

Jakub Koňářík; Jakub Teska
Franklova hypotéza

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 70 (2025), No. 1, 1–10

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/152929>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library*
<http://dml.cz>

Franklova hypotéza

Jakub Koňářík, Jakub Teska

Abstrakt. V článku se seznámíme s Franklovou hypotézou, která říká, že všechny konečné systémy množin uzavřené na sjednocení obsahují prvek, který patří alespoň do poloviny všech množin v systému. Rozebereme předpoklady hypotézy, základní poznatky, ekvivalentní formulace, vybrané známé částečné výsledky a výsledky týkající se malých systémů množin.

1. Hypotéza o množinových systémech uzavřených na sjednocení

Hypotéza o množinových systémech uzavřených na sjednocení je obecně připisována Péteru Franklovi [8], který ji poprvé zmínil v roce 1979, ale Balla, Bollobás a Eccles [2] píše, že hypotéza je starší a byla známa již v roce 1970. Timothy Gowers ji označil za jeden z nejznámějších otevřených problémů v kombinatorice, který se zdá být snadný, dokud se jej člověk nepokusí vyřešit. Detailní historický a matematický popis hypotézy lze nalézt v Bruhnově a Schaudtově přehledovém článku [5].

Systémem množin rozumíme množinu množin, tj. žádná množina se v systému neopakuje. V článku budeme systémy množin značit písmeny $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$, jednotlivé množiny budou A, B, C, \dots a prvky množin x, y, z, \dots . O systému množin \mathcal{F} řekneme, že je *uzavřený na sjednocení*, pokud pro každé dvě množiny $A, B \in \mathcal{F}$ jejich sjednocení $A \cup B$ také leží v \mathcal{F} . Hypotéza o uzavřených množinových systémech zní následovně.

Hypotéza 1. *V každém konečném systému množin $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$ uzavřeném na sjednocení existuje prvek, který je obsažen alespoň v polovině všech množin systému \mathcal{F} .*

Někdy je možné se setkat s trochu odlišnou verzí této hypotézy, která navíc předpokládá, že množinový systém neobsahuje prázdnou množinu, a tvrdí, že existuje prvek, který je obsažen ve více než polovině všech množin systému \mathcal{F} . Obě verze jsou ekvivalentní.

2. Předpoklady hypotézy

Ukážeme, že každý z předpokladů hypotézy je nezbytný. Pro jednoduchost o prvku a řekneme, že je *dobrý*, pokud je obsažen alespoň v polovině všech množin.

Začneme s předpokladem konečnosti systému. Hypotéza neplatí pro nekonečné systémy, což ukázal například Poonen [20]. Uvažujme množinový systém obsahující množiny $\{n, n + 1, n + 2, \dots\}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, viz obrázek 1. Tento systém je uzavřený na sjednocení, obsahuje nekonečně mnoho množin, ale každý prvek je obsažen pouze v konečně mnoha množinách.

Bc. JAKUB KOŇAŘÍK, RNDr. JAKUB TESKA, Ph.D., Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita v Plzni, Univerzitní 8, 301 00 Plzeň, e-mail: konarikj@students.zcu.cz, teska@kma.zcu.cz

$$\begin{array}{c}
\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \\
\{2, 3, 4, 5, \dots\} \\
\{3, 4, 5, \dots\} \\
\{4, 5, \dots\} \\
\vdots
\end{array}$$

Obr. 1. Nekonečný systém množin neobsahující dobrý prvek

Další předpoklad je uzavřenost systému na sjednocení. Na obrázku 2 jsou dva konečné systémy, které nejsou uzavřené na sjednocení a neobsahují žádný dobrý prvek.

$$\begin{array}{cc}
\{1, 2, 3\} & \{1, 2, 3, 4\} \\
\{1\} \{2\} \{3\} & \{1, 2\} \{2, 3\} \{3, 4\} \\
\emptyset & \{1\} \{2\} \{3\} \{4\} \\
& \emptyset
\end{array}$$

Obr. 2. Dva konečné systémy, které nejsou uzavřené na sjednocení a neobsahují dobrý prvek

V případě $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ je zřejmé, že množina všech prvků je prázdná a tedy nemůže existovat dobrý prvek.

