Učitel matematiky

Jaroslav Seibert

Dvě setkání s Fibonacciho čísly

Učitel matematiky, Vol. 2 (1994), No. 4, 8–12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/152758

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1994

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Dvě setkání s Fibonacciho čísly

Jaroslav Seibert, VŠP Hradec Králové

Jen málo evropských učenců středověku výrazněji přispělo k dalšímu rozvoji matematiky. Mezi nimi je zřejmě nejznámnější Leonardo z Pisy, zvaný Fibonacci (asi 1170 - 1250). Jeho nejrozsáhlejší prací je Kniha o abaku ("Liber abaci"), ve které vyložil na svoji dobu v neobvyklé úplnosti a hloubce problematiku řešení lineárních a kvadratických rovnic. Dvanáctá kapitola této knihy obsahuje velké množství rozmanitých úloh, včetně úlohy o králících, jejíž řešení vede na sčítání členů rekurentně zadané posloupnosti. Právě význam této posloupnosti se hlavní měrou zasloužil o to, že se Fibonacciho jméno navždy zapsalo do dějin matematiky.

Připomeňme si nejprve zadání vzpomínané úlohy o králících.

" Kdosi umístil pár králíků na určitém místě ze všech stran ohrazeném zdí, aby poznal, kolik párů králíků se přitom zrodí průběhem roku, jestliže u králíků je tomu tak, že pár králíků přivede na svět měsíčně jeden pár, a že králíci počínají rodit ve dvou měsících svého věku."

Nevšímejme si toho, že zadání úlohy příliš neodpovídá realitě světa zoologie a soustřeďme se pouze na její matematický obsah. Řešení uvedené v tabulce 1 odpovídá předpokladu, že původní pár králíků začne rodit třetí měsíc svého pobytu v ohradě. Proměnná n označuje pořadové číslo měsíce a číslo f_n počet párů králíků v příslušném měsíci. Po roce by tedy mělo být v ohradě celkem 144 párů králíků. Pro úplnost dodejme, že Fibonacciho slovy popsané řešení vede k počtu 377 párů, protože vychází z předpokladu, že původní pár dá potomstvo již v prvním měsíci.

Tabulka 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
l_n	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322

