Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Jaroslav Hančl; Ondřej Kolouch; Lukáš Mocek; Jan Šustek
32. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka

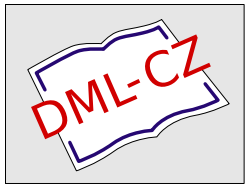
Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 70 (2025), No. 3, 149–158

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153542

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2025

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

32. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka

Jaroslav Hančl, Ondřej Kolouch, Lukáš Mocek, Jan Šustek

Abstrakt. Článek představuje 32. ročník Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka, který se konal 1. května 2025 v Ostravě. Uvádíme osm soutěžních úloh, jejich kompletní řešení a výsledkové listiny s nejúspěšnějšími soutěžícími.

1. Úvod

Dne 1. května 2025 se v Ostravě uskutečnil již 32. ročník *Mezinárodní matematické soutěže Vojtěcha Jarníka* (VJIMC). Tato prestižní soutěž, určená vysokoškolským studentům matematiky, patří mezi nejstarší svého druhu v Evropské unii. Každoročně přivádí do Ostravy talentované studenty z celé Evropy i dalších částí světa. Účastníci jsou rozděleni do dvou kategorií – v první soutěží studenti prvních a druhých ročníků, ve druhé pak starší studenti. Mezinárodní porota, složená z delegátů zúčastněných univerzit, vybírá úlohy a dohlíží na regulérnost celé soutěže. Soutěžící mají na vyřešení čtyř náročných matematických úloh čtyři hodiny. Letošního ročníku se zúčastnilo 98 studentů z 27 univerzit z 12 zemí.

Soutěž VJIMC navazuje na matematickou soutěž *Internacionalno Studentsko Takmičenje iz Matematike*, která byla pořádána v Bělehradě a zanikla koncem osmdesátých let v souvislosti s rozpadem bývalé Jugoslávie. Starší než VJIMC je pouze americká soutěž *William Lowell Putnam Mathematical Competition* a několik lokálních soutěží konaných v zemích jako Čína či Rusko. V Evropě existuje také *International Mathematical Competition*, která je svým formátem podobná soutěži VJIMC, avšak je o několik let mladší.

V tomto článku uvádíme soutěžní příklady letošního ročníku společně s jejich řešením, aby si čtenáři mohli udělat představu o obtížnosti a tematickém zaměření soutěže. Všechna uvedená řešení jsou vzorová řešení dodaná autorem příkladu, pouze u druhého příkladu první kategorie je uvedené řešení inspirováno autorským řešením a řešením soutěžícího.

2. Soutěžní problémy

První kategorie

Problém 1. Nechť $a \geqq 2$ je celé číslo. Dokažte, že existuje kladné celé číslo b s následující vlastností: Pro každé přirozené číslo n existuje prvočíslo $p = p(a, b, n)$ takové, že $a^n + b$ je dělitelné číslem p, ale není dělitelné p^2.

Prof. RNDr. Jaroslav Hančl, CSc., Mgr. Ondřej Kolouch, Ph.D., Mgr. Ing. Lukáš Mocek, Ph.D., Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita, Mlýnská 5, 702 00 Ostrava, e-mail: jaroslav.hancl@osu.cz, ondrej.kolouch@osu.cz, lukas.mocek@osu.cz, doc. RNDr. Jan Šustek, Ph.D., Ústav pro výzkum a aplikace fuzzy modelování, Ostravská univerzita, 30. dubna 22, 702 00 Ostrava, e-mail: jan.sustek@osu.cz

Problém 2. Nalezněte všechna reálná čísla $x > 1$ vyhovující rovnosti

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor = n - \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor + \dots$$

pro všechna přirozená čísla n.