Pokud bychom povolili duplicitní množiny v systému, dobrý prvek již nemusí existovat. Na obrázku 3 je systém obsahující všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$, kde jsou všechny jednoprvkové množiny zduplikovány. Snadno lze ověřit, že systém je uzavřený na sjednocení a žádný prvek není dobrý.

$$\begin{array}{c}
\{1, 2, 3\} \\
\{1, 2\} \{2, 3\} \{1, 3\} \\
\{1\} \{1\} \{2\} \{2\} \{3\} \{3\} \\
\emptyset
\end{array}$$

Obr. 3. Konečný systém s duplicitními množinami, který neobsahuje dobrý prvek

3. Základní vlastnosti

Pokud je Franklova hypotéza pravdivá, pak konstanta $1/2$ je nejlepší možná. Například systém \mathcal{F} všech podmnožin jisté konečné množiny A je uzavřený na sjednocení a zároveň každý prvek množiny A je přesně v jedné polovině všech množin $z \in \mathcal{F}$.

Každý systém \mathcal{F} uzavřený na sjednocení obsahuje také sjednocení všech množin, tj. množinu $\bigcup_{A \in \mathcal{F}} A$. Budeme ji nazývat *největší množina* a značit $U(\mathcal{F})$.

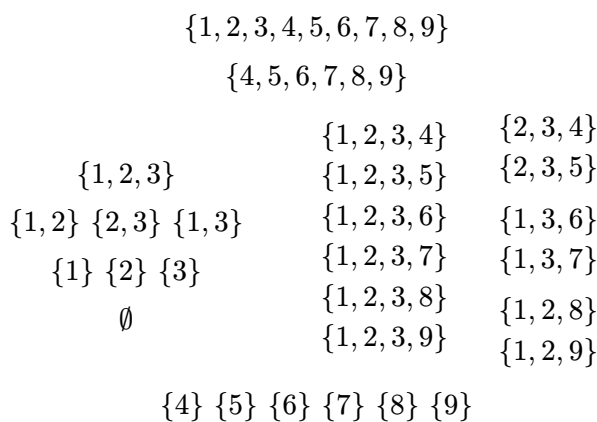
Následující pozorování, poprvé zmíněné Renaudem a Sarvatem [22], se týká systémů obsahujících malé množiny, konkrétně jednoprvkové a dvouprvkové množiny.

Pozorování 2. *Nechť \mathcal{F} je konečný systém množin uzavřený na sjednocení. Pokud \mathcal{F} obsahuje množinu $\{a\}$, potom prvek a je dobrý v \mathcal{F} . Pokud \mathcal{F} obsahuje množinu $\{a, b\}$, potom alespoň jeden z prvků a, b je dobrý v \mathcal{F} .*

Důkaz. Necht \mathcal{F} je konečný systém množin uzavřený na sjednocení a $\{a\} \in \mathcal{F}$. Uvažujme libovolnou množinu $A \in \mathcal{F}$. Pak buď $a \in A$, nebo $a \notin A$. Ve druhém případě z uzavřenosti na sjednocení plyne, že \mathcal{F} obsahuje množinu $\{a\} \cup A$. Proto v \mathcal{F} je alespoň tolik množin obsahujících prvek a jako množin daný prvek neobsahujících. Proto je a dobrý v \mathcal{F} .