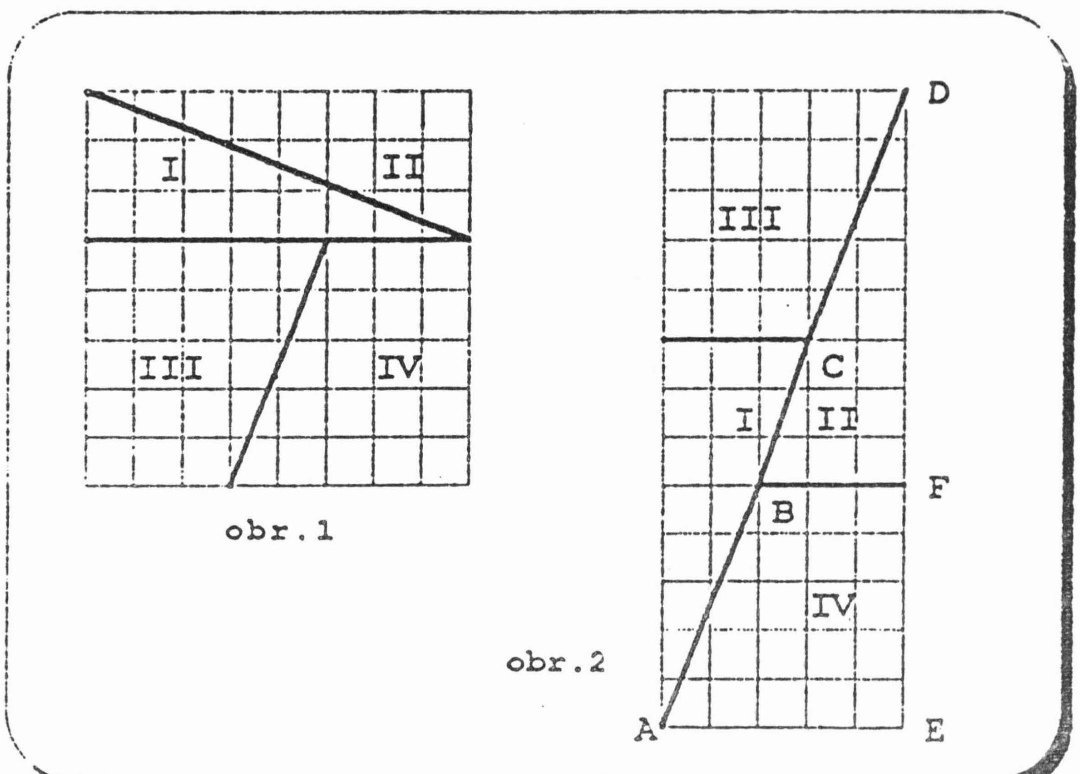
Prodloužíme-li princip výpočtu čísel f_n bez omezení, dostaneme klasický příklad rekurentně zadané posloupnosti. Pro její členy platí rekurentní předpis $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, doplněný prvními dvěma členy $f_1 = f_2 = 1$. V roce 1643 se poprvé objevil zápis této posloupnosti v uvedeném tvaru (A. Gerard). Teprve na konci 19. století E. Lucas pojmenoval posloupnost po Fibonaccim a její členy označil jako Fibonacciho čísla. Obliba této posloupnosti postupně vzrůstala. Na jedné straně byly podrobně a z různých hledisek zkoumány vlastnosti jejích členů, na druhé straně se však i v jiných oblastech matematiky a jiných vědních oborech objevovaly často překvapivé souvislosti zkoumaných jevů a objektů s Fibonaççiho čísly. Ukázalo se také užitečné zabývat se posloupnostmi, které se liší jen hodnotami prvních členů. Příkladem je tzv. Lucasova posloupnost, jejíž členy l_n nalezneme v tabulce 1.

Podívejme se nyní podrobněji na dvě ukázky uplatnění Fibonacciho čísel. Jde o nenáročné geometrické záležitosti, které může učitel matematiky využít ke zpestření své práce se žáky.

Přeměna čtverce v obdélník jiného obsahu.

Zřejmě se většina čtenářů již někdy setkala se zdánlivým "paradoxem", kdy jednoduchou manipulací s částmi rovinného obrazce dosáhneme změny jeho tvaru, přičemž se změní i obsah obrazce. Popíšeme si nyní jednu z nejznámějších verzí této úlohy.

Na obr. 1 je čtverec o straně délky 8 jednotek rozdělený na čtyři části, konkrétně na dva shodné trojúhelníky I, II a dva shodné lichoběžníky III, IV. Obsah čtverce je $8^2 = 64$ čtverečných jednotek.



Protože délky kratší odvěsny pravoúhlých trojúhelníků a kratší základny lichoběžníků jsou stejné, poskládáme trojúhelníky a lichoběžníky tak, jak vidíme na obr. 2. Tím vznikne obdélník o stranách délek 5 a 13 jednotek, jehož obsah je 5.13 = 65 čtverečných jednotek. Jak je to možné?

Odpověď přirozeně spočívá v tom, že ve skutečnosti body A,B,C,D z obr. 2 neleží v téže přímce, ale vytvářejí velice úzký rovnoběžník ABDC s jednotkovým obsahem. Označíme-li např. $|\angle EAB| = \alpha$, $|\angle FBD| = \beta$, pak zřejmě $tg\,\alpha = \frac{5}{2}, tg\,\beta = \frac{8}{3}$, což dokazuje nekolineárnost bodů A, B, D. Totéž platí i pro body D, C, A.