Problém 3. Nazvěme posloupnost $(b_1, b_2, \dots)$ přirozených čísel *rychle rostoucí*, jestliže pro všechna $n \geqq 1$ platí $b_{n+1} \geqq b_n + 2$. Dále pro posloupnost $a = (a(1), a(2), \dots)$ reálných čísel a posloupnost $b = (b_1, b_2, \dots)$ kladných celých čísel označme

$$S(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |a(b_n) + a(b_n + 1) + \dots + a(b_{n+1} - 1)|.$$

1. Existují dvě rychle rostoucí posloupnosti $b = (b_1, b_2, \dots)$, $c = (c_1, c_2, \dots)$ takové, že pro každou posloupnost $a = (a(1), a(2), \dots)$ platí, že pokud všechny řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n), \quad S(a, b) \quad \text{a} \quad S(a, c)$$

konvergují, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a(n)|$ také konverguje?

2. Existují tři rychle rostoucí posloupnosti $b = (b_1, b_2, \dots)$, $c = (c_1, c_2, \dots)$, $d = (d_1, d_2, \dots)$ takové, že pro každou posloupnost $a = (a(1), a(2), \dots)$ platí, že pokud všechny řady

$$S(a, b), \quad S(a, c) \quad \text{a} \quad S(a, d)$$

konvergují, pak řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a(n)|$ také konverguje?

Problém 4. Nechť $n \geqq 2$ je celé číslo a nechť A je reálná čtvercová matice řádu n s minimálním polynomem $x^n + x - 1$. Ukažte, že

$$\operatorname{tr}\big((nA^{n-1} + I)^{-1} A^{n-2}\big) = 0,$$

kde $\operatorname{tr}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ii}$ označuje stopu matice $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$.

Druhá kategorie

Problém 1. Nechť $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$ pro daná reálná čísla a, b, c, a nechť $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$ pro $n \geqq 1$. Ukažte, že je posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergentní a nalezněte její limitu.

Problém 2. Nechť A a B jsou dvě čtvercové komplexní matice řádu n mající stejnou hodnost. Dále nechť $k \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $A^{k+1}B^k = A$ právě tehdy, když $B^{k+1}A^k = B$.

Problém 3. Určete hodnotu integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\log(x+2)}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Problém 4. Nechť $D = \{z\colon |z| < 1\}$ je jednotkový kruh v komplexní rovině a předpokládejme, že $f : D \to D$ je holomorfní funkce splňující $\lim\limits_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$. Nechť $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ je Taylorova řada funkce f. Dokažte, že $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot |a_n|^2$ je rovna počtu kořenů funkce f (počítáno s násobnostmi).

3. Řešení

První kategorie

Řešení problému 1. Nejprve předpokládejme, že $a = 2$. Zvolme $b = 10$. Pak pro $n = 1$ je číslo $a^n + b = 2^1 + 10 = 12$ dělitelné 3, ale ne 3^2, zatímco pro $n \geqq 2$ je číslo $2^n + 10$ dělitelné 2, ale ne 2^2.

Podobně pro $a = 2^m$, kde $m \geqq 2$, je zřejmé, že pro $b = 10$ a pro každé kladné celé číslo n je číslo $a^n + b = 2^{mn} + 10$ dělitelné 2, ale ne 2^2.

Zbývá tedy uvažovat případ, kdy a má lichého prvočíselného dělitele. Nechť q je lichý prvočíselný dělitel čísla a. Pokud $q \mid a$, ale $q^2 \nmid a$, pak při volbě $b = a$ vidíme, že $a^n + b = a^n + a$ je dělitelné q, ale ne q^2. (Pro $n = 1$ máme $a^n + a = 2a$, takže to také platí.) Pokud $q^2 \mid a$, pak volbou $b = q$ vidíme, že pro každé $n \geqq 1$ je číslo $a^n + b = a^n + q$ dělitelné q, ale ne q^2.

Řešení problému 2. Podmínka $x > 1$ zajišťuje, že součet na pravé straně rovnosti je konečný.