Ve druhém případě \mathcal{F} obsahuje dvouprvkovou množinu $\{a, b\}$. Označme $\mathcal{F}_{a,b}$ systém všech množin z \mathcal{F} , které obsahují prvky a i b . Podobně \mathcal{F}_a a \mathcal{F}_b budou systémy množin z \mathcal{F} , které obsahují právě jeden z prvků a, b . Konečně \mathcal{F}_- bude tvořen množinami z \mathcal{F} , které neobsahují a ani b . Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $|\mathcal{F}_a| \geq |\mathcal{F}_b|$. Vezmeme-li libovolnou množinu $A \in \mathcal{F}_-$, pak z uzavřenosti na sjednocení plyne, že \mathcal{F} obsahuje $\{a, b\} \cup A$, která náleží do $\mathcal{F}_{a,b}$. Tedy $|\mathcal{F}_{a,b}| \geq |\mathcal{F}_-|$. Potom ale $|\mathcal{F}_{a,b} \cup \mathcal{F}_a| \geq |\mathcal{F}_b \cup \mathcal{F}_-|$, tedy prvek a je alespoň v polovině všech množin a tudíž je dobrý v \mathcal{F} . \square

Bohužel podobné tvrzení už neplatí pro množiny velikosti 3. To ukázali Renaud a Sarvate [22], když našli konečný systém množin \mathcal{F} uzavřený na sjednocení, který obsahuje množinu $\{1, 2, 3\}$, ale ani jeden z prvků 1, 2, 3 není dobrý v \mathcal{F} . Uvedeme podobnou jednodušší konstrukci od Poonena [20]. Pro snazší pochopení popíšeme systém množin \mathcal{F}^c , jehož prvky jsou komplementy množin z \mathcal{F} . Lze snadno ukázat, že \mathcal{F} je uzavřený na sjednocení právě tehdy, když \mathcal{F}^c je uzavřený na průnik, a že prvek je dobrý v \mathcal{F} , právě když je špatný (tj. není dobrý) v \mathcal{F}^c ; podrobnější vysvětlení uvedeme v následující kapitole. Systém \mathcal{F}^c je znázorněn na obrázku 4. Ukážeme, že je uzavřený na průnik a každý z prvků 1, 2, 3 je dobrý v \mathcal{F}^c , což znamená, že jde o špatné prvky v \mathcal{F} .



Obr. 4. Systém \mathcal{F}^c uzavřený na průnik, ve kterém je dobrý každý prvek množiny $\{1, 2, 3\}$

Pozorování 3. Systém množin \mathcal{F}^c je uzavřený na průnik a každý z prvků množiny $\{1, 2, 3\}$ je dobrý v \mathcal{F}^c .

Důkaz. Systém obsahuje všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$. Průnik libovolných dvou množin, které jsou tříprvkové nebo čtyřprvkové a jedna není podmnožinou druhé, je nějaká podmnožina množiny $\{1, 2, 3\}$. Průnik jediné šestiprvkové množiny s libovol-

nou podmnožinou množiny $\{1, 2, 3\}$ je vždy prázdný a průnik šestiprvkové množiny s libovolnou čtyřprvkovou nebo tříprvkovou množinou v \mathcal{F}^c je vždy jednoprvková množina, která je určité v \mathcal{F}^c . Takže \mathcal{F}^c je uzavřený na průnik. Navíc každý z prvků množiny $\{1, 2, 3\}$ patří do 15 z celkového počtu 28 množin v systému a tedy je dobrý. \square

Další jednoduché pozorování se týká množinových systémů, které nemusejí být uzavřené na sjednocení. Pokud je průměrná velikost množiny alespoň polovinou velikosti největší množiny, pak systém obsahuje dobrý prvek.

Pozorování 4. Pokud systém množin \mathcal{F} splňuje

$$\frac{1}{|\mathcal{F}|} \cdot \sum_{A \in \mathcal{F}} |A| \geq \frac{1}{2} |U(\mathcal{F})|,$$

pak obsahuje dobrý prvek.

