pokorný
Průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici

*Rozhledy matematicko-fyzikální*, Vol. 99 (2024), No. 4, 28–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152707

# Průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici

*Pavel Pokorný, VŠCHT Praha*

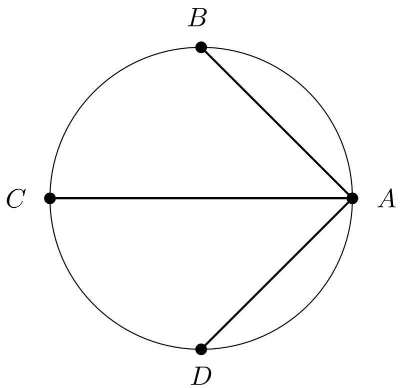
**Abstrakt.** Ukážeme, jak spočítat průměrnou vzdálenost dvou náhodně zvolených bodů na kružnici. Ale zejména si ukážeme nástroje a metody, jak lze podobné úlohy řešit.

## Konečný počet poloh

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat kružnici o poloměru $R = 1$, protože v případě kružnice o poloměru $R$ náš výsledek vynásobíme tímto poloměrem.

*Doporučení:* Dovolujeme si navrhnout ctěnému čtenáři, aby v tuto chvíli přerušil čtení tohoto textu a pokusil se nejdříve úlohu vyřešit vlastními silami.

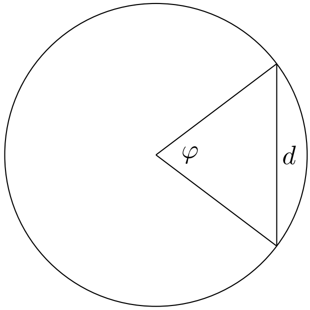
Uvažujme nejdříve malý počet možných poloh bodů rovnoměrně rozmístěných na jednotkové kružnici, např. 4 polohy, viz obrázek.




První bod lze volit v libovolné poloze, např. $A$. Druhý bod se může nacházet v jedné ze čtyř poloh ($A$, $B$, $C$ nebo $D$).

Označme $d_N$ průměrnou vzdálenost dvou bodů na jednotkové kružnici, jestliže se body mohou nacházet v $N$ polohách rovnoměrně rozmístěných po kružnici. Pro čtyři polohy snadno dostaneme průměrnou vzdálenost $d_4 = (0 + \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2})/4 = (1 + \sqrt{2})/2 \doteq 1{,}207$. Nás zajímá $d_N$ pro $N$ jdoucí k nekonečnu.

Vzdálenost dvou bodů, jejichž průvodiče svírají úhel $\varphi$ je $d = 2\sin\frac{\varphi}{2}$, viz obrázek.




Uvažujme $N$ možných poloh rovnoměrně rozmístěných po kružnici. Označme je po řadě indexem $n = 1, \ldots, N$. Pak úhel mezi průvodiči jednoho pevného bodu v poloze $N$ a bodu v poloze $n$ je $\varphi = n2\pi/N$ a jejich vzdálenost je $d = 2\sin\frac{n\pi}{N}$. Pak průměrná vzdálenost je

$$d_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 2\sin\frac{n\pi}{N}.$$

To je zobecnění našeho předchozího výsledku $d_4 = (1+\sqrt{2})/2$. Nás zajímá, k čemu se blíží $d_N$, když se $N$ blíží k nekonečnu. To si spočítáme nejdříve numericky a z numerického výsledku se pokusíme uhádnout přesnou hodnotu. Potom si spočítáme i přesnou hodnotu analyticky. To provedeme tak, že najdeme vztah pro součet sinů aritmetické posloupnosti a budeme uvažovat limitu pro $N$ jdoucí k nekonečnu. A nakonec si ukážeme použití integrálu.

## 1. Numerický experiment

Začněme malým numerickým experimentem. Jednoduchým programem v jazyku C

```
#include<stdio.h>
#include<math.h>
int main()
{
 int n,N=10000000;
 double x,y,a=0;
```

```
  for(n=0;n<N;n++) {
   x = M_PI*n/(double)N;
   y = sin(x);
   a += y;
  };
  a = 2 * a / N;
  printf("%10d  %.15G  %G\n",N,a,a-4/M_PI);
 return(0);
}
```

dostaneme hodnotu $d_{10^7} \doteq 1{,}273239544735$. Jazyk C volíme proto, že programy v něm napsané běží velice rychle. Např. tento program, který provedl 10 milionů vyčíslení funkce sinus, trval na běžném počítači typu notebook s procesorem Intel Core i7 pouhých 64 ms. Stejný výpočet podle programu napsaného v jazyce Python trvá 25krát déle.

