Učitel matematiky

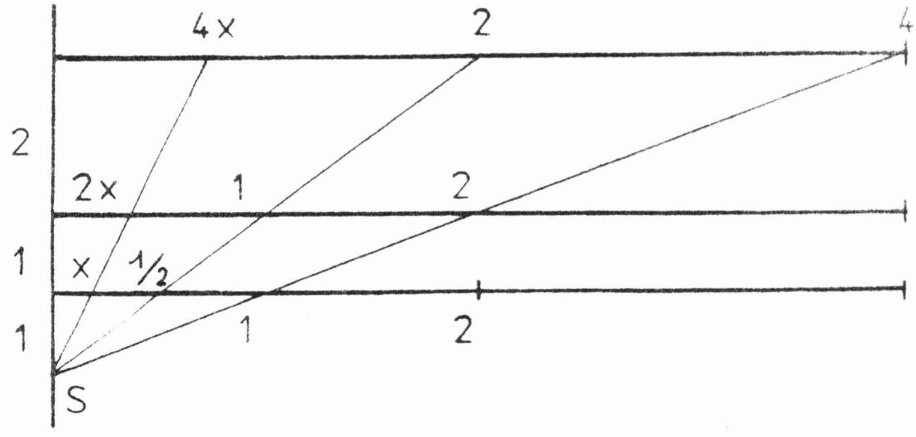
Pavel Leischner

Sugestivní řešení a protitah

Učitel matematiky, Vol. 3 (1995), No. 3, 13–16

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/152818`

podle obrázku 3 (vzdálenost tratí hlemýžďů A, B je dvojnásobná než vzdálenost tratí hlemýžďů B, C):



Obr. 3

Pomocí stejnolehlosti se středem S snadno zdůvodníme, že vyběhnou-li všichni tři hlemýždi A, B, C na své tratě současně, bude je pozorovatel z místa S vidět neustále v zákrytu.

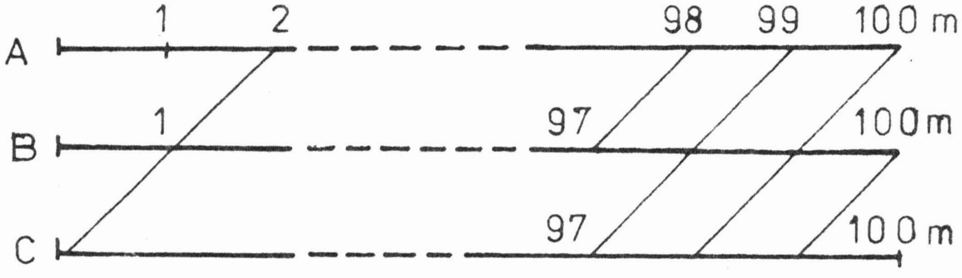
SUGESTIVNÍ ŘEŠENÍ A PROTITAH

PAVEL LEISCHNER

Domnívám se, že výzva v článku J. Kadlečka: *Člověk se chybami učí!* (viz [1]) si zaslouží více pozornosti, než jí bylo věnováno.

Z grafického znázornění drah běžců A, B, C na čase, které navrhuje F. Kuřina (viz [2]), můžeme úlohu sice správně vyřešit, chybu však přímo neodhalíme, neboť žák uvažoval v jiné rovině.

Za dostatečný „protitah“ (o který asi J. Kadlečkovi šlo) bych považoval rozšíření žákovy úvahy indukcí směrem ke startovní čáře (viz obr. 4). Samotný obrázek bez patřičného rozhovoru se studentem by asi k úplnému pochopení nestačil. Proto uvádím náměty otázek pro rozhovor s žákem. Rozdělil jsem je do čtyř skupin. Skupina I se týká důkazu nesprávnosti uvedeného řešení, další se zabývají hledáním správného postupu v rovině žákových úvah. Skupinu IV lze považovat za rozšiřující.



Obr. 4

V textu použijeme tuto dohodu: Bod na dráze běžce X ve vzdálenosti a metrů od startovní čáry budeme značit Xa, úsečku s krajními body Xa, Yb označíme (Xa, Yb).

I.

- Na obr. 1 jste dospěl k tomu, že když B uběhl 99 m, uběhl C 98 m. Dráhové rozdíly mezi B a C a mezi A a B jsou v odpovídajících úsecích dráhy podle zadání úlohy stejné, neboť pohyby jsou rovnoměrné a na startu i v cíli tyto rozdíly stejné byly. (V okamžiku startu byly rozdíly drah nulové, tedy stejné.) Znamená to tedy, že když A uběhl 99 m uběhl B 98 m?

(Pokud žák odpoví „ne“, logicky si odporuje, o čemž ho přesvědčíme.)

