Růžena Blažková

Poznámka k dělení nulou

Učitel matematiky, Vol. 33 (2025), No. 1, 40–45

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153006

POZNÁMKA K DĚLENÍ NULOU

Růžena Blažková

Číslo nula má v matematice zvláštní postavení. Zavádí se jako počet prvků prázdné množiny nebo pomocí odčítání dvou stejných čísel. Je to celé číslo, není to číslo kladné ani záporné. Pro operaci sčítání má význam prvku neutrálního ($a + 0 = 0 + a = a$), pro operaci odčítání tuto vlastnost nemá ($a - 0 \neq 0 - a$). Pro operaci násobení má význam prvku agresívního ($a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$). Při dělení, pokud je dělenec nula, dělitel číslo různé od nuly, pak podíl je nula. Jaká je situace, když dělenec je číslo různé od nuly a dělitel je nula?

Při zdůvodňování skutečnosti, že nulou nelze dělit, se můžeme setkat s různými tzv. „mnemotechnickými pomůckami“, např.

- Nulou se nedělí ani v neděli.
- Mám pět jablek a mám je rozdělit mezi 0 dětí, jak to udělám? Tento postup navozuje představu $5 : 0 = 5$, protože žáci mají stále konkrétní představu pěti jablek.
- Nula je moc tlustá, do žádného čísla se nevejde. Proto se jí nedá dělit. Ale vejde se sama do sebe, tak $0 : 0 = 1$.

Tato rčení však nemají žádnou didaktickou hodnotu, neboť podstatu dělení nulou neobjasňují a jsou pro žáky spíše zavádějící, to poslední dokonce chybné.

Na internetu lze nalézt mnoho zdůvodnění nejrůznější úrovně. Avšak jak problém zdůvodnit žákům, kteří mají potřebu zjistit, proč se nedá dělit nulou, prostředky jim přístupnými?

Výuka matematiky na základní škole předpokládá, že žákům se budou předkládat matematické poznatky didakticky transformované tak, aby jim žáci na určitém stupni základní školy porozuměli, avšak aby didaktická transformace byla v souladu s matematikou odbornou, aby se v budoucnu nemusely pojmy „přeučovat“ nebo aby se pojmy nemusely budovat znovu. Ve školské matematice existuje několik oblastí, kdy se této tezi poněkud zpronevěřujeme. Mezi tyto oblasti patří také dělení číslem nula.

Při zdůvodňování, proč nelze dělit nulou, není příliš vhodné využívat reálných situací, ale vhodnější je obrátit se na osvědčenou matematiku. Na každém stupni školní docházky máme k dispozici rozdílný matematický aparát a ten můžeme využít.

Na prvním stupni základní školy, zpravidla ve třetím ročníku, se žáci při výuce násobení a dělení setkávají s dělením nulou poprvé. Zpravidla se dozvědí fakt, že nulou nelze dělit, ale často již bez jakéhokoliv rozumného zdůvodnění. Potom se objevují chyby typu $5 : 0 = 0$, $5 : 0 = 5$. V tomto případě je vhodné využít zkoušku správnosti při dělení a umožnit tak žákům, aby si poznatek vytvořili sami. Na otázku, kolik je např. $5 : 0$, žáci nejčastěji odpoví buď 0 nebo 5. Jestliže provedeme zkoušku správnosti pro dělení, pak by muselo platit: $0 \cdot 0 = 5$, nebo v druhém případě $5 \cdot 0 = 5$. Toto však neplatí.

Žáci mohou navrhovat další a další čísla jako podíl a vždy poznávají, že není možné pro zvolený podíl provést úspěšně zkoušku správnosti. Tímto postupem je můžeme přivést k tomu, že nenajdeme žádné číslo, pro které bychom po dělení nulou mohli provést zkoušku správnosti úspěšně. Obecně, kdyby pro nenulové číslo a platilo $a : 0 = x$, pak by zkouška správnosti $x \cdot 0 = a$ pro $a \neq 0$ byla nesmyslná.

