

Tomáš Fabián

Což takhle dát si fraktál? – 1. část

*Učitel matematiky*, Vol. 33 (2025), No. 1, 46–63

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153007>

## Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:  
*The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## COŽ TAKHLE DÁT SI FRAKTÁL? – 1. ČÁST

TOMÁŠ FABIÁN

### Úvod

Drtivá většina matematiky, kterou ve škole vyučujeme, byla známa již ve starověku nebo počátkem novověku. K nejnovějším probíraným tématům patří analytická geometrie a diferenciální počet. Oba tyto obory se objevily již v 17. století, ve stejném, kdy proběhla třicetiletá válka. U žáků i u veřejnosti potom vzniká dojem, že se v matematice nic neděje a že je po staletí stejná a neměnná. Když byl britský matematik Ian Stewart dotazován, kdy byl podle něho zlatý věk matematiky, odpověděl, že nyní. Ještě nikdy v historii nedisponovalo lidstvo takovým množstvím vzdělaných matematiků, ještě nikdy v historii lidstva nebylo činěno tolik matematických objevů a ještě nikdy nebylo psáno tolik nových matematických textů. Jako učitelé matematiky bychom se proto měli snažit do výuky zařazovat i novější matematická témata.

Za pozornost v tomto směru stojí jistě fraktály. O těch sice můžeme tvrdit, že zde byly od nepaměti, neboť fraktální povahu má celá řada věcí v přírodě, nicméně jako matematické objekty se začaly objevovat až v druhé polovině devatenáctého století. Objekty jako Weierstrassova funkce, Cantorova množina nebo Peanova křivka byly v té době vnímány jako jakési kuriozity s podivnými vlastnostmi. Fraktály jako samostatnou kategorii (a i samotné slovo fraktál) ustanovil až o století později Benoît B. Mandelbrot, který by v loňském roce oslavil sté narozeniny. Pokud vás zajímá životní osud tohoto francouzsko-amerického matematika, narozeného 20. listopadu 1924 v Polsku do rodiny litevských Židů, můžete si přečíst jeho autobiografii *Fraktalista* (Mandelbrot, 2014).

Dalším důvodem, proč bychom neměli před žáky existenci fraktálů tajit, je, že je najdeme prakticky všude kolem sebe a že zasahují do celé řady lidských činností. Fraktální povahu má například uspořádání cév, kořenový systém rostlin, růst korálů, tvar pohoří, Brownův pohyb, vnitřní struktura kostí, tvar řečiště řeky s jejími přítoky a tak dále a tak dále. Žáci se s fraktály v běžném životě setkávají, aniž by si to uvědomovali, neboť se mimo jiné využívají i pro tvorbu počítačové grafiky. Například pro vykreslování realisticky vypadající krajiny a vegetace v 3D hrách (Feng-quan & Gui-gang, 2009; Cristea & Liarokapis, 2015). Překvapivou informací může být i to, že se výpočet fraktální dimenze využívá při diagnostice rakoviny. Rakovinné buňky mají totiž členitější povrch, a proto i větší fraktální dimenzi než buňky zdravé (Lesmoir-Gordon et al., 2006).

Fraktály je možné probírat během delšího uceleného kurzu, například v rámci semináře. Je také možné si z celého obsahu vybrat nějakou část a použít ji jen jako zajímavou látku pro zpestření před prázdninami, Vánocemi, během projektového týdne, školy v přírodě nebo podle příležitosti. Je rovněž možné si vybrat jen některý ze způsobů generování fraktálů a obohatit jím výuku práce s GeoGebrou nebo PowerPointem. Jednou z vlastností fraktálů je, že většina z nich je dána nějakým velice jednoduchým pravidlem. Ani mladším žákům proto nečiní problém tato pravidla pojmout a pochopit a na jejich základě fraktály vytvářet. Konstrukce fraktálů je tvořivá a hravá a není problém takové konstrukce provádět se žáky na druhém stupni ZŠ. Na střední škole je naopak možné konstrukce doplnit exkurzemi do jiných oblastí matematiky. Výpočet obsahů a délek fraktálů vede k součtu nekonečné geometrické řady. Pro výpočet dimenze fraktálu využijeme logaritmus. U chaos game můžeme počítat pravděpodobnost, s jakou se octneme v daném poli. Při zkoumání Cantorovy množiny můžeme řešit spočetnost a nespočetnost nekonečných množin. Nic z toho není nutné a tato rozšíření můžeme zařazovat podle aktuální potřeby a časových možností. Zkrátka kurz si můžeme značně uzpůsobit délkou, úrovní požadovaných znalostí i obtížností.

Revize RVP klade důraz na zavádění digitálních technologií do výuky všech předmětů včetně matematiky. Žáci by měli být schopni k modelování geometrických útvarů používat dynamický geometrický software. Jedním z doporučených nástrojů k využití pro výuku matematiky je podle NPI právě GeoGebra, se kterou budeme často pracovat. Pokud se budete chtít konstruovat v GeoGebře vyhnout, tak existuje řada webových nástrojů, které mají snadné, intuitivní ovládání a dají se pro konstrukci fraktálů použít. V závěru článku je odkaz na sdílenou cloudovou složku, ve které je textový soubor s odkazy na různé takové aplikace. Kromě toho jsem do této složky umístil jednak obrázky, které jsem metodami popsanými v tomto článku vytvořil, a jednak přímo ggb a pptx soubory konstrukcí, se kterými můžete dále pracovat přímo v GeoGebře a PowerPointu.