Pokusme se najít ještě další trojice přirozených čísel a,b,c určující postupně délky strany čtverce a stran obdélníku při popsané přeměně čtverce v obdélník. Je zřejmé, že mystifikace je tím zdařilejší, čím menší je rozdíl mezi obsahy, tzn. mezi čísly a^2, bc. Protože měříme pouze v celých jednotkách, je ideální, aby byl rozdíl roven jedné. Současně však i hodnoty $tg\,\alpha, tg\,\beta$ si musí být dostatečně blízké. Těmto podmínkám vyhovují např. čísla 13, 8, 21. Tedy čtverec o straně délky 13 jednotek lze rozdělit obdobně jako na obr. 1 na čtyři části, jejichž složením získáme obdélník o stranách délek 8 a 21 jednotek. Příslušný náčrtek si může čtenář provést sám. V tomto případě je však obsah obdélníka o jednotku menší než obsah čtverce, protože v obdélníku se jednotlivé části nyní překrývají. Platí totiž $tg\,\alpha = \frac{8}{3} > tg\,\beta = \frac{13}{5}$.

Pozorný čtenář si již jistě všiml, že v obou případech jsou použité délky stran pravoúhelníků tři po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Bližší pohled na tabulku 1 potvrzuje, že pro každá tři po sobě jdoucí Fibonacciho čísla zřejmě platí vztah $f_{n+1}^2 = f_n \,.\, f_{n+2} + (-1)^n$, který snadno dokážeme matematickou indukcí.

Pro $n = 1$ vztah platí, protože $1^2 = 1.2 + (-1)^1$.

Předpokládejme dále, že vztah platí pro $n = k$, tzn. $f_{k+1}^2 = f_k . f_{k+2} + (-1)^k$, a dokážeme, že platí i pro $n = k+1$. Upravujme postupně výraz na pravé straně:

$$f_{k+1}f_{k+3} + (-1)^{k+1} = f_{k+1}(f_{k+1} + f_{k+2}) + (-1)^{k+1} = f_{k+1}^2 + f_{k+1}f_{k+2} + (-1)^{k+1} = f_k f_{k+2}$$
$$+ (-1)^k + f_{k+1}f_{k+2} + (-1)^{k+1} = (f_k + f_{k+1})f_{k+2} = f_{k+2}^2 \,.$$

Teoreticky je tedy pro popsanou přeměnu čtverce v obdélník možné použít libovolná tři po sobě jdoucí Fibonacciho čísla. Pro trojici menších čísel než 5, 8, 13 je však rozdíl mezi hodnotami $tg\,\alpha, tg\,\beta$ tak velký, že nekolineárnost bodů A, B, C, D je příliš zřetelná.

Procvičte nyní svůj důvtip a pokuste se o obdobnou přeměnu obdélníku v jiný obdélník, založenou na vztahu $f_n . f_{n+3} = f_{n+1} . f_{n+2} + (-1)^{n+1}$ který platí pro libovolná čtyři po sobě jdoucí Fibonacciho čísla.

Fibonacciho čísla a Pythagorova věta.

V roce 1948 poprvé publikoval Ch. Raine svůj poznatek, že když vezme čtyři po sobě jdoucí Fibonacciho čísla, např. 3, 5, , 8, 13, pak součin vnějších čísel a dvojnásobek součinu vnitřních čísel představují délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku s celočíselnou délkou přepony.

Ve zvoleném případě skutečně $a = 3.13 = 39$, $b = 2.5.8 = 80$ jsou délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníku s přeponou délky $c = \sqrt{39^2 + 80^2} = 89$. Přitom 89 je také Fibonacciho číslo, které je součtem čtverců vnitřních čísel, tzn. $89 = 5^2 + 8^2$. Navíc ještě obsah trojúhelníku $S = \frac{1}{2}39.80 = 1560 = 3.5.8.13.$.