V sedmém ročníku, kdy žáci umí dělit číslo zlomkem, můžeme uvést další zdůvodnění. Na druhém stupni základní školy můžeme využít funkčního myšlení. Žáci sledují, jak se mění podíl v závislosti na změnách dělitele, v případě, že dělenec je konstantní. Vhodné je vybrat číslo, které má více dělitelů, např. 36. Postupně uvádíme příklady:

$$
\begin{array}{lll}
36 : 36 = 1 & 36 : 9 = 4 & 36 : 2 = 18 \\
36 : 18 = 2 & 36 : 4 = 9 & 36 : 1 = 36 \\
36 : 12 = 3 & 36 : 3 = 12 & 36 : 6 = 6
\end{array}
$$

$$36 : \frac{1}{2} = 72$$
$$36 : \frac{1}{3} = 108$$
$$\frac{1}{10} = 360$$
$$\frac{1}{100} = 3\,600$$
$$\frac{1}{1\,000} = 36\,000$$
$$36 : \frac{1}{1\,000\,000} = 36\,000\,000$$
$$36 : \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 36\,000\,000\,000$$
$$\vdots$$

Když budeme dělitele dále zmenšovat, podíl se bude zvětšovat, čím blíže bude dělitel k nule, tím bude podíl větší.

K ilustraci je také možné využít grafu nepřímé úměrnosti. Graf funkce $y = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$ názorně přibližuje proces přibližování se hyperboly k asymptotám, jestliže x neustále klesá, blíží se k nule, y roste nade všechny meze.

Na střední nebo vysoké škole se studenti setkají s pojmem limita a zpravidla není pro ně problém pochopit, že $\lim\limits_{n\to 0} \frac{1}{n} \to \infty$.

Žáci se tak dostávají k pojmu nekonečno. Žákům a studentům je možné doporučit publikaci Seife (2005), ze které se dozví, jaký je původ nuly, jaké postavení měla v různých numeračních soustavách a mnoho dalších informací, například vztah nuly a nekonečna.

> *Nula a nekonečno se navzájem vždycky podezřele podobají. Ať nulu násobíme čímkoli, dostaneme opět nulu. Vynásobíme-li čímkoliv nekonečno, bude výsledkem zase nekonečno. Dělení čísla nulou dává nekonečno; dělení čísla nekonečnem vede k nule. Přičtením nuly k nekonečně malé veličině zůstává nekonečně malá veličina nezměněna. Přičtením čísla k nekonečnu se zase nijak nezmění toto nekonečno. Už od doby renesance byly tyto podobnosti zřejmé, ale matematikové museli čekat až do konce Francouzské revoluce, než klubko záhad velkého tajemství nuly konečně rozmotali* (Seife, 2005, s. 152).

Dále je vhodné žákům a studentům doporučit k prostudování kapitolu o nekonečnu z publikace Kuřina a Vondrová (2022). Mimo jiné se zde mohou seznámit s dvěma podobami nekonečna, nekonečnem potenciálním a nekonečnem aktuálním.

> *Je známo, že už Staří Řekové věděli, že přirozených čísel* $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ *je nekonečně mnoho. Ovšem tento fakt můžeme nahlížet dvěma způsoby, jak výstižně popisuje Eduard Fuchs.*

Dále autoři uvádějí citaci E. Fuchse (1999, s. 105):

> *Budeme-li postupně psát přirozená čísla, nikdy je nevypíšeme všechna. Za každým číslem následuje další, jakoukoliv předem stanovenou mez dříve nebo později překročíme. Takto chápané nekonečno popisující proces, který nikdy nekončí, mez, které nikdy nedosáhneme, to je tzv. potenciální nekonečno.*
>
> *My dnes však, pod vlivem vývoje, který trvá již několik desetiletí, chápeme nekonečnost systému jinak: díváme se na množinu N, jako bychom ji „viděli“ hotovou, stavíme se do pozice, kterou Řekové přenechali bohům a která nebyla určena lidskému zkoumání. Nekonečné množiny si představujeme jako završené a zkoumáme bez obav vlastnosti těchto systémů. Tomuto nekonečnu, chápanému v završené, definitivní formě, se říká aktuální nekonečno.* (Kuřina & Vondrová, 2022, s. 260).

