

Rozhledy matematicko-fyzikální

Miroslav Randa; Pavel Kratochvíl

O jedné fyzikální úloze

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 100 (2025), No. 1, 62–66

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/153141>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ*:
The Czech Digital Mathematics Library <http://dml.cz>

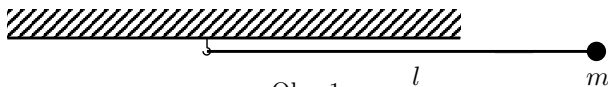
O jedné fyzikální úloze

Miroslav Randa – Pavel Kratochvíl

Západočeská univerzita v Plzni

Před časem jsme narazili na fyzikální úlohu, v níž kmitavý pohyb matematického kyvadla byl změněn tím, že pod bodem závěsu byla umístěna překážka, která způsobila změnu délky kyvadla. Už si nepamätujeme, kde jsme na úlohu narazili, dovolíme si však čtenářům Rozhledů matematicko-fyzikálních (zejména řešitelům fyzikální olympiády) nabídnout modifikovanou úlohu k zamyšlení a samostatnému řešení. Protože považujeme za vhodné, aby si čtenář mohl své řešení okamžité zkontrolovat (bez nutnosti čekat na další číslo Rozhledů), uvádíme úlohu s výsledky a pro netrpělivé čtenáře i s podrobným řešením.

Zadání úlohy: Na niti délky l je zavěšeno malé těleso s hmotností m . Závaží je vychýleno z rovnovážné polohy tak, že vlákno je napnuté a má vodorovný směr (obr. 1).



Svisle pod bodem závěsu zatlučeme hřebík.

- a) V jaké nejmenší vzdálenosti x od bodu závěsu musíme hřebík zatlouci, aby po puštění tělesa a zachycení vlákna o hřebík těleso vykonalo celou otočku kolem hřebíku ve svislé rovině? Výsledek: $0,6 l$

Pozn.: Při prvním pohledu se zdá, že řešení je triviální a že ze zákona zachování energie vyplývá, že $x = 0,5 l$. Řešitel však nesmí zapomenout na to, že v horním bodě kružnice nemá těleso nulovou rychlost ani nulovou kinetickou energii.

- b) Určete, do jaké největší výšky H (měřené od nejnižší polohy) těleso vystoupí, bude-li hřebík zatlučen ve vzdálenosti $x = l/2$ pod bodem závěsu. Výsledek: $\frac{25}{27} l$
- c) Jakou silou F je napínáno vlákno v nejvyšší poloze, bude-li hřebík zatlučen ve vzdálenosti $x = \frac{3l}{4}$ pod bodem závěsu? Výsledek: $3mg$

- d) Zakreslete graf závislosti velikosti síly F napínající vlákno na vzdálenosti x mezi bodem závěsu a hřebíkem, resp. graf závislosti $\frac{F}{mg}$ na $\frac{x}{l}$.

Řešení úlohy: a) V nejvyšším bodě kružnice, po níž se pohybuje těleso, na něj působí (v neinerciální soustavě spojené s tělesem) tíhová síla, síla vlákna a odstředivá síla, jejíž velikost je rovna součtu velikostí tíhové síly a síly vlákna. Protože odstředivá síla závisí na kvadrátu rychlosti, bude nejmenší možná rychlost tělesa v v nejvyšším bodě odpovídat nejmenší odstředivé síle, tedy síle, při níž bude síla vlákna nulová. Bude tedy platit

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = mg,$$

kde $r = l - x$. Zároveň podle zákona zachování energie

$$mgl = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv^2.$$

Jestliže v obou vztazích zkrátíme hmotností m a z první rovnice dosadíme do druhé

$$v^2 = g(l - x),$$

dostaneme

$$gl = 2g(l - x) + \frac{1}{2}g(l - x),$$

a po úpravě

$$x = \frac{3}{5}l.$$

b) Najdeme nejdříve bod, v němž přestane být vlákno napnuté. Pro tento bod (znázorněný na obrázku) platí, že v radiálním směru je výslednice sil nulová. Odstředivá síla má proto velikost rovnou velikosti složky tíhové síly, tedy

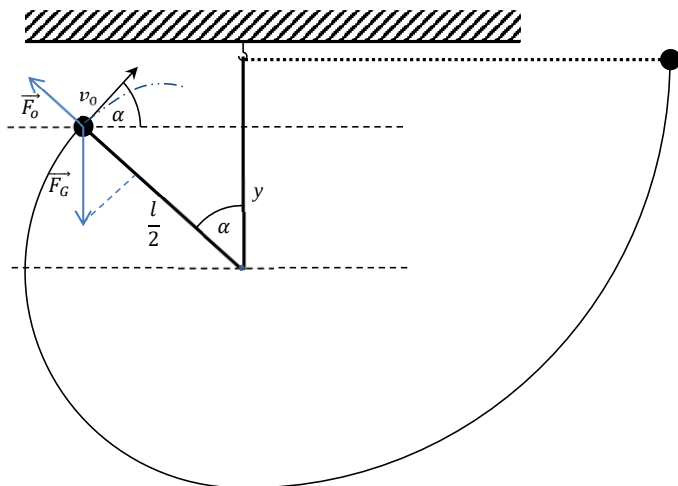
$$F_o = F_G \cos \alpha.$$

Po dosazení

$$m \cdot \frac{v_o^2}{r} = mg \cos \alpha.$$

kde $r = l/2$. Také zde využijeme zákon zachování energie:

