Emil Calda

Subfaktoriály ve středoškolské kombinatorice

*Učitel matematiky*, Vol. 2 (1994), No. 3, 17–19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152738

# Subfaktoriály ve středoškolské kombinatorice

*Emil Calda, MFF UK Praha*

V následujících řádcích se pokusíme ukázat, jak lze přístupným a časově nenáročným způsobem seznámit středoškolské studenty se subfaktoriály a jak znalost tohoto pojmu může přispět ke zvýšení zájmu o kombinatorické úlohy.

Permutace z *n* prvků je na střední škole definována jako *n*-členná variace z *n* prvků, tj. jako sestavená z daných *n* prvků tak, že každý se v ní vyskytuje právě jednou. Někdy však bývá užitečnější chápat permutaci z *n* prvků jako prosté zobrazení *n*-prvkové množiny na sebe, např. permutaci $(3,2,4,1)$ lze považovat za zobrazení množiny $\{1,2,3,4\}$ na sebe určené předpisem, který zapíšeme ve tvaru $\begin{pmatrix} 1, & 2, & 3, & 4 \\ 3, & 2, & 4, & 1 \end{pmatrix}$ : obrazem každého prvku horního řádku je prvek stojící pod ním v řádku dolním. Říkáme též, že permutace $(3,2,4,1)$ zobrazuje *1* na *3*, *2* na *2*, *3* na *4* a *4* na *1*, o prvku, který je danou permutací zobrazen sám na sebe, budeme často mluvit jako o prvku samodružném (ve výše uvedené permutaci to je prvek *2*). Je zřejmé, že permutace, jejíž všechny prvky jsou samodružné, existuje jediná pro každé *n* - je to permutace $(1,2,3,\dots,n)$. Nám však půjde o to, určit počet permutací z *n* prvků, ve kterých žádný prvek samodružný není, jedná-li se o permutace z prvků *1,2,3,...,n,* pak to jsou zřejmě právě ty permutace, ve kterých na prvním místě není *1*, na druhém *2*, ..., na *n*-tém není *n*. Pro ilustraci určeme tyto permutace pro $n = 1,2,3,4$ výčtem:

permutace z jediného prvku, která jej nezobrazuje na sebe, neexistuje,

permutace ze dvou prvků *1, 2*, která žádný z nich nezobrazuje na sebe, existuje jediná - je to permutace $(2,1)$,

permutace ze tří prvků *1, 2, 3,* které žádný z nich nezobrazují na sebe, existují právě dvě - jsou to permutace $(2,3,1)$ a $(3,1,2)$,

permutací ze čtyř prvků *1, 2, 3, 4,* které žádný z nich nezobrazují na sebe, existuje právě devět - jsou to permutace $(2,1,4,3)$, $(2,3,4,1)$, $(2,4,1,3)$, $(3,1,4,2)$, $(3,4,1,2)$, $(3,4,2,1)$, $(4,1,2,3)$, $(4,3,1,2)$, $(4,3,2,1)$.

Označíme-li $S_n$ počet permutací z *n* prvků, které žádný z nich nezobrazují na sebe, zjistili jsme právě, že je $S_1 = 0$, $S_2 = 1$, $S_3 = 2$, $S_4 = 9$.

Hodnoty $S_n$ pro $n > 4$ se obvykle získávají ze vztahu

$$S_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},$$

který se odvozuje na základě principu inkluze a exkluze. Naštěstí však můžeme tyto hodnoty získat i způsobem jiným, takže se bez tohoto principu obejdeme a nemusíme s ním studenty seznamovat. Známe-li totiž $S_1$ a $S_2$, můžeme libovolné $S_n$ pro $n \geq 3$ určit z rekurentního vztahu

$$S_n = (n-1)\ (S_{n-1} + S_{n-2}),$$

jeho odvození je pěkným příkladem kombinatorické úvahy. Před tím však můžeme studenty ještě upozornit na to, že stejný rekurentní vztah platí i pro $n!$, neboť je

$$n! = (n-1)\ [(n-1)! + (n-2)!]\ ,$$

jak se snadno ověří úpravou pravé strany. Studenti by měli sami přijít na to, proč hodnoty $S_n$ a $n!$ jsou různé, i když pro ně platí stejný rekurentní vzorec - je to způsobeno různými počátečními podmínkami : $1! = 1$, $2! = 2$, ale $S_1 = 0$, $S_2 = 1$. To, že pro čísla n! a $S_n$ platí stejný rekurentní vztah, je jedním z důvodů, proč čísla $S_n$ bývají nazývána subfaktoriály.