Důkaz. Průměrná velikost množiny je alespoň $\frac{|U(\mathcal{F})|}{2}$, takže počet výskytů všech prvků v systému \mathcal{F} je alespoň $|\mathcal{F}| \cdot \frac{|U(\mathcal{F})|}{2}$. Protože systém obsahuje $|U(\mathcal{F})|$ prvků, z Dirichletova principu plyne, že alespoň jeden z prvků je obsažen v alespoň $\frac{|\mathcal{F}|}{2}$ množinách \mathcal{F} , a tedy je dobrý. \square

4. Ekvivalentní formulace hypotézy

V této kapitole se budeme zabývat třemi ekvivalentními formulacemi Franklovy hypotézy. Skutečnosti, že sjednocení a průniky mají duální vlastnosti, lze využít k formulaci hypotézy pro systémy uzavřené na průnik.

Hypotéza 5. Každý konečný systém množin uzavřený na průnik obsahuje prvek, který je nejvýše v polovině všech množin v systému.

Pozorování 6. Hypotéza 5 je ekvivalentní s hypotézou 1.

Důkaz. Necht \mathcal{F} je systém množin s největší množinou $U(\mathcal{F})$. Jeho komplementem je systém $\mathcal{F}^c = \{U(\mathcal{F}) \setminus A : A \in \mathcal{F}\}$.

Necht A, B jsou množiny systému \mathcal{F} . Pak množiny $U(\mathcal{F}) \setminus A$ a $U(\mathcal{F}) \setminus B$ jsou obě v \mathcal{F}^c . Pokud \mathcal{F} je uzavřený na sjednocení, pak $A \cup B \in \mathcal{F}$, a tedy množina $U(\mathcal{F}) \setminus (A \cup B)$ patří do \mathcal{F}^c . Ale to je přesně průnik $(U(\mathcal{F}) \setminus A) \cap (U(\mathcal{F}) \setminus B)$.

Dále ukážeme, že pokud \mathcal{F} má dobrý prvek, potom \mathcal{F}^c má špatný prvek. Předpokládejme, že prvek a je obsažen v alespoň polovině všech množin v \mathcal{F} . Pro každou množinu $A \in \mathcal{F}$ platí $a \in A$, právě když $a \notin U(\mathcal{F}) \setminus A$. Tedy a je v maximálně polovině všech množin v \mathcal{F}^c a je proto špatný v \mathcal{F}^c . \square

Příklad systému uzavřeného na sjednocení a jeho komplementu uzavřeného na průnik je na obrázku 5.

Jiná ekvivalentní formulace hypotézy je v řeči konečných svazů. I tato formulace je nasnadě, protože systém množin uspořádaný inkluzí tvoří částečně uspořádanou množinu. Řekneme, že prvek x svazu L je ireducibilní, pokud $x = a \vee b$ pro libovolnou dvojici $a, b \in L$ implikuje $x = a$ nebo $x = b$.

$$\begin{array}{cc}
\{1, 2, 3, 4\} & \{1, 2, 3, 4\} \\
\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 4\} & \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\} \\
\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\} & \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\} \\
\{1\}, \{2\} & \{1\}, \{3\}, \{4\} \\
\emptyset & \emptyset
\end{array}$$

Obr. 5. Vlevo systém uzavřený na sjednocení, vpravo k němu komplementární systém uzavřený na průnik

Hypotéza 7. *Nechť (L, \preceq) je konečný svaz s alespoň dvěma prvky. Potom v něm existuje ireducibilní prvek $a \in L$ takový, že alespoň polovina všech prvků svazu L je větší než a .*

Důkaz ekvivalence této hypotézy s Franklovou hypotézou lze nalézt v [5].

Hypotézu o systémech uzavřených na sjednocení lze také formulovat pomocí maximálních nezávislých množin v bipartitních grafech. *Nezávislá množina* grafu G je podmnožina vrcholů grafu taková, že žádné dva její vrcholy nejsou spojeny hranou v G . Nezávislá množina je *maximální*, pokud do ní nelze přidat žádný vrchol tak, aby zůstala nezávislá.