Předpokládejme, že pro některé x rovnost platí. Pak pro všechna $n \geqq x$ je $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \geqq 1$ a dosazením $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor$ za n do rovnosti dostaneme

$$\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + 1}{x} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor}{x} \right\rfloor - \dots,$$

což po přičtení k původní rovnosti dává

$$\left\lfloor \frac{n+1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor + 1}{x} \right\rfloor = n.$$

Vydělením obou stran n a přechodem k limitě pro $n \to \infty$ dostáváme

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1,$$

což má jediné řešení větší než 1, a to $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nyní musíme ukázat, že pro $x = \varphi$ je původní rovnost skutečně splněna pro všechna $n \geqq 1$. Nejdříve ukážeme, že pro každé $n \geqq 1$ platí

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = n. \tag{1}$$

Protože pro každé přirozené číslo k platí $\lfloor k\varphi \rfloor < \lfloor (k+1)\varphi \rfloor \leqq \lfloor k\varphi \rfloor + 1$, mohou pro konkrétní n nastat pouze dva případy.

Případ 1: existuje $k \geqq 1$ takové, že $n = \lfloor k\varphi \rfloor$. Potom

$$k - 1 = \frac{k\varphi - \varphi}{\varphi} < \frac{\lfloor k\varphi \rfloor}{\varphi} < \frac{k\varphi}{\varphi} = k < \frac{\lfloor k\varphi \rfloor + 1}{\varphi} < \frac{k\varphi + \varphi}{\varphi} = k + 1$$

a odtud

$$\left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor k\varphi \rfloor}{\varphi} \right\rfloor = k - 1 \quad \text{a} \quad \left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor k\varphi \rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = k.$$

S využitím vztahu $k + \frac{k}{\varphi} = k\varphi$ dostáváme

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{\varphi} \rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{k}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{k}{\varphi} \right\rfloor = \lfloor k\varphi \rfloor = n.$$

Případ 2: existuje $k \geqq 1$ takové, že $n = \lfloor k\varphi \rfloor + 1 < \lfloor (k+1)\varphi \rfloor = n + 1$. Potom

$$k = \frac{k\varphi}{\varphi} < \frac{\lfloor k\varphi \rfloor + 1}{\varphi} < \frac{\lfloor (k+1)\varphi \rfloor}{\varphi} < \frac{(k+1)\varphi}{\varphi} = k + 1$$

a odtud

$$\left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor k\varphi \rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = k \quad \text{a} \quad \left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor (k+1)\varphi \rfloor}{\varphi} \right\rfloor = k.$$

S využitím vztahů $k + \frac{k}{\varphi} = k\varphi$ a $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ dostáváme

$$\left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{\varphi} \rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = k + \left\lfloor \frac{k+1}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor k + \frac{k+1}{\varphi} \right\rfloor = \lfloor k\varphi + (\varphi - 1) \rfloor = n.$$

Tímto máme dokázánu rovnost (1) pro všechna $n \geqq 1$. Nyní matematickou indukcí ukážeme, že odtud vyplývá platnost původní rovnosti pro $x = \varphi$ a všechna $n \geqq 1$. Označme

$$L(n) = \left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor, \qquad R(n) = n - \left\lfloor \frac{n}{\varphi} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{\varphi} \rfloor}{\varphi} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{\lfloor \frac{n}{\varphi} \rfloor}{\varphi} \rfloor}{\varphi} \right\rfloor + \dots$$

Pro $n = 1$ platí $L(1) = R(1) = 1$. Předpokládejme, že platí $L(m) = R(m)$ pro $m = 1, \dots, n$. Pak z rovnosti (1) pro $n + 1$ dostáváme

$$\begin{aligned} R(n+1) &= (n+1) - R\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor \right) = (n+1) - L\left(\left\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \right\rfloor \right) = \\ &= (n+1) - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n+1}{\varphi} \rfloor + 1}{\varphi} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+2}{\varphi} \right\rfloor = L(n+1). \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

Řešení problému 3. 1. Odpověď je ne. Důkaz rozdělíme na dva případy.

Případ 1: existuje n_0 takové, že $b_{n+1} = b_n + 2$ a $c_{n+1} = c_n + 2$ pro všechna $n \geqq n_0$. Pak pro $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ máme $|a(b_n) + a(b_n + 1)| = 0 = |a(c_n) + a(c_n + 1)|$ pro všechna $n \geqq n_0$, takže obě řady $S(a, b)$ a $S(a, c)$ konvergují, také $\sum a_n$ je konvergentní, ale $\sum |a_n| = \sum \frac{1}{n} = +\infty$.