Studentům často vrtá hlavou, jak je to tedy s dělením $0 : 0$. Vzhledem k výše uvedenému je patrné, že tento výraz je třeba chápat limitně, že jde vlastně o neurčitý výraz. Na internetu lze najít několik poznámek o neurčitých výrazech, ale jen velmi povrchních. V budoucnu mají žáci i studenti šanci dozvědět se něco o limitách, l´Hospitalovu pravidlu, ale to snad na vysoké škole, pokud budou studovat matematiku.

Správné pochopení procesu, že nulou se nedělí, má pak význam při počítání se zlomky, lomenými algebraickými výrazy, úpravách rovnic apod. Někteří žáci se diví, proč musí při úpravách algebraických výrazů neustále hlídat podmínku, aby byl jmenovatel různý od nuly, nebo proč při úpravách rovnic násobíme obě strany rovnice číslem různým od nuly.

Pro ilustraci dělení nulou uvádíme tři sofismata. Připomeňme, že pod pojmem sofisma rozumíme logicky nesprávný soud vydávaný za správný (úmyslně klamný důkaz). Takových sofismat si žáci mohou vytvořit bezpočet.

1.

$a^2 = a \cdot a$	od obou stran rovnosti odečteme výraz $a \cdot a$
$a^2 - a \cdot a = a \cdot a - a \cdot a$	upravíme, výraz na levé straně rozložíme, na pravé straně vytkneme a
$(a-a)(a+a) = a(a-a)$	obě strany dělíme výrazem $(a-a)$
$2a = a$	obě strany dělíme a
$2 = 1$	

2.

$a = \dfrac{3}{2}b$	obě strany rovnosti násobíme čtyřmi
$4a = 6b$	vyjádříme rozdílem, např.
$14a - 10a = 21b - 15b$	upravíme
$15b - 10a = 21b - 14a$	vytýkáme
$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$	obě strany dělíme výrazem$(3b - 2a)$
$5 = 7$	

3.

$6x + 25 = 10x + 15$	vynásobíme dvěma
$12x + 50 = 20x + 30$	od obou stran odečteme 80
$12x - 30 = 20x - 50$	vytýkáme
$6(2x - 5) = 10(2x - 5)$	obě strany dělíme výrazem $(2x - 5)$
$6 = 10$	

V uvedených sofismatech se setkáváme s logickou chybou, která spočívá v tom, že obě strany rovnosti nebo rovnice dělíme výrazem, který je roven nule, ač je zpravidla nějak zastřený. Většinou žáci v průběhu výpočtu zapomenou na to, že výraz je roven nule, což zpravidla vyplývá z první rovnosti.

Je pochopitelné, že uvedené vysvětlení, proč nelze dělit nulou, nezaručí, že všichni žáci učivo ovládnou. Setkáme se se žáky, kteří nemají potřebu jakéhokoliv zdůvodňování, kteří pouze uplatňují naučená pravidla, nebo se žáky, kteří se tyto postupy nesnaží pochopit, často jakékoliv odůvodňování odmítají. Přesto je vhodné ve výuce tyto postupy uplatňovat, neboť je mnoho žáků, kteří o sděleních učitele nebo sděleních v učebnicích přemýšlejí a zdůvodnění uvítají. Vnímaví žáci mají šanci vidět další souvislosti i něco smysluplného.

Literatura

[1] Fuchs, E. (1999). *Teorie množin.* Masarykova univerzita.

[2] Kuřina, F., & Vondrová, N. (2022). *15 pohledů na školskou matematiku. Jak to vidíme.* Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta.

[3] Seife, Ch. (2005). *Nula. Životopis jedné nebezpečné myšlenky.* Dokořán, Argo.

Abstract

Understanding the meaning of the number zero and the use of zero in operations with natural and rational numbers is important for first and second grade elementary school pupils. It is therefore necessary to look for approaches to explain the curriculum to pupils in a comprehensible way. The article describes a procedure for justifying the division if the divisor is the number zero.

Růžena Blažková
e-mail: ru.blazkova@seznam.cz