Hypotéza 8. *Nechť G je bipartitní graf s alespoň jednou hranou. Potom obě části bipartitního grafu obsahují vrchol, který je nejvýše v polovině maximálních nezávislých množin grafu G .*

Tuto formulaci objevili Bruhn, Charbit, Schaudt a Telle [4]. Dokázali její ekvivalenci s Franklovou hypotézou a ověřili pravdivost hypotézy pro bipartitní chordální grafy a také pro subkubické bipartitní grafy.

5. Dílčí výsledky

V roce 2022 Gilmer [9] dokázal průlomový výsledek nalezením konstantního dolního odhadu pro hypotézu o systémech uzavřených na sjednocení.

Věta 9. *V každém konečném systému $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$ uzavřeném na sjednocení existuje prvek, který je obsažen v alespoň 1 % všech množin z \mathcal{F} .*

Ve své práci poznamenal, že výsledek by možná šlo vylepšit až na $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 38$ %. Nedlouho poté tuto domněnku nezávisle na sobě dokázali Alweiss, Huang a Selke [1], Chase a Lovett [10] a Sawin [23].

Věta 10. *V každém konečném systému $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$ uzavřeném na sjednocení existuje prvek, který je obsažen v alespoň $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 38$ % všech množin z \mathcal{F} .*

Tento dolní odhad následně Cambie [6] ještě vylepšil zhruba o 0,038 %. Pokud je čtenářům číslo $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 38$ % povědomé, není to náhoda. Je to totiž přesně $1 - 1/\varphi$, kde φ je hodnota zlatého řezu.

Další dílčí výsledky jsou inspirovány pozorováními pro jednoprvkové a dvouprvkové množiny. Zavedeme tzv. franklovsky úplné systémy, jejichž přítomnost ve větším systému implikuje existenci dobrého prvku.

Definice 11. Systém uzavřený na sjednocení \mathcal{F}_c je franklovsky úplný, pokud pro každý konečný systém $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}_c$ uzavřený na sjednocení je nějaký prvek z \mathcal{F}_c dobrý v \mathcal{F} .

Poonen našel nutnou a postačující podmínku pro franklovsky úplné systémy, viz [20]. A také dokázal, že tři tříprvkové podmnožiny čtyřprvkové množiny tvoří franklovsky úplný systém. Vaughan [24] dále rozšířil Poonenův výsledek. Například dokázal, že všech pět čtyřprvkových podmnožin pětiprvkové množiny nebo libovolných deset čtyřprvkových podmnožin šestiprvkové množiny tvoří franklovsky úplný systém.

Následně v roce 2007 Morris [18] našel kompletní charakterizaci všech franklovsky úplných systémů s 5 prvky. Navíc přišel s dalšími subsystemy, který generují franklovsky úplné systémy. V následující větě uvedeme tři takové subsystemy. Další jsou popsány v [18].

Věta 12. *Hypotéza o systémech uzavřených na sjednocení je pravdivá pro každý konečný systém \mathcal{F} uzavřený na sjednocení, pokud splňuje alespoň jednu z následujících podmínek:*

- \mathcal{F} obsahuje alespoň tři tříprvkové podmnožiny pětiprvkové množiny.
- \mathcal{F} obsahuje alespoň čtyři tříprvkové podmnožiny šestiprvkové množiny.
- \mathcal{F} obsahuje alespoň osm čtyřprvkových podmnožin šestiprvkové množiny.

Marić, Vučković a Živković [16] nedávno našli úplnou charakterizaci franklovsky úplných systémů s maximálně 6 prvky.

6. Malé systémy množin

V této části se zaměříme na systémy množin, kde velikost největší množiny je omezena nějakou konstantou. Můžeme pak formulovat slabší hypotézu následovně.