Případ 2: posloupnost (b_n) má nekonečně mnoho členů s vlastností $b_{n+1} \geqq b_n + 3$ nebo posloupnost (c_n) má tuto vlastnost. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tuto vlastnost má (b_n). Pak pro každé n, pro které $b_{n+1} \geqq b_n + 3$, členy $a(b_n)$, $a(b_n + 1)$, $a(b_n + 2)$ patří mezi sčítance v $|a(b_n) + \ldots + a(b_{n+1} - 1)|$, řekněme, že tyto tři členy „patří do stejné b-skupiny“. Avšak buď $a(b_n)$, $a(b_n + 1)$ patří do stejné c-skupiny (pokud $b_n + 1 \neq c_k$ pro všechna k), nebo $a(b_n + 1)$, $a(b_n + 2)$ patří do stejné c-skupiny (pokud $b_n + 1 = c_k$ pro nějaké k). Máme tedy nekonečně mnoho dvojic $(a(i_k), a(i_k + 1))$, $k = 1, 2, \ldots$, přičemž každá dvojice je zároveň ve stejné b-skupině i ve stejné c-skupině. Nyní stačí položit $a(i_k) = \frac{1}{k}$, $a(i_k + 1) = -\frac{1}{k}$ (můžeme předpokládat $i_{k+1} > i_k + 1$) a všechny ostatní $a(n) = 0$. Potom všechny sčítance v $S(a, b)$ a $S(a, c)$ jsou nulové a zjevně $\sum a_n$ konverguje (jeho částečné součty jsou buď 0, nebo $\frac{1}{k}$), ale $\sum |a_n| = +\infty$, protože obsahuje všechna $\frac{1}{n}$ a má nezáporné členy.

2. Odpověď je ano. Vezměme $b_n = 2n - 1$, $c_n = 2n$ a $d_n = 3n - 2$. Potom konvergentní řady jsou

$$\begin{aligned}
&|a(1) + a(2)| + |a(3) + a(4)| + |a(5) + a(6)| + \ldots,\\
&|a(2) + a(3)| + |a(4) + a(5)| + |a(6) + a(7)| + \ldots,\\
&|a(1) + a(2) + a(3)| + |a(4) + a(5) + a(6)| + \ldots
\end{aligned}$$

Máme

$$\begin{aligned}
|a(1)| &= |a(1) + a(2) + a(3) - (a(2) + a(3))| \leqq |a(1) + a(2) + a(3)| + |a(2) + a(3)|,\\
|a(3)| &\leqq |a(1) + a(2) + a(3)| + |a(1) + a(2)|,\\
|a(2)| &= |a(1) + a(2) - a(1)| \leqq |a(1) + a(2)| + |a(1)| \leqq\\
&\leqq |a(1) + a(2)| + |a(1) + a(2) + a(3)| + |a(2) + a(3)|.
\end{aligned}$$

Totéž platí pro libovolnou trojici $a(3k + 1)$, $a(3k + 2)$, $a(3k + 3)$. Dohromady máme

$$\begin{aligned}
|a(3k+1)| + |a(3k+2)| + |a(3k+3)| \leqq 3\big(&|a(3k+1) + a(3k+2)| +\\
&+|a(3k+2) + a(3k+3)| +\\
&+|a(3k+1) + a(3k+2) + a(3k+3)|\big).
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že posloupnost částečných součtů $\sum_{n=1}^{N} |a(n)|$ je shora ohraničena číslem $3(S_1 + S_2 + S_3)$, kde S_1, S_2, S_3 jsou součty výše uvedených tří řad.

Řešení problému 4. Vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ matice $\mathbf{A}$ splňují rovnost $\lambda^n + \lambda = 1$, tj. jsou kořeny polynomu $\alpha(z) = z^n + z - 1$. Uvažovaná stopa je rovna

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{n-2}}{n\lambda_k^{n-1} + 1},$$

kde λ_k jsou vlastní čísla $\mathbf{A}$.