- Můžeme tedy do obr. 1 přidat úsečku $(A99, B98)$?
- Vidíme, že úsečky $(A99, B98)$, $(B99, C98)$ jsou rovnoběžné. Můžeme (po vašem vzoru) přikreslit $(B98, C97)$?
- Lze tímto způsobem přikreslovat další šikmé úsečky?
- Nakonec jsme obdrželi úsečku $(A2, C0)$, jejíž střed je bod $B1$. Jaký význam má tato úsečka, co vlastně představuje?
- Zjistili jsme, že v okamžiku startu je již běžec A 2 m před C a B je 1 m před C. To je ale v rozporu s tím, že mají být všichni tři v tomto okamžiku na startovní čáře.

II.

- Představte si, že jedete po dálnici v automobilu stálou rychlostí $v_2 = 20\ m/s$ a v sousedním pruhu je právě vedle vás jiný automobil, který se pohybuje stálou rychlostí $v_1 = 25\ m/s$ stejným směrem. Spojnice těžišť obou automobilů má délku $5\ m$ v okamžiku, kdy je kolmá na směr obou rychlostí. Jaký úhel bude tato spojnice svírat s vektory obou rychlostí za $1\ s$ od tohoto okamžiku?
- Jaký bude tento úhel za dvě (tři, čtyři ...) sekundy?
- Nakreslete úsečky spojující těžiště obou automobilů postupně pro časy 0, 1, 2, 3, ... sekundy.
- Proč nejsou tyto úsečky rovnoběžné?

(Jestliže na to ještě nepřišel, ptáme se dále.)

- Jaký je relativní pohyb sousedního automobilu vůči vám?
- Jakou relativní rychlostí se od vás vzdaluje?
- Dovedete si již představit, jak se mění směr spojnice těžišť automobilů v průběhu obou pohybů?
- Vraťme se nyní k obrázku 1. Odpovídá úsečka $(B99, C98)$ uvažované situaci? Neměla by se místo ní nakreslit jiná? Zkuste ji nakreslit!

III.

- Zkuste dokázat tvrzení: Dráhy odpovídající dvěma rovnoměrným pohybům za stejný čas jsou v témže poměru jako jejich rychlosti. (Vydělením rovnic $s_1 = v_1 \cdot t$, $s_2 = v_2 \cdot t$.)
- Označme v_1, v_2, v_3 po řadě rychlosti běžců A, B, C. Vyjádřete v_2 pomocí v_1, dále v_3 pomocí v_2 a nakonec v_3 pomocí v_1.
- Znamenají vámi zjištěné vztahy, že v_2 je o 1% (ze základu v_1) menší než v_1 a v_3 je o 1% (ze základu v_2) menší než v_2?
- Je mezi drahami běžců v každém časovém okamžiku běhu stejný vztah jako mezi jejich rychlostmi?
- Jestliže běželi všichni tři současně a běžec A uběhl $100\ m$, jak daleko za ním byl v tomto okamžiku B? Jak daleko za B byl C? Jak daleko za A byl C?

IV.

- Označme x vzdálenost tratí A, B a y vzdálenost tratí B, C. Dosud jsme mlčky předpokládali $x = y$. Ve své původní úvaze jste prodloužil úsečku $(A100, B99)$ do bodu $C98$. Zjistili jsme, že spojnice poloh běžců ve skutečnosti netvoří úsečku $(A100, C98)$, ale lomenou čáru složenou ze dvou úseček. Co se děje s úhlem těchto úseček, jestliže měníme poměr $x : y$?

(Otázku je možné konkretizovat: Necháme žáka namalovat spojnice ve zvoleném okamžiku nejprve pro $y = x$, pak například pro $y = 2x$, $y = 3x$ atd.)

- Mohou být v každém časovém okamžiku polohy všech tří běžců na přímce?
- Jestliže ano, jaký poměr $x : y$ tomu odpovídá? (Poměr je asi nejjednodušší zjistit z podobnosti lichoběžníků, na jejichž ramenech leží počáteční a koncové body vektorů rychlostí běžců. Vyjde $x : y = v_1 : v_2 = v_2 : v_3 = 100 : 99$.)
- Na závěr zjišťujeme, že konstrukce uvedená v původním nesprávném postupu může být správná, pokud zvolíme $x : y = 100 : 99$. Pak ale prodloužením úsečky $(A100, B99)$ vznikne úsečka $(A100, C98{,}01)$, která není rovnoběžná s úsečkou $(B100, C99)$. Běžec A porazil běžce B o $1{,}99\ m$.

BĚŽCI A ŽIVOT

JINDŘICH BEČVÁŘ

Úloha o tom, jak *tři běžci A, B a C změřili po dvojicích síly ve třech vzájemných soubojích* na $100\ m$, je podle mého názoru nešťastná, neboť popsaný děj je naprosto nereálný.

a) Žádný běžec neběží celou trať konstantní rychlostí.

b) Žádný běžec nepodá stejný (sportovní) výkon ve dvou různých závodech.

c) Nepřesnosti, kterých se dopustíme uvedenou „matematizací“ reálné situace (zavedení předpokladu o stejné konstantní rychlosti každého běžce v obou závodech), naprosto znehodnocují