V neposlední řadě si fraktály zaslouží naši pozornost, protože se jedná o téma zajímavé a přitažlivé. Ukazují žákům, že do geometrie patří i objekty, které nejsou Eukleidovsky pravidelné. Zároveň je to téma, jak se budu dále pokoušet ukázat, které dává žákům prostor k bádání a tvořivosti, k objevování překvapivých skutečností a klade před ně řadu otázek podněcujících k přemýšlení.

## Definice fraktálu

Pojďme se nyní podívat, co to vlastně fraktál je. Mandelbrot (2003, s. 11) říká, že termín fraktál vytvořil z latinského slova *fractus*, které znamená „rozlámaný nebo rozbitý“. Jinde (Mandelbrot, 2022, s. 15) vyslovuje definici fraktálu:

Fraktál je množina, pro kterou je Hausdorff-Besicovitchova dimenze ostře větší než topologická dimenze.

Čtenář, který se nikdy nesetkal s fraktály, jen těžko bude vědět, co je to Hausdorff-Besicovitchova dimenze. Vysvětlení tohoto pojmu je věnována kapitola na konci článku. Avšak, i když od tohoto pojmu odhlédneme, těžko si z této definice uděláme představu, jak vůbec fraktál vypadá. Navíc sám Mandelbrot ve stejné knize o pár set stránek dál říká, že stále věří, že je lepší se obejít bez

definice fraktálu, protože aktuální definice vylučuje množiny, které by mezi fraktály měly být zahrnuty.

Lepší představu si uděláme z definice fraktálu podle Falconera (2014). Podle něj je to s definicí fraktálu podobně jako s biologickou definicí života. Neexistuje jeho jednoznačná a jednoduchá definice. Existuje seznam znaků, které charakterizují živé organismy, jako jsou schopnost rozmnožování, látková výměna, vysoká míra organizovanosti atd. Většina živých organismů disponuje schopnostmi a vlastnostmi na seznamu, existují však i živé organismy, které některou z daných vlastností nemají. Stejně tak podle Falconera existuje seznam vlastností, které by měl fraktál mít. Seznam vlastností objektu  $F$ , aby byl fraktálem, je:

- $F$  má jemnou strukturu, a to i v libovolně malých měřítkách.
- $F$  je příliš nepravidelný, aby mohl být popsán tradičním geometrickým jazykem, a to lokálně i globálně.
- $F$  má často nějakou formu soběpodobnosti, i když třeba jen přibližné nebo statistické.
- Obvykle je fraktální dimenze  $F$  (podle různých definic) větší než jeho topologická dimenze.
- Ve většině případů je  $F$  definován velmi jednoduchým způsobem, mnohdy rekurzivně.

Většina fraktálních objektů všechny tyto vlastnosti má. Kdybychom striktně trvali na tom, aby všechny fraktály měly všechny vyjmenované vlastnosti, vyloučili bychom i objekty, které mezi fraktály chceme mít.

Fraktály jsou tedy geometrické objekty, které se vyznačují svou složitostí a nepravidelostí. Na rozdíl od klasických geometrických tvarů, jako jsou kruh nebo čtverec, mají fraktály často velmi členité a detailní tvary, které se opakují v různých měřítkách. To znamená, že když se na fraktál podíváme zblízka, uvidíme podobné detaily, jako když se na něj díváme z dálky. Těto vlastnosti se říká soběpodobnost.

Cílem tohoto článku není předkládat čtenáři podrobnou teorii fraktálů, dovolím si vás proto pro více informací o fraktálech odkázat na další zdroje. Základní přehled o fraktálech lze v češtině nalézt v jim věnované kapitole Atlasu geometrie (Tichý, 2013), samostatné knížce Fraktály: Na hraně chaosu (Linton, 2021) nebo článku Fraktály a jak o nich učit (Divišová, 2013). Anglicky pro základní přehled poslouží zdařilé částečně komiksově *Introducing: Fractal Geometry* (Lesmoir-Gordon et al., 2006). Výrazně obsáhlejší a podrobnější, nicméně stále čtivé, je téměř tisícistránkové dvojdílné *Fractals for The Classroom* (Peitgen et al., 1992b; Peitgen et al., 1992c) nebo *Chaos and Fractals* (Peitgen et al., 1992a) s prakticky stejným obsahem. K *Fractals for The Classroom* existuje i třídílná sbírka úloh. Pro učitele je určena velmi povedená *Fractals: A Tool Kit of Dynamics Activities* (Choate et al., 1999). Kniha obsahuje vypracované přípravy k dvanácti lekcím o fraktálech a je součástí čtyřdílné edice, kde další tři díly se věnují iteracím, chaosu a Mandelbrotově množině.