Hypotéza 13. *Nechť $n \in \mathbb{N}$. Pak každý konečný systém množin $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$ uzavřený na sjednocení takový, že $|U(\mathcal{F})| \leq n$, obsahuje prvek, který je obsažen alespoň v polovině všech množin.*

Bohužel dokázat tuto hypotézu i pro malá n za pomoci počítače je velice těžké. Za použití „hrubé síly“, neboli procházení všech možností, to jde pouze pro velmi malá n . Důvod je ten, že n -prvková množina má 2^n různých podmnožin, což jsou množiny, které se mohou objevit v systému \mathcal{F} . A tedy existuje 2^{2^n} různých systémů obsahujících tyto množiny. Tato funkce roste neuvěřitelně rychle. Například jen pro $n = 10$ je počet různých systémů s deseti prvky zhruba $1,8 \cdot 10^{308}$, což už je příliš mnoho na procházení každého z nich.

V roce 1992 Poonen [20] potvrdil pravdivost hypotézy pro systémy s největší množinou velikosti nejvýše 7. Lo Faro [15] vylepšil jeho výsledek na 9. Dalších vylepšení pro $n = 10, 11$ a 12 následně dosáhli Marković [17], Bošnjak a Marković [3], Vučković a Živković [25]. Nám se podařilo dokázat, že Franklova hypotéza platí pro všechny systémy uzavřené na sjednocení, kde velikost největší množiny je nejvýše 14.

V krátkosti popíšeme náš přístup k problému a základní myšlenku důkazu. Nejprve jsme hypotézu převedli na problém lineárního programování, a pak k řešení úlohy použili počítač.

Lineární programování je optimalizační problém nalezení minima lineární funkce určitého počtu proměnných na množině popsané soustavou lineárních nerovnic.

Definice 14. Necht $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Hledání minima funkce $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, vzhledem k nerovnicím $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq 0$, se nazývá problém lineárního programování (LP). Zkráceně píšeme

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

Funkce $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ se nazývá *účelová funkce* a vektor $\mathbf{x} \geq 0$ vyhovující nerovnicím $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ se nazývá *přípustné řešení*. Nejpoužívanějším algoritmem na řešení LP je tzv. simplexový algoritmus, který je obecně velmi rychlý a efektivní. Ale v některých patologických případech nemusí být polynomiální. Elipsoidový algoritmus, objevený později, vždy běží v polynomiálním čase. Více o problému LP lze nalézt v [11].

Pro ekvivalentní formulaci Frankovy hypotézy však potřebujeme celočíselné lineární programování, kde proměnné nejsou reálné, ale celočíselné.

Definice 15. Necht $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Hledání minima funkce $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n$, vzhledem k nerovnicím $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} \geq 0$, se nazývá problém *celočíselného lineárního programování* (ILP, z anglického integer linear programming). Zkráceně píšeme

$$\begin{aligned} \min \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n, \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq 0. \end{aligned}$$

O problému celočíselného lineárního programování ILP je známo, že je NP-těžký. To znamená, že není znám žádný efektivní (polynomiální) algoritmus řešení. Myšlenka převodu Frankovy hypotézy s největší množinou velikosti n na problém ILP je následující.

Označme největší množinu $U = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ a množinu všech jejích podmnožin $P(U)$. Pro každou množinu $A \in P(U)$ zavedeme binární proměnnou x_A . Pokud bude $x_A = 1$, znamená to, že množina A patří do systému \mathcal{F} , zatímco pro $x_A = 0$ do něj nepatří. Uzavřenost systému na sjednocení pak popisují nerovnosti

$$x_{A \cup B} + 1 \geq x_A + x_B, \quad A, B \in P(U).$$

Pokud totiž $x_A = 1$ a $x_B = 1$, pak $x_{A \cup B} + 1 \geq 2$ implikuje $x_{A \cup B} = 1$. Dále zavedeme novou proměnnou a , která bude reprezentovat četnost nejčastějšího prvku v systému; to zajistíme soustavou nerovností