Ukážeme nyní, jak lze výše uvedený rekurentní vztah pro $S_n$ dokázat. Představme si proto, že jsme pro $n \geq 3$ utvořili všech $S_n$ permutací z prvků $1, 2, 3, \dots, n$, v nichž není žádný prvek zobrazen sám na sebe, a rozložme je do skupin podle toho, který prvek je v těchto permutací na prvním místě. Protože v těchto permutacích není žádný prvek samodružný, mohou v nich na prvním místě být pouze prvky $2, 3, \dots, n$, nikoli však $1$. Těchto skupin je tedy $n-1$ a je zřejmé, že každá obsahuje stejný počet permutací. Označíme-li počet permutací v libovolné takové skupině písmenem $p$, máme tak :

$$S_n = (n-1)p\ .$$

Číslo $p$ určíme tím způsobem, že zjistíme počet permutací, které začínají zvoleným prvkem, třeba číslem $2$. Tyto permutace pak rozlišíme podle toho, zda na jejich druhém místě je či není číslo $1$. Permutací, v nichž je na prvním místě 2 a na druhém $1$, je zřejmě $S_{n-2}$, neboť jejich první dvě místa jsou obsazena a žádný z prvků na zbývajících $n-2$ místech nesmí být samodružný, takže je lze na tato místa rozmístit $S_{n-2}$ způsoby. Permutací, v nichž je na prvním místě $2$ a na druhém místě není 1, je -jak je snadno vidět - právě tolik, kolik je permutací, v nichž je na prvním místě $1$ a na druhém není $2$, těchto permutací je však $S_{n-1}$. Je tedy počet všech permutací, v nichž žádný prvek není samodružný a které začínají číslem 2, roven $S_{n-1} + S_{n-2}$, a podle toho, co bylo řečeno výše, platí

$$p = S_{n-1} + S_{n-2}\ .$$

Dokázali jsme tak, že pro všechna $n \geq 3$ platí

$$S_n = (n-1)\ (S_{n-1} + S_{n-2})\ .$$

Užitím tohoto vztahu můžeme postupně určit $S_n$ pro libovolné přirozené číslo n, takže číslo $S_n$ můžeme považovat za známé pro všechna $n$. Následující příklady, kterými můžeme užití subfaktoriálů ilustrovat, není tedy nutno dovádět až do numerického výsledku.

1. Kolika způsoby může být šest dopisů zařazeno do šesti obálek tak, aby každý byl v nesprávné obálce ? /$S_6$/

2. Kolika způsoby lze na šachovnici 8x8 rozmístit osm stejných mincí tak, aby v každé řadě i v každém sloupci byla právě jedna a žádná nebyla na zvolené diogonále ? /$S_8$/

3. Kolika způsoby si může šest osob vybrat ze šesti různých párů rukavic dvě rukavice tak, aby jedna byla pravá, jedna levá a nepatřily přitom k témuž páru ? /$6!S_6$ /

4. Kolika způsoby lze osmi barvami obarvit šachovnici 8x8 tak, aby v žádné řadě nebyla dvě políčka téže barvy a v žádném sloupci nebyla dvě políčka téže barvy sousední ? /$8!(S_8)^7$/

5. Kolika způsoby je možno přestavět desetičlenný zástup tak, aby právě tři osoby zůstaly na místě ? /$\binom{10}{3}S_7$/

6. Kolika způsoby lze k obdélníkovému stolu s $n$ židlemi podél každé z jeho dvou delších stran rozesadit $n$ manželských párů tak, aby všichni muži seděli na jedné straně stolu a proti žádnému z nich neseděla jeho manželka ? /$2.n!S_n$/

---

TŘÍDY

B. Henry

Co je to za dobu
kdy tolik záleží na tom
zda ten či onen
má desitku
jedenáctku
dvanáctku

A kde jsou ty časy
kdy vůbec nebylo důležité
zda ten či onen
má před sebou
desítku
jedenáctku
dvanáctku
ale zda ta či ona
má jedničky
dvojky
trojky