## Konstrukce fraktálů

V této kapitole si ukážeme, jak můžeme ve škole fraktály sestrojovat. Někdy se dá použít tužka a papír, nejlépe čtverečkový nebo milimetrový. Většinou však budeme konstruovat fraktály v programu GeoGebra. Sestrojíme samozřejmě vždy pouze několik prvních iterací. Někdy proto, že by další iterace na obrázku stejně nebyly vidět, většinou proto, že počítač vykreslování dalších iterací nestíhá. Počty konstruovaných prvků narůstají exponenciálně a zpomalení počítače je proto dost výrazné a na vykreslení dalšího kroku konstrukce by bylo potřeba čekat dlouhé minuty. Není třeba se bát, konstrukce zvládne jakýkoliv počítač. Obrázky, které jsou přiloženy k tomuto článku, jsem vytvářel na několik let starém kancelářském počítači.

V dalších kapitolách se zaměříme na různé způsoby konstrukce fraktálů, které se dají provádět ve školních podmínkách. Jsou to:

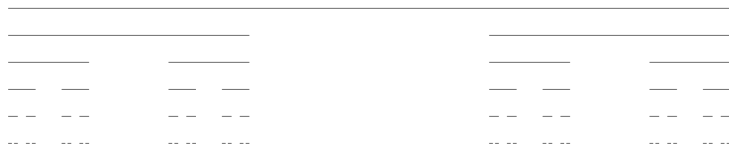
- konstrukce fraktálu odstraňováním částí obrazce;
- konstrukce fraktálu nahrazováním jeho částí;

- pythagorejské stromy;
- konstrukce fraktálů v PowerPointu;
- chaos game;
- celulární automat.

## Fraktály generované odstraňováním

První způsob konstrukce, na který se podíváme, je konstrukce fraktálu odstraňováním. Ta probíhá tak, že vstupní geometrický útvar rozdělíme na sobě i celku podobné části, z nichž některé odebereme a některé ponecháme k dalšímu použití. V dalším kroku provedeme se zbylými částmi stejnou operaci, kterou jsme předtím prováděli s celým útvarem. Tento postup provádíme donekonečna, nebo tak dlouho, jak nám technika dovolí. Při některých konstrukcích může být s částmi manipulováno s využitím rotace, symetrie atd. To je již nad rámec tohoto textu. Úlohy, které využívají i rotace a další symetrie, se dají nalézt například v *Fractals: A Tool Kit of Dynamics Activities* (Choate et al., 1999) nebo *Fractals for the Classroom: Strategic Activities Volume Three* (Peitgen et al., 1999).

Celý postup bude zřejmější, když si ho ukážeme na konstrukci Cantorovy množiny. Ta se dá konstruovat tak, že úsečku rozdělíme na třetiny a prostřední třetinu odstraníme. Krajiní dvě třetiny opět rozdělíme na třetiny (tedy devítiny původní úsečky) a prostřední opět odstraníme. Tak postupně vznikají jednotlivé iterace Cantorovy množiny. Prvních pět kroků je zobrazeno na obrázku 1.



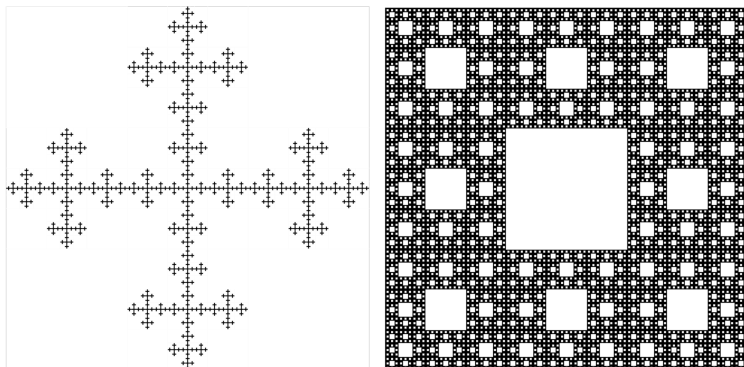
Obr. 1: Prvních pět iterací Cantorovy množiny

Pro konstrukci Cantorovy množiny jsme jako vstupní objekt využili úsečku, obdobným způsobem můžeme fraktály vytvářet

i ze čtverce. Čtverec rozdělíme na devět shodných čtverců, některé z nich odebereme a stejně jako u konstrukce Cantorovy množiny budeme tento postup několikrát opakovat. Konstrukci můžeme nechat žáky provádět postupným zabarvováním stále menších čtverečků na milimetrovém papíře. Žáky většinou tato konstrukce baví, hodnotí ji jako pracnou, ale nechtějí ji zanechat před dokončením „ještě jedné“ iterace.

Jinou (nebo lépe následující) možností, jak můžeme konstrukci s žáky provádět, když nám to čas dovolí, je s využitím programu GeoGebra. Je výhodou, když se žáci již někdy v minulosti s tímto programem potkali a seznámili. Není to však nezbytně nutné a můžeme to naopak využít jako příležitost k seznámení.