Podívejme se, jak lze z tohoto přibližného numerického výsledku uhádnout přesnou hodnotu. Počítačový algebraický systém Maple obsahuje funkci `identify`, která při zavolání `identify(1.273239544735)` dá výsledek $\frac{4}{\pi}$. V jiných matematických softwarových nástrojích jsme podobnou funkci nenašli. Ale počítačový algebraický systém Mathematica umožňuje spolupráci s umělou inteligencí a výsledkem je také výraz $\frac{4}{\pi}$. K tomuto přesnému výsledku brzo dospějeme i my.

## 2. Součet sinů algebraické posloupnosti

Mezi goniometrickými funkcemi platí mnoho vztahů. Některé z nich se učí ve školách, některé se i odvozují. Dopřejme si dnes ten luxus a odvoďme si vztah pro součet sinů aritmetické posloupnosti včetně všech pomocných vztahů, které při tom budeme potřebovat. Toto provedeme dvojím způsobem. Nejdříve bez použití komplexních čísel. A potom za pomocí komplexních čísel. Podrobnosti uvádíme v dodatku. Společný závěr je

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(n\alpha) = \frac{\sin(N\frac{\alpha}{2})\sin((N+1)\frac{\alpha}{2})}{\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

Nás to zajímá pro $\alpha = \frac{\pi}{N}$. Dosazením dostaneme

$$d_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 2\sin\frac{n\pi}{N} = \frac{2}{N}\frac{\sin(N\frac{\pi}{2N})\sin((N+1)\frac{\pi}{2N})}{\sin(\frac{\pi}{2N})} =$$

$$= \frac{2}{N}\frac{\sin((N+1)\frac{\pi}{2N})}{\sin(\frac{\pi}{2N})} = \frac{4}{\pi}\frac{\frac{\pi}{2N}}{\sin(\frac{\pi}{2N})}\sin\left(\frac{N+1}{N}\frac{\pi}{2}\right).$$

Nyní nás zajímá, kam se blíží $d_N$ pro $N$ jdoucí do nekonečna. Zlomek $\frac{\pi}{2N}$ se blíží nule a výraz $x/\sin(x)$ se pro $x$ jdoucí k nule blíží k jedné (jak ukazujeme v dodatku). Dále, zlomek $\frac{N+1}{N}$ se blíží k jedné, argument sinu za zlomkem se tedy blíží k $\frac{\pi}{2}$ a sinus se tedy blíží k jedné. Tím dostáváme výsledek, že průměrná vzdálenost dvou bodů na kružnici je rovna

$$d = \frac{4}{\pi},$$

jak jsme již tušili na základě našeho numerického experimentu.

### 3. Použití integrálu

Když se vrátíme k našemu numerickému experimentu, tak je možné si uvědomit, že součet hodnot sinů lze také získat nakreslením grafu funkce sinus např. na milimetrový papír a pro jednotlivé intervaly argumentu sčítat počet čtverečků mezi osou $x$ a grafem funkce. Tedy zjistit plochu pod grafem funkce sinus. A právě toto je základní aplikace určitého integrálu. Tedy střední hodnota výrazu

$$2\sin\frac{\varphi}{2}$$

pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je

$$d = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\pi}\left[-4\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(-4\cos\pi - (-4\cos 0)\right) = \frac{4}{\pi}.$$

Vidíme, že když použijeme vyšší teorii, tak je výpočet většinou mnohem kratší.

### Závěr

Spočítat plochu pod grafem jednoduché kladné spojité funkce pomocí určitého integrálu, jak jsme si právě ukázali, je snadné. Někdy je potřeba stanovit plochu pod grafem naměřené funkce. K tomu lze dnes použít analogově-digitální převodník a integrál počítat numericky. Jak se to ale dělalo dříve, když nebyly k dispozici počítače? Autor čestně prohlašuje, že se osobně setkal se zaměstnancem Československé akademie věd, který stanovoval plochu pod křivkou naměřenou a zakreslenou liniovým zapisovačem na papír tak, že obrazec pod křivkou nůžkami vystřihl a zvážil na laboratorních vahách. To je dnes již neuvěřitelné.

Při této příležitosti lze zmínit ještě jinou metodu, jak stanovit průměrnou hodnotu funkce sinus. Když necháme dopadnout tenký dlouhý předmět, např. jehlu na papír, na kterém jsou nakreslené rovnoběžné přímky velmi blízko sebe, tak počet přímek, které náhodně umístěná jehla protne, je úměrný sinu úhlu, který svírá jehla s přímkami. Tak se nabízí následující experiment. Budeme opakovaně házet jehlu na papír s přímkami a budeme si zapisovat počet přímek, které jehla protne. Pak střední hodnota tohoto počtu vydělená délkou jehly vyjádřené opět v počtu přímek, je střední hodnota funkce $|\sin x|$, což je $\frac{2}{\pi}$. A odtud opět dostaneme střední vzdálenost dvou bodů na jednotkové kružnici $\frac{4}{\pi}$.