$$mgl = mg \left(\frac{l}{2} + y \right) + \frac{1}{2}mv_o^2.$$



Obr. 2

Z první rovnice vyjádříme kvadrát rychlosti

$$v_o^2 = g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha$$

a dosadíme do zákona zachování energie. Po dosazení $y = \frac{l}{2} \cos \alpha$ (viz obr. 2) a po malé úpravě získáme vztah

$$g \cdot \frac{l}{2} = g \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2} g \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha$$

a po další úpravě $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ (tedy $\alpha = 48^\circ$).

Vyjádříme výšku y a rychlost v_o – obojí se nám bude hodit. Platí

$$y = \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{l}{3},$$

$$v_o^2 = g \cdot \frac{l}{2} \cos \alpha = \frac{gl}{3}.$$

Poté, co již není vlákno napnuté, pohybuje se těleso vrhem šikmým vzhůru. Určíme jeho maximální výšku ze známého vztahu

$$H = \frac{v_o^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}.$$

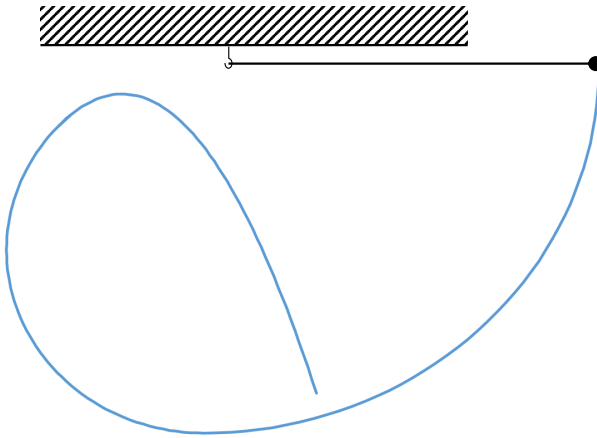
Po úpravách a s použitím vztahu $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$$H = \frac{\frac{gl}{3} \cdot (1 - \frac{4}{9})}{2g} = \frac{5}{54} l.$$

Těleso vystoupí do maximální výšky

$$H_{\max} = \frac{l}{2} + \frac{l}{3} + H = \frac{25}{27} l.$$

Můžeme si ještě znázornit celou trajektorii tělesa:



Obr. 3

c) Sílu F napnutí vlákna při poloze hřebíku ve vzdálenosti $x = \frac{3}{4}l$ pod bodem závěsu určíme známým postupem. Napíšeme rovnice pro síly a pro energii:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = F_G + F,$$

kde tentokrát $r = l - x = l/4$, a

$$mgl = mg \cdot 2r + \frac{1}{2}mv^2,$$

neboli po dosazení za r

$$mgl = mg \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2}mv^2.$$

Odtud

$$gl = v^2$$

a po úpravě dostaneme

$$F = m \cdot \frac{v^2}{l/4} - mg = \frac{4}{l} \cdot mgl - mg = 3mg.$$

d) Nejprve si vyjádříme sílu F napnutí vlákna při poloze hřebíku ve vzdálenosti $x > \frac{3}{5}l$ pod bodem závěsu.

$$\begin{aligned} m \cdot \frac{v^2}{l-x} &= F_G + F, \\ mgl &= mg \cdot 2(l-x) + \frac{1}{2}mv^2. \end{aligned}$$

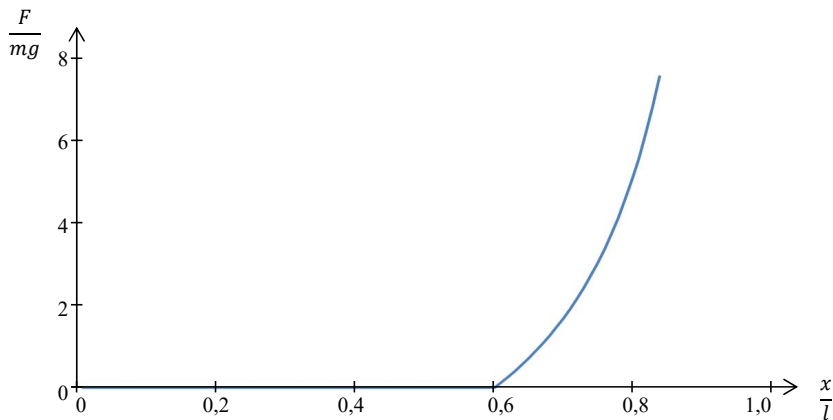
Odtud

$$2g(2x-l) = v^2.$$

Po obvyklé úpravě

$$F = m \cdot \frac{v^2}{l-x} - mg = \frac{1}{l-x} \cdot 2mg(2x-l) - mg = mg \cdot \frac{5x-3l}{l-x}.$$

Jak již víme z a), pro $x \leq \frac{3}{5}l$ je $F = 0$.



Obr. 4