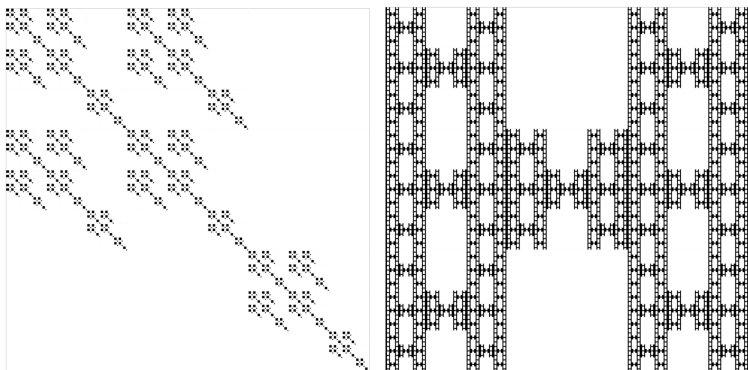
Pojďme nyní přistoupit k samotné konstrukci. Nejprve s využitím nástroje pravidelný mnohoúhelník sestrojíme čtverec. Tento čtverec budeme během konstrukce postupně zakrývat a jeho viditelné části budou tvořit iterace konstruovaných fraktálů. Je proto dobré čtverci nastavit tmavou barvu a nízkou nebo žádnou průhlednost. V dalším kroku potřebujeme rozdělit čtverec sítí na devět shodných čtverců. Proto nejprve rozdělíme strany čtverce na třetiny. GeoGebra nemá nástroj, který by to dovedl v jednom kroku. Jednoduše si můžeme poradit pomocí nástroje kružnice daná středem a poloměrem. Jestliže například dělíme na třetiny úsečku  $AB$ , pak v krajních bodech úsečky narýsuje kružnice, jejichž poloměr zadáme  $AB/3$ . GeoGebra sama vzdálenost změří a vydělí třemi. Tento výpočet je nutné nechat provést GeoGebra a není možné třetiny nalézt s pomocí mřížky, spočítat někde stranou, nebo dokonce odhadnout. Budeme totiž z této konstrukce vytvářet nástroje provádějící další iterace automatizovaně a potřebujeme, aby konstrukce neměla žádné nadbytečné volitelné vstupy. Také si můžeme nástroj, který umí dělit vzdálenosti na třetiny, sami vytvořit. Tato část konstrukce končí, když máme nalezeny vrcholy všech devíti menších čtverců, které dělí čtverec velký. Do této fáze konstrukce se budeme vracet při vytváření různých fraktálů, je proto dobré si v tomto okamžiku soubor uložit pro pozdější použití.



Obr. 2: Box fraktál a Sierpińského koberec, páté iterace

Teď nastal okamžik, kdy si vybereme, kolik čtverců budeme odebírat a které to budou. Na našem výběru závisí, jaký, a jestli vůbec, fraktál vznikne. Nemusíme se bát, tady je naopak prostor k experimentování. Na čtverce, které chceme odebírat, sestrojíme bílé neprůhledné čtverce, které překryjí pod nimi ležící velký tmavý čtverec. Máme sestrojenou první iteraci našeho fraktálu. V dalším kroku vytvoříme nástroj, který bude vytvářet jednotlivé iterace více automatizovaně. V horní liště programu pod záložkou nástroje najdeme odkaz vytvořit nový nástroj. Tato funkce umožňuje vytvářet nástroje, které provádějí komplexnější konstrukce jedním příkazem. Po zvolení odkazu se otevře nové okno se třemi záložkami. Nejprve se otevře záložka výstupní objekty. Sem zadáme všechny objekty, které má nástroj narysovat. Vyberáme je tím, že na ně klikneme buď přímo v konstrukci, nebo v Algebraickém okně. Pokud jsme již některé měli vybrané v okamžiku kliknutí na odkaz vytvořit nový nástroj, zařadí se do seznamu automaticky samy. Při vytváření nástrojů pro konstrukci několika iterací v jednom kroku budeme vybírat velké množství objektů najednou, je proto dobré si je nejprve všechny označit do bloku a teprve potom otevřít funkci vytvořit nový nástroj. My si vybereme všechny bílé čtverce a zároveň body, které budeme potřebovat pro konstrukce dalších iterací, což jsou vždy dva spodní vrcholy u černých čtverců. Druhá záložka se jmenuje vstupní ob-

jekty. To jsou objekty, které nástroji zadáme a ze kterých nástroj vychází při konstrukci. Pokud jsme až dosud postupovali při konstrukci správně, měly by se do záložky bez našeho zásahu vyplnit dva body, kterými jsme začínali při konstrukci černého čtverce. Na třetí záložce pouze můžeme zvolit název nástroje, případně změnit jeho ikonu. Nakonec odklikneme dokončit.