$$a \geq \sum_{A: i \in A} x_A, \quad i \in U,$$

kde $\sum_{A: i \in A} x_A$ odpovídá počtu všech množin A obsahující prvek i . Tedy hodnota a je větší nebo rovna počtu výskytů každého prvku v systému. Přes tuto proměnnou ale budeme minimalizovat, takže bude skutečně rovna počtu výskytů nejčastějšího prvku v systému. Přesněji budeme minimalizovat výraz

$$a - \frac{1}{2} \sum_{A \in P(U)} x_A,$$

tj. od proměnné a ještě odečteme polovinu počtu všech množin obsažených v systému. Tento výraz je nezáporný, pokud se v systému nachází prvek, který je obsažen v alespoň polovině všech množin, a naopak záporný, pokud v systému takový prvek neexistuje.

Problém 1. Necht $U = \{1, 2, \dots, n\}$ pro dané n . Uvažujme následující úlohu ILP:

Proměnné: $x_A \in \{0, 1\}, A \in P(U),$
 $a \in \mathbb{Z}.$

Nerovnice: $x_{A \cup B} + 1 \geq x_A + x_B, \quad A, B \in P(U),$
 $a \geq \sum_{A: i \in A} x_A, \quad i \in U.$

Minimalizuj: $a - \frac{1}{2} \sum_{A \in P(U)} x_A.$

Franklova hypotéza platí pro dané n právě tehdy, když tento problém má nezáporné optimální řešení. Jak jsme ale zmínili dříve, problém celočíselného programování je NP-těžký, takže pomocí počítače prakticky neřešitelný pro větší úlohy. Otestovali jsme, že počítač byl schopný vyřešit úlohu pouze pro $n = 9$; pro větší n už by to trvalo příliš dlouho. V důkazu Franklovy hypotézy pro $n = 14$ jsme museli daný problém modifikovat a místo celočíselných proměnných jsme vzali reálné proměnné.

Problém 2. Necht $U = \{1, 2, \dots, n\}$ pro dané n . Uvažujme následující úlohu LP:

Proměnné: $x_A \in [0, 1], A \in P(U),$
 $a \in \mathbb{R}.$

Nerovnice: $x_{A \cup B} + 1 \geq x_A + x_B, \quad A, B \in P(U),$
 $a \geq \sum_{A: i \in A} x_A, \quad i \in U.$

Minimalizuj: $a - \frac{1}{2} \sum_{A \in P(U)} x_A.$

Pokud tento problém má nezáporné optimální řešení, tj. nezáporné minimum účelové funkce, potom musí mít i původní celočíselný problém nezáporné optimální řešení, protože množina přípustných řešení celočíselného problému je podmnožinou řešení modifikovaného problému. Problém 2 sice není ekvivalentní s Franklovou hypotézou, ale pořád platí, že pokud je minimum účelové funkce nezáporné, pak existuje dobrý prvek. Bohužel takto definovaný problém má minimum z účelové funkce záporné, ale na druhou stranu počítač umí nalézt optimální řešení velice rychle i pro $n = 14$. Takže nejtěžší práce byla dosáhnout nezáporného minima účelové funkce. To se nakonec po-

dařilo přidáním nových nerovnic (které jsou splněné v každém systému uzavřeném na sjednocení, tj. nezáporné minimum výsledného problému stále implikuje existenci dobrého prvku) a rozdělením hypotézy na velké množství dílčích případů, pro které už vyšlo minimum účelové funkce nezáporné. To nakonec stačilo k důkazu platnosti Franklovy hypotézy pro $n = 14$, přičemž výpočet na běžném počítači trval cca 1 týden. (Odhadujeme, že s dostatečně výkonným výpočetním serverem by mohl být zvládnutelný i případ $n = 15$.) Více podrobností o důkazu a metodách bude uveřejněno v připravovaném článku.

Poděkování. Článek vychází ze společného výzkumu s Janou Chrastinovou a Adamem Kabelou, text je inspirován úvodem bakalářské práce Jakuba Koňářika [13].