A nebo naopak, když víme, že střední hodnota funkce sinus na intervalu $\langle 0; \pi\rangle$ je $\frac{2}{\pi}$, tak tento experiment s jehlou lze použít pro netradiční odhad hodnoty čísla $\pi$.

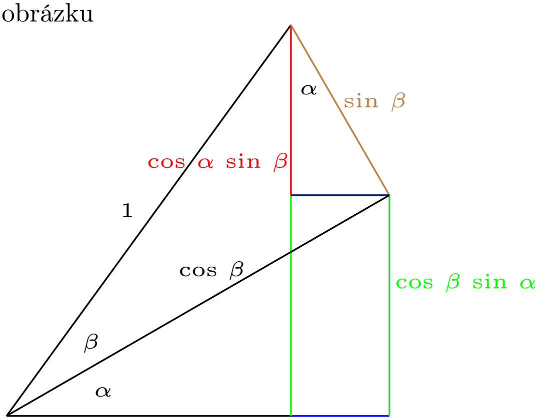
Alternativně, místo abychom házeli opakovaně jednou jehlou, můžeme použít velké množství jehel a hodit je najednou.

To je varianta Buffonovy úlohy o jehle, viz např. [1].

Tuto úlohu, kdy jsme hledali střední vzdálenost dvou bodů na kružnici lze zobecnit na hledání střední vzdálenosti dvou bodů na jiných množinách, viz např. článek *Mean line segment length* na wikipedii.

## Dodatek

Z tohoto obrázku




je vidět, že platí

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

a z grafu funkcí sin a cos je vidět, že platí

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x \quad \text{a} \quad \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

Přičtením $\frac{\pi}{2}$ k $\alpha$ ve vztahu pro sinus součtu dostaneme

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

a vynásobením $\beta$ číslem $-1$ dostaneme

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

a odečtením posledních dvou vztahů dostaneme užitečný vztah

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta.$$

Ten použijeme pro odvození vztahu pro součet sinů aritmetické posloupnosti. V součtu

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(3\frac{\alpha}{2}\right)+\cos\left(3\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(5\frac{\alpha}{2}\right)+\cdots+\\+\cos\left((2N-1)\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left((2N+1)\frac{\alpha}{2}\right)$$

se kromě prvního a posledního členu všechny členy vyruší, tedy platí

$$\sum_{n=1}^{N}\cos\left((2n-1)\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left((2n+1)\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left((2N+1)\frac{\alpha}{2}\right).$$

Zde všechny rozdíly cosinů nahradíme součinem sinů podle vztahu, který jsme si odvodili výše, a po vydělení dvěma dostaneme

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(n\alpha\right)=\sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left((N+1)\frac{\alpha}{2}\right).$$

Na levé straně můžeme ze součtu vytknout výraz $\sin\frac{\alpha}{2}$ a za podmínky, že je nenulový, což v našem případě platí, jím můžeme rovnost vydělit a dostáváme kýžený výraz pro součet sinů aritmetické posloupnosti

$$\sum_{n=1}^{N}\sin(n\alpha)=\frac{\sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left((N+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

Ukažme si ještě jiný způsob, jak lze tento vztah odvodit s použitím komplexních čísel. Použijeme imaginární jednotku $i$, pro kterou platí $i^2 = -1$ a použijeme užitečný vztah

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

(zápisem $\exp(x)$ rozumíme $\mathrm{e}^x$). Ten nám dovolí vyjádřit sinus jako imaginární část komplexního čísla

$$\sin\varphi = \operatorname{Im}\exp(i\varphi)$$

a převést součet sinů na součet geometrické posloupnosti. Proto si nejdříve připravíme součet geometrické posloupnosti. Označme

$$S = \sum_{n=1}^{N} q^n.$$

Vynásobením číslem $q$ dostaneme

$$qS = \sum_{n=2}^{N+1} q^n.$$

Odečtením dostaneme

$$(q-1)S = q^{N+1} - q.$$

Za podmínky $q \neq 1$ můžeme vydělit výrazem $(q-1)$ a dostaneme

$$S = q\frac{q^N - 1}{q - 1}.$$

Nyní napíšeme součet sinů jako imaginární část součtu geometrické posloupnosti s kvocientem $q = \exp(i\alpha)$, tu sečteme právě odvozeným vztahem a z výsledku určíme imaginární část s použitím vztahu

$$\exp(i\varphi) - \exp(-i\varphi) = 2i\sin\varphi.$$

Tedy

$$\sum_{n=1}^{N} \sin(n\alpha) = \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{N} \exp(in\alpha) =$$