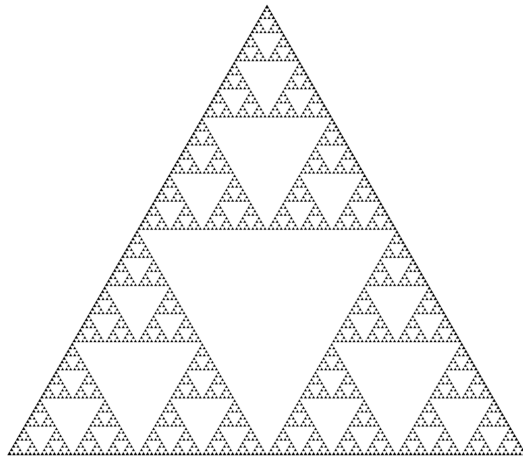


Obr. 3: Drak (kite fractal) a H fraktál, páté iterace

Vytvořili jsme nástroj, který zautomatizuje část naší konstrukce. Když ho použijeme na dva vrcholy černého čtverce, automaticky vytvoří zakrytí bílými čtverci a zároveň body pro konstrukci dalších iterací. Nyní bychom mohli vytvářet postupně další a další iterace fraktálu. To by však bylo stále ještě dost pracné. Práci nám ušetří, když obdobným způsobem budeme vytvářet další a další nástroje. Pomocí nástroje vytvářejícího jednu iteraci vytvoříme iteraci druhou, následně vytvoříme nástroj, který rovnou konstruuje dvě iterace, poté bude následovat nástroj vytvářející čtyři iterace atd. Nástroje, které jsme vytvořili, zůstávají, i když v konstrukci smažeme objekty, které jsme do nich zadávali. Práci si proto klidně můžeme ušetřit i třeba tím, že po vytvoření nástroje na čtyři iterace dosavadní konstrukce iterací smažeme, do černého čtverce vytvoříme jedním nástrojem dvě iterace a do nich druhým nástrojem další čtyři a rázem máme šestou iteraci. Při vytváření nástrojů pro vyšší počty iterací nemá smysl nechat konstruovat i vrcholy čtverců. Taková konstrukce by zbytečně zpomalovala

počítač a zároveň tyto body již nevyužijeme, protože by jich bylo obrovské množství a konstrukce by pro nás byla pracná. Je dobré si tuto část konstrukce vyzkoušet a porovnat si, který postup bude pro vás nejefektivnější a nejrychlejší. Počet konstruovaných prvků narůstá geometrickou řadou a není problém narazit na výpočetní limity počítače. Počty iterací, které půjdou narýsovat, se budou lišit fraktál od fraktálu. Po zvládnutí techniky konstrukce fraktálů tímto způsobem stojí za to dát žákům prostor, aby si s ní pohráli a vyzkoušeli konstrukci různých fraktálů. Zároveň jim můžeme předložit několik otázek, na které by mohli nalézt odpověď.

Vznikají tímto postupem vždy fraktály? Kdy ne a kdy ano? Kdy vznikají spojité a kdy nespojitě fraktály? Dá se touto metodou vytvořit Cantorova množina? Jak? Dá se stejný fraktál vytvořit odstraňováním jiné skupiny čtverců? Které části fraktálu si jsou vzájemně podobné a zároveň jsou podobné celému fraktálu (za předpokladu provedení nekonečně mnoha iterací)? Kolikrát jsou tyto části menší než celý fraktál? Kolik takových částí je potřeba na složení celého fraktálu? Za předpokladu, že plošný obsah černého čtverce na počátku byl jedna, jaký bude obsah první, druhé, třetí... iterace fraktálu? Jaký bude obsah fraktálu po provedení nekonečně mnoha iterací?

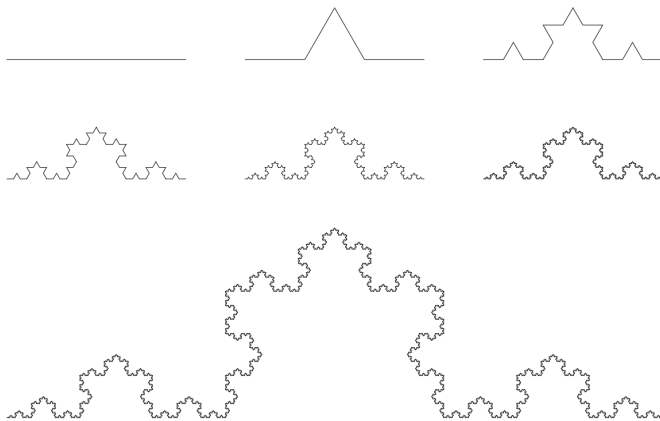


Obr. 4: Sedmá iterace Sierpiňského trojúhelníku

Na přiložených obrázcích 2 a 3 jsou příklady fraktálů, které jsem vytvořil touto metodou. Při konstrukci fraktálů lze použít i jiné výchozí útvary, než je čtverec. Nejznámější taková konstrukce je konstrukce Sierpiňského trojúhelníku odstraňováním prostřední části rovnostranných trojúhelníků (obr. 4).