Označme nyní dvě libovolná sousední Fibonacciho čísla s,t, po nich budou následovat čísla $s+t$, $s+2t$. Pak $a = s.(s+2t) = s^2 + 2st$, $b = 2t.(s+t) = 2st + 2t^2$, $c^2 = (s^2+2st)^2 + (2st+2t^2)^2 = s^4 + 4s^3t + 4s^2t^2 + $ $+ 4s^2t^2 + 8st^3 + 4t^4 = (s^2 + 2st + 2t^2)^2$. Tedy délka přepony trojúhelníku je celé číslo $c = s^2 + 2st + 2t^2 = t^2 + (s+t)^2$ Pro obsah pravoúhlého trojúhelníku platí
$S = \frac{1}{2}(s^2 + 2st)(2st + 2t^2) = (s^2 + 2st)(st + t^2) = s.t.(s+t)(s+2t)$

Tabulka 2

Pořadí Fib.č.	Zápis Fib.č.		
:	:		
n	s		
$n+1$	t		
$n+2$	$s+t$	=	1. $(s+t)$
$n+3$	$s+2t$	=	$1.t + 1.(s+t)$
:	$2s+3t$	=	$1.t + 2.(s+t)$
:	$3s+5t$	=	$2.t + 3.(s+t)$
	$5s+8t$	=	$3.t + 5.(s+t)$
	:		:
:	:		:
$2n+3$			$t.t + (s+t).(s+t)$

V tabulce 2 jsou Fibonacciho čísla zapsána pomocí proměnných s,t. Počínaje číslem s pořadím n+3 jsou vyjadřena jako lineární kombinace proměnných $t, s+t$, přičemž koeficienty v této kombinaci jsou vždy dvě sousední Fibonacciho čísla. Z tabulky je vidět, že $c = t^2 + (s+t)^2$ je skutečně Fibonacciho číslo. Zbývá ještě otázka, kolikáté v pořadí členů

Fibonacciho posloupnosti toto číslo je ? I zde z údajů v tabulce snadno poznáme, že jde o číslo s pořadím 2n+3. Přitom také $2n+3=\frac{1}{2}[n+(n+1)+(n+2)+(n+3)]$, což je polovina součtu pořadí čtyř původních čísel ve Fibonacciho posloupnosti.

Výsledky předchozích úvah lze zformulovat do dvou obecně platných vztahů mezi Fibonacciho čísly:

1. $(f_n f_{n+3})^2+(2f_{n+1}f_{n+2})^2=f_{2n+3}^2$
2. $f_{n+1}^2+f_{n+2}^2=f_{2n+3}$.

Důkazy těchto tvrzení matematickou indukcí nebudeme provádět, protože jde o poměrně zdlouhavou, ale rutinní záležitost.

Uvedené dva případy pouze zhruba naznačují, jak se poměrně jednoduché vztahy mezi členy Fibonacciho posloupnosti, kterých se díky velice přirozenému rekurentnímu předpisu dá dokázat celá řada, uplatňují v rozmanitých situacích. Další možnosti poskytuje tzv. Binetův vzorec, což je funkční předpis pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti. S ním také souvisí zřejmě nejpopulárnější užití Fibonacciho čísel při dělení úsečky podle zlatého řezu.

Literatura: Boulger, W.:Pythagoras meets Fibonacci. Mathematics Teacher, 82, 4, 1989, s. 277-282.
Gardner, M.: Matematičeskije čudesa i tajny.(Překlad z angličtiny.) Nauka, Moskva 1982.
Juškevič, A.P.: Dějiny matematiky ve středověku. Academia, Praha 1977.
Vorobjev, N.N.: Fibonacciova čísla. SNTL, Praha 1953.

Matematik je dokonalým jen natolik,
nakolik je dokonalým člověkem,
nakolik v sobě cítí to krásno,
které je vlastně pravda:
jen tehdy je jeho práce důkladná,
čistá, jasná, oduševnělá,
skutečně dokonalá.

J.W.Goethe