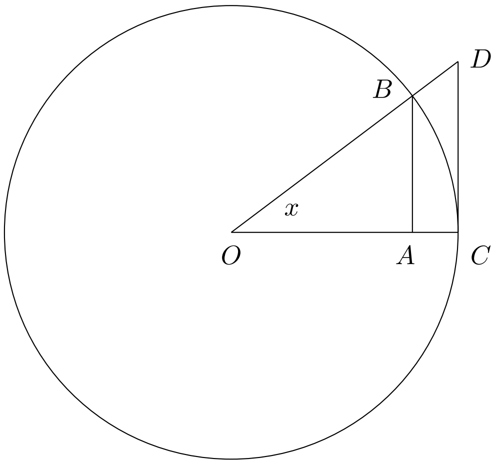
$$= \operatorname{Im}\sum_{n=1}^{N} q^n = \operatorname{Im}\, q\frac{q^N - 1}{q - 1} = \operatorname{Im}\, \exp(i\alpha)\frac{\exp(iN\alpha) - 1}{\exp(i\alpha) - 1} =$$

$$= \operatorname{Im}\ \exp(i\alpha)\frac{\exp(iN\frac{\alpha}{2})\left(\exp(iN\frac{\alpha}{2})-\exp(-iN\frac{\alpha}{2})\right)}{\exp(i\frac{\alpha}{2})\left(\exp(i\frac{\alpha}{2})-\exp(-i\frac{\alpha}{2})\right)} =$$

$$= \operatorname{Im}\ \exp\left(i(N+1)\frac{\alpha}{2}\right)\frac{2i\sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right)}{2i\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(N\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left((N+1)\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin(\frac{\alpha}{2})}.$$

To bylo tedy odvození součtu sinů aritmetické posloupnosti pomocí komplexních čísel. Dostali jsme stejný výsledek jako v předchozím odvození.

A ještě si ukážeme, že pro $x$ blížící se k nule, se výraz $\frac{x}{\sin x}$ blíží k jedné. K tomu nám poslouží tento obrázek




s jednotkovou kružnicí, malým úhlem $x$, trojúhelníkem $OAB$ s plochou

$$P_{OAB} = \frac{1}{2}\cos x \sin x,$$

kruhovou výsečí $OCB$ s plochou

$$P_{OCB} = \frac{1}{2}x$$

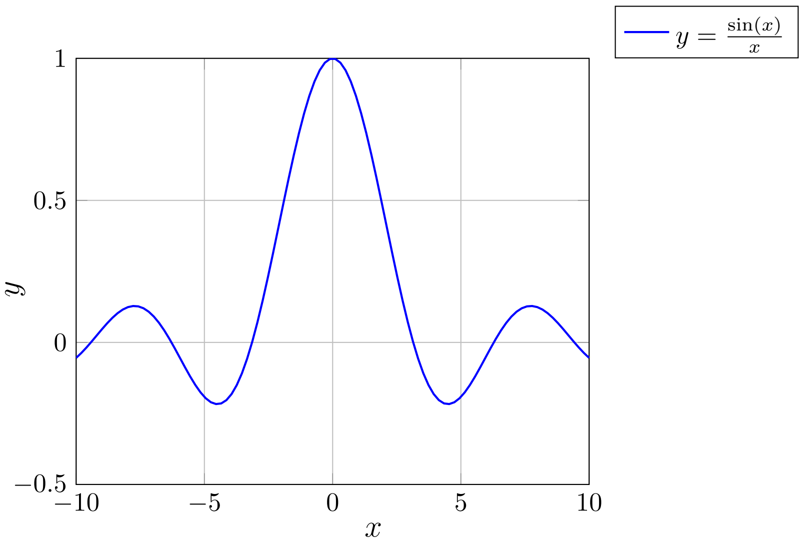
a trojúhelníkem $OCD$ s plochou

$$P_{OCD} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Porovnáním ploch těchto tří útvarů dostaneme

$$
\begin{aligned}
P_{OAB} &< P_{OCB} < P_{OCD},\\
\frac{1}{2}\cos x \sin x &< \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,\\
\cos x \sin x &< x < \frac{\sin x}{\cos x},\\
\cos x &< \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.
\end{aligned}
$$

Pro $x$ jdoucí k nule, se první i třetí výraz blíží k jedné, proto se k jedné blíží i výraz $\frac{x}{\sin x}$ a také výraz $\frac{\sin x}{x}$. Pro představu je užitečné načrtnout si graf funkce $y = \frac{\sin x}{x}$ viz následující obrázek. Pro $x = 0$ tento zlomek není definován, ale pro $x$ blížící se k nule se blíží k jedné. Nabízí se tedy tuto funkci v nule dodefinovat jedničkou.




L i t e r a t u r a

[1] Dvořáková, Ľ.: Vyzkoušejte metodu Monte Carlo. *Rozhledy matematicko--fyzikální*, roč. 94 (2019), č. 2, s. 1–11.