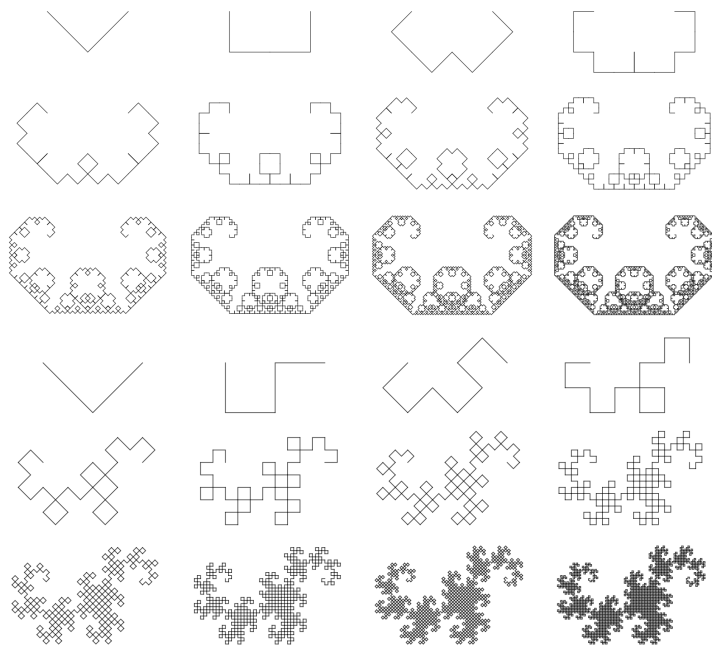
## Fraktální křivky

Druhým způsobem konstrukce fraktálů, který si ukážeme, je konstrukce fraktálních křivek s využitím iniciátoru a generátoru. Konstrukce je obdobou konstrukce předchozí. Na předchozí konstrukci totiž také můžeme pohlížet tak, že jsme měli černý čtverec, který jsme v prvním kroku nahradili čtvercem s chybějícími částmi. V následujících krocích jsme opět černé čtverce, nyní již menší, nahrazovali dalšími čtverci s chybějícími částmi. Černý čtverec byl právě to, co Mandelbrot (2022) nazývá iniciátor, čtverec s chybějícími částmi generátor. Pro konstrukci křivek budeme jako iniciátor používat úsečku a jako generátor lomenou čáru. Jaká fraktální křivka nám při konstrukci vznikne, bude záviset na tvaru lomené čáry, kterou zvolíme. Příkladem křivky, která se dá konstruovat tímto způsobem, je Kochova křivka. Její iniciátor, generátor a několik prvních iterací jsou na obrázku 5.



Obr. 5: Postupné iterace Kochovy křivky

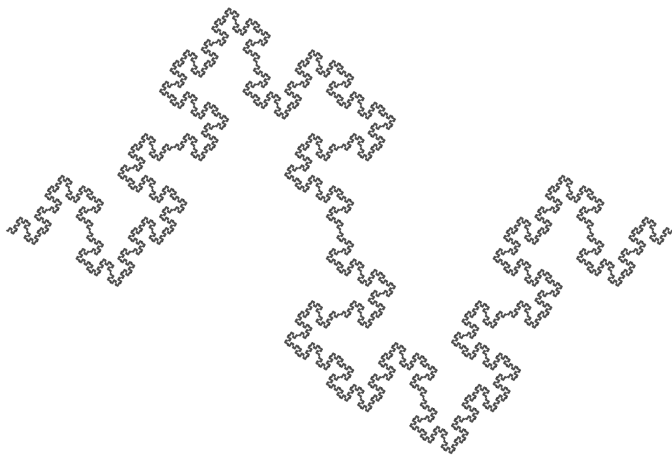
Konstrukci již budu popisovat stručněji. Sestrojíme úsečku, která bude iniciátorem. Pro sestrojení lomené čáry, která bude generátorem, nejprve sestrojíme body, ve kterých se bude lámat. Body opět nemůžeme volit náhodně, ale musíme je sestroit tak, aby jejich poloha byla pevně vázaná na krajní body úsečky. Pokud chceme vytvořit konstrukci, kterou budeme moci dynamicky měnit, můžeme některé parametry polohy bodů navázat na posuvníky. Musíme počítat s tím, že nástroje, které vzápětí vytvoříme, budou vždy požadovat jako vstupní parametry kromě dvou krajních bodů i tyto posuvníky. Pro začátek je proto lepší vytvářet konstrukci pevnou. Zkonstruovanými body proložíme lomenou čáru. Pokud jsme konstruovali správně, nesmí se tvar lomené čáry měnit, pokud pohneme některým z krajních bodů



Obr. 6: Postupné iterace Lévyho C křivky a Dračí křivky (Dragon curve)

úsečky. V dalším kroku vytvoříme nástroj pro konstrukci lomené čáry, tedy generátoru. Jako nejrychlejší postup při konstrukci se ukazuje postupné tvoření nástrojů, které jsou schopny vytvářet vždy o jednu iteraci více. Při konstrukci můžeme lomenou čáru umísťovat vždy ve stejném směru, nebo můžeme směr pravidelně střídát. Například Dračí a Lévyho C křivka mají stejný generátor, jejich konstrukce se liší právě pouze v tomto aspektu (obr. 6). Po sestrojení další iterace nesmíme zapomenout schovat v obrázku křivku tvořící iteraci předchozí, ta součástí nové křivky již není.

U těchto křivek má smysl se podívat na to, jak může u fraktálů vypadat soběpodobnost. Zatímco u fraktálů, které jsme vytvářeli postupným zakrýváním čtverce, si byly různé části fraktálu striktně podobné nejen vzájemně, ale byly podobné i fraktálu jako celku, u fraktálů, které vznikají nyní, takovou soběpodobnost nacházíme pouze někdy. Má ji třeba fraktál zvaný Minkowského křivka (obr. 7), který se dá rozdělit na části podobné celému fraktálu. U dračí křivky žádná její část celku podobná není. Když si dračí křivku prohlédneme podrobněji, můžeme si všimnout, že se dá rozdělit do jakýchsi laloků spojených úzkou stopkou. Tyto laloky si již podobné jsou. A to splňuje Falconerův (2014) požadavek na nalezení nějaké formy soběpodobnosti.