L i t e r a t u r a

- [1] ALWEISS, R., HUANG, B., SELLKE, M.: *Improved lower bound for Frankl's union-closed sets conjecture*. Electron. J. Combin. 31 (2024), article no. 3.35.
- [2] BALLA, I., BOLLOBÁS, B., ECCLES, T.: *Union-closed families of sets*. J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), 531–544.
- [3] BOŠNJAK, I., MARKOVIĆ, P.: *The 11-element case of Frankl's conjecture*. Electron. J. Combin. 15 (2008), paper no. R88.
- [4] BRUHN, H., CHARBIT, P., SCHAUDT, O., TELLE, J. A.: *The graph formulation of the union-closed sets conjecture*. European J. Combin. 43 (2015), 210–219.
- [5] BRUHN, H., SCHAUDT, O.: *The journey of the union-closed sets conjecture*. Graphs Combin. 31 (2015), 2043–2074.
- [6] CAMBIE, S.: *Better bounds for the union-closed sets conjecture using the entropy approach*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2212.12500>
- [7] CAMBIE, S.: *Progress on the union-closed conjecture and offsprings in winter 2022–2023*. Nieuw Arch. Wiskd. (5) 24 (2023), 219–224.
- [8] FRANKL, P.: *Extremal set systems*. In: R. L. Graham, M. Grötschel, L. Lovász (eds.): Handbook of combinatorics, Elsevier, 1995, 1293–1329.
- [9] GILMER, J.: *A constant lower bound for the union-closed sets conjecture*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2211.09055>
- [10] CHASE, Z., LOVETT, S.: *Approximate union closed conjecture*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2211.11689>
- [11] CHVÁTAL, V.: *Linear programming*. W.H. Freeman, 1983.
- [12] KNILL, E.: *Graph generated union-closed families of sets*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/math/9409215>
- [13] KOŇAŘÍK, J.: *Union-closed sets conjecture and the strength of constraints in linear programming*. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni, 2024. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11025/57294>
- [14] LO FARO, G.: *A note on the union-closed sets conjecture*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 57 (1994), 230–236.
- [15] LO FARO, G.: *Union-closed sets conjecture: improved bounds*. J. Combin. Math. Combin. Comput. 16 (1994), 97–102.

- [16] MARIĆ, F., VUČKOVIĆ, B., ŽIVKOVIĆ, M.: *Fully automatic, verified classification of all Frankl-complete (FC(6)) set families*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/1902.08765>
- [17] MARKOVIĆ, P.: *An attempt at Frankl's conjecture*. Publ. Inst. Math. (Beograd) 81 (2007), 29–43.
- [18] MORRIS, R.: *FC-families and improved bounds for Frankl's conjecture*. European J. Combin. 27 (2006), 269–282.
- [19] PEBODY, L.: *Extension of a method of Gilmer*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2211.13139>
- [20] POONEN, B.: *Union-closed families*. J. Combin. Theory Ser. A 59 (1992), 253–268.
- [21] REINHOLD, J.: *Frankl's conjecture is true for lower semimodular lattices*. Graphs Combin. 16 (2000), 115–116.
- [22] SARVATE, D. G., RENAUD, J.-C.: *On the union-closed sets conjecture*. Ars Combin. 27 (1989), 149–154.
- [23] SAWIN, W.: *An improved lower bound for the union-closed set conjecture*. Dostupné z: <https://arxiv.org/abs/2211.11504>
- [24] VAUGHAN, T. P.: *Families implying the Frankl conjecture*. European J. Combin. 23 (2002), 851–860.
- [25] VUČKOVIĆ, B., ŽIVKOVIĆ, M.: *The 12-element case of Frankl's conjecture*. IPSI BgD Transactions on Internet Research 13 (2017), 65–71.
- [26] WÓJCIK, P.: *Density of union-closed families*. Discrete Math. 105 (1992), 259–267.