Potřebujeme následující dvě lemmata:

Lemma 1. *Nechť* $P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)$. *Pak platí* $\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z-a_k}$ *pro* $z \neq a_1, \ldots, a_n$.

Důkaz. Máme $P'(z) = a \sum_{k=1}^{n} \prod_{j\neq k} (z - a_j)$. Dále platí

$$\frac{\prod_{j\neq k} (z - a_j)}{\prod_{j=1}^{n} (z - a_j)} = \frac{1}{z - a_k}$$

pro pevné $1 \leqq k \leqq n$. Odtud

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{j\neq k} (z - a_j)}{\prod_{j=1}^{n} (z - a_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k} \, .$$

□

Lemma 2. *Nechť* $z_1, \ldots, z_n$ *jsou kořeny polynomu* P *stupně* n, *které jsou všechny navzájem různé. Pak platí*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(z_k)}{P'(z_k)} = 0 \, .$$

Důkaz. Nechť $w_1, \ldots, w_{n-1}$ jsou kořeny derivace P'. Protože všechny kořeny P jsou různé, jsou čísla $w_1, \ldots, w_{n-1}$ odlišná od $z_1, \ldots, z_n$, ekvivalentně $P'(z_j) \neq 0$ pro všechna $j = 1, \ldots, n$.

Použití lemmatu 1 na P' dává

$$\frac{P''(z)}{P'(z)} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{z - w_j},$$

takže

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(z_k)}{P'(z_k)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{z_k - w_j} = - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{w_j - z_k} = - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{P'(w_j)}{P(w_j)} = 0.$$

□

Kořeny polynomu $\alpha(z)$ jsou všechny jednoduché, protože každý kořen z_0 polynomu α' splňuje $\alpha'(z_0) = n z_0^{n-1} + 1 = 0$, a odtud

$$\alpha(z_0) = z_0^n + z_0 - 1 = \frac{n-1}{n} z_0 - 1 = \frac{n-1}{n^{1+1/(n-1)}} \epsilon_{n-1}^k - 1 \neq 0 \, ,$$

kde ϵ_{n-1} je $(n-1)$-ní odmocnina z -1.

Tedy lze použít lemma 2 a dostáváme

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha''(\lambda_k)}{\alpha'(\lambda_k)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)\lambda_k^{n-2}}{n\lambda_k^{n-1}+1} = n(n-1)\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^{n-2}}{n\lambda_k^{n-1}+1} =$$
$$= n(n-1)\,\mathrm{tr}\Big(\big(nA^{n-1}+I\big)^{-1}A^{n-2}\Big),$$

což dokazuje požadovanou rovnost.

Druhá kategorie

Řešení problému 1. Máme

$$x_{n+4} - x_{n+3} = \frac{x_{n+2}+x_{n+1}}{2} - \frac{x_{n+1}+x_n}{2} = \frac{1}{2}(x_{n+2}-x_n) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x_n+x_{n-1}}{2} - x_n\right) = -\frac{1}{4}(x_n - x_{n-1})\,,$$

tedy (x_n) je cauchyovská posloupnost, a proto konverguje.

Nechť nyní $y_n = x_{n+1} + x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}$ pro $n \geqq 1$. Potom

$$y_{n+1} = x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} + x_{n+1} + \frac{1}{2}x_n = x_{n+1} + x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} =$$
$$= y_n =$$
$$\vdots$$
$$= y_1 = x_2 + x_1 + \frac{1}{2}x_0 = c + b + \frac{1}{2}a\,.$$

Protože platí

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty} x_n\,,$$

dostáváme nakonec

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{a+2b+2c}{5}\,.$$

Řešení problému 2. Naše tvrzení je symetrické v A a B, takže stačí dokázat implikaci zleva doprava. Předpokládáme, že $A^{k+1}B^k = A$, a dokážeme, že $B^{k+1}A^k = B$.