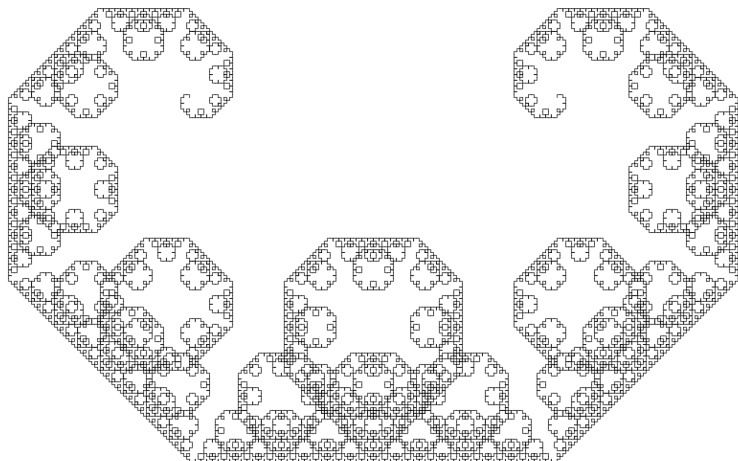


Obr. 7: Minkowského křivka

U Lévyho C křivky také zdánlivě nenalezneme žádnou část podobnou celku. Zaměříme se na útvar, který postupně vzniká u jednotlivých iterací ve střední části fraktálu (obr. 8). Vidíme, jak se tento útvar postupně stává složitějším. Když se podíváme na obrázek čtrnácté iterace tohoto fraktálu, vidíme, že stejným způsobem dochází k vývoji tohoto útvaru i na tomto obrázku (obr. 9), když postupujeme od zakrouceného ocásku křivky k jejímu středu. Rovněž si můžeme povšimnout, že stejnou posloupností procházejí i menší útvary, které se nacházejí uvnitř velkých smyček. Z toho plyne, že tyto útvary si nejsou striktně geometricky podobné jenom z toho důvodu, že jsme neprovedli nekonečné množství iterací. Z křivky by tedy šly vyjmout části, které si jsou nejen vzájemně podobné, ale jsou podobné i celému fraktálu. Tyto části se částečně vzájemně překrývají a nejsou proto na první pohled patrné.



Obr. 8: Postupná evoluce středového útvaru Lévyho C křivky

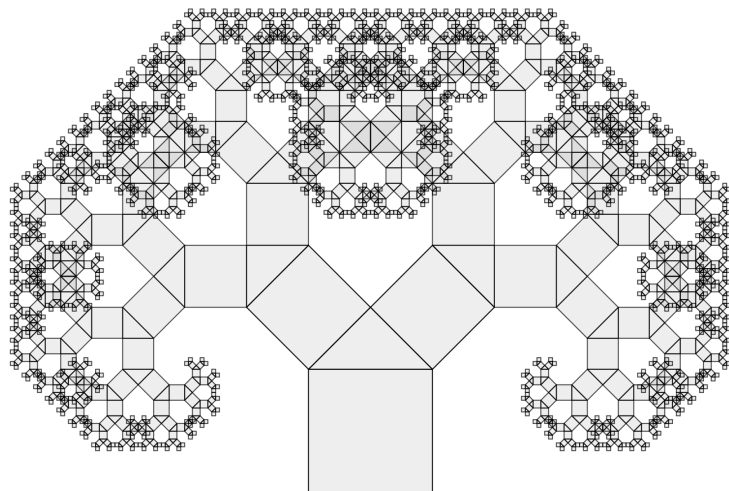


Obr. 9: Čtrnáctá iterace Lévyho C křivky

## Pythagorejské stromy

Pythagorejské stromy jsou specifickým typem fraktálů, které vycházejí z všeobecně známého nákresu pravoúhlého trojúhelníku se čtverci nad přeponou a oběma odvěsnami.

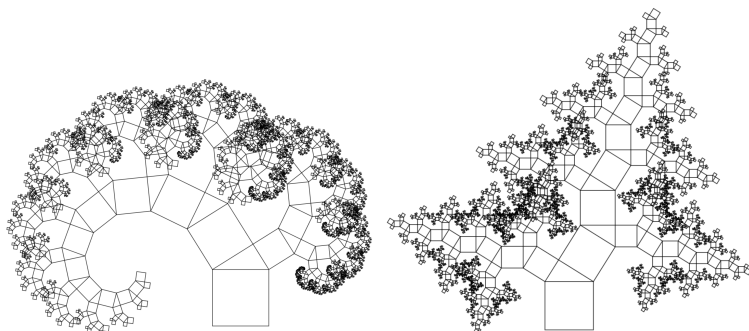
Při konstrukci Pythagorejského stromu budeme postupovat následujícím způsobem. Nejprve sestrojíme čtverec. K jedné jeho straně připojíme přeponu pravoúhlého trojúhelníku. K volným stranám tohoto trojúhelníku připojíme dva čtverce. Následně připojíme dva pravoúhlé trojúhelníky a poté čtyři čtverce. Opět připojíme čtyři pravoúhlé trojúhelníky a nakonec osm čtverců. Tímto způsobem budeme pokračovat, přičemž v každém dalším kroku zdvojnásobíme počet připojených čtverců a trojúhelníků (Peitgen et al., 1992a; Peitgen et al., 1992b).



Obr. 10: Pythagorejský strom pro rovnoramenný trojúhelník

Pro začátek je lepší vyzkoušet konstrukci s pravoúhlými rovnoramennými trojúhelníky (obr. 10), v další fázi s různostrannými. Potom, co jsme zvládli konstrukce předchozích fraktálů, tato konstrukce nám problém dělat nebude. Opět se dá snadno zvládnout s využitím vlastních nástrojů pro tvorbu dalších iterací. Při kon-

strukci je možné navázat velikost vnitřních úhlů na hodnotu posuvníku, dá se potom lehce sledovat, jak se mění celý Pythagorejský strom při změně tvaru trojúhelníků. Změny tvaru stromu se dá docílit i střídáním orientace trojúhelníků. Na obrázku 11 je vidět srovnání takových dvou stromů. Oba vycházejí ze stejného tvaru trojúhelníků s jedním vnitřním úhlem velikosti  $32^\circ$ , u druhého z nich je navíc využito střídání jejich orientace.



Obr. 11: Pythagorejské stromy s trojúhelníky s vnitřním úhlem  $32^\circ$ , první bez střídání orientace trojúhelníků, druhý se střídáním orientace trojúhelníků

Když je čas, stojí za pozornost, co se stane, když nepoužijeme při konstrukci pravoúhlé trojúhelníky. Co třeba rovnostranné? Rovnoramenné? S tupým nebo ostrým úhlem...?

Pokračování článku naleznete v příštím čísle. V něm si ukážeme další možné způsoby konstrukce fraktálů a podíváme se i na výpočet fraktální dimenze.

## Literatura

- [1] Choate, J., Devaney, R. L., & Foster, A. (1999). *Fractals: A tool kit of dynamics activities*. Key Curriculum Press.
- [2] Cristea, A., & Liarakapis, F. (2015). Fractal nature-generating realistic terrains for games. In *2015 7th international conference on games and virtual worlds for serious ap-*

- plications* (pp. 1–8). IEEE. <https://doi.org/10.1109/VSGAMES.2015.7295776>
- [3] Divišová, B. (2013). Fraktály a jak o nich učit. *Učitel matematiky*, 21(3), 144–158.
- [4] Falconer, K. (2014). *Fractal geometry: Mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons.
- [5] Feng-quan, J., & Gui-gang, S. (2009). Simulating the landscape plants by the fractal algorithm. In *Second international conference on intelligent computation technology and automation* (pp. 197–200). IEEE. <https://doi.org/10.1109/ICICTA.2009.285>
- [6] Lesmoir-Gordon, N., Rood, W., & Edney, R. (2006). *Introducing: Fractal geometry*. Icon Books.
- [7] Linton, O. (2021). *Fraktály: Na hraně chaosu*. Dokořán.
- [8] Mandelbrot, B. B. (2003). *Fraktály: Tvar, náhoda a dimenze*. Mladá fronta.
- [9] Mandelbrot, B. B. (2014). *Fraktalista: Rebelem ve vědě*. Dokořán.
- [10] Mandelbrot, B. B. (2022). *The fractal geometry of nature*. Echo Point Books & Media.
- [11] Peitgen, H., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992a). *Chaos and fractals: New frontiers of science*. Springer-Verlag.
- [12] Peitgen, H., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992b). *Fractals for the classroom: Part one introduction to fractals and chaos*. Springer-Verlag.
- [13] Peitgen, H., Jürgens, H., & Saupe, D. (1992c). *Fractals for the classroom: Part two complex systems and mandelbrot set*. Springer-Verlag.
- [14] Peitgen, H., Jürgens, H., Saupe, D., Maletsky, E., & Perciante, T. (1999). *Fractals for the classroom: Strategic activities volume three*. Springer-Verlag.
- [15] Tichý, V. (2013). Fraktály. In Š. Voráčová (Ed.), *Atlas geometrie: Geometrie krásná a užitečná* (s. 225–243). Academia.

## Abstract

The article begins by briefly answering the question of what a fractal is and provides reasons why fractals are worth exploring in education. Various methods of constructing fractals suitable for classroom use are then presented. Fractals can be easily integrated into the curriculum as early as upper primary school, either as part of a comprehensive course or as individual thematic units. Constructions are primarily created using GeoGebra, but also through traditional methods (pencil, paper) or other digital tools (PowerPoint, web applications). The conclusion demonstrates that the concept of fractal dimension can be accessible to high school students.

*Tomáš Fabián*

*PORG*

*Lindnerova 3*

*180 00 Praha 8*

*KMDM PedF UK*

*Magdalény Rettigové 4*

*110 00 Praha 1*

*e-mail: fabian@porg.cz*