Máme $\ker B \subseteq \ker A^{k+1}B^k = \ker A$. Protože ale $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$, dostáváme $\ker B = \ker A$. Na druhou stranu platí

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^{k+1}B^k \leqq \operatorname{rank} A^{k+1} \leqq \operatorname{rank} A\,.$$

Takže máme

$$\operatorname{rank} A^{k+1} = \ldots = \operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A\,.$$

Je zřejmé, že $\ker A \subseteq \ker A^2$, takže $\ker A = \ker A^2$.

Nyní tvrdíme, že $\mathbb{C}^n = \ker A \oplus \operatorname{Im} A$. Ve skutečnosti stačí dokázat, že $\ker A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$. Pokud $x \in \ker A \cap \operatorname{Im} A$, pak existuje $y \in \mathbb{C}^n$ takové, že $x = Ay$, takže $A^2y = Ax = 0$, tj. $y \in \ker A^2 = \ker A$. To dává $x = Ay = 0$.

Můžeme tedy zvolit bázi tak, aby A mělo tvar

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kde A_1 je regulární. Protože $\ker A = \ker B$, můžeme předpokládat, že B má ve stejné bázi tvar

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ B_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nakonec z $A^{k+1}B^k = A$ plyne, že $A_1^{k+1}B_1^k = A_1$. Odtud dostáváme $A_1^k B_1^k = I_r$, protože A_1 je regulární. Nyní je snadné vidět, že $B^{k+1}A^k = B$.

Řešení problému 3. Použitím substituce $x \to x - 1$ dostáváme

$$\int_0^\infty \frac{\ln(x+2)}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\ln(x+1)}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Definujme $I(a) := \int_1^\infty \frac{\ln(1+ax)}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$. Potřebujeme nalézt $I(1)$. Zjevně $I(0) = 0$. Dále platí

$$I'(a) = \int_1^\infty \frac{\partial}{\partial a}\frac{\ln(1+ax)}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{(1+x)(1+ax)}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)}{a-1}\,.$$

Tedy

$$I(1) = \int_0^1 I'(a)\,\mathrm{d}a = \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)}{a-1}\,\mathrm{d}a\,.$$

Je známo, že

$$J := \int_0^1 \frac{\ln a}{a-1}\,\mathrm{d}a = \frac{\pi^2}{6}.$$

Proto

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{2a}{a+1}\right)}{a-1}\,\mathrm{d}a = J - \int_0^1 \frac{\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)}{a-1}\,\mathrm{d}a = J - \int_0^1 \frac{\ln\left(1-\frac{a}{2}\right)}{a}\,\mathrm{d}a \\ &= J - \int_0^{1/2} \frac{\ln(1-a)}{a}\,\mathrm{d}a\,. \end{aligned}$$

Zbývá tedy najít poslední integrál, který označíme H. Potom, užitím integrace metodou per partes, dostáváme

$$\begin{aligned} H &= \int_0^{1/2} \ln(1-a)\,\mathrm{d}\ln a = -\ln a \ln(1-a)\Big|_{a=0}^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{\ln a}{1-a}\,\mathrm{d}a = \\ &= -\ln^2 2 + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-a)}{a}\,\mathrm{d}a\,. \end{aligned}$$

Na druhou stranu platí

$$H + \int_{1/2}^1 \frac{\ln(1-a)}{a}\,\mathrm{d}a = -J.$$

Poslední dvě rovnosti mezi H a $\int_{1/2}^{1} \frac{\ln(1-a)}{a}\,\mathrm{d}a$ nám umožňují nalézt $H = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{\ln^2 2}{2}$. Odtud dostáváme požadovaný výsledek $I(1) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\ln^2 2}{2}$.

Řešení problému 4. Pokud je f konstantní, pak $|a_0| = |f| = 1$ a $a_1 = a_2 = \ldots = 0$, takže tvrzení je triviální.

Předpokládejme, že f není konstantní. Podle principu argumentu nabývá funkce všech hodnot stejně mnohokrát. Označme tento počet K. Konkrétně K je počet kořenů funkce.

Jelikož $f(D)$ pokrývá D právě K-krát, plocha obrazu s multiplicitami je $K\pi$. Na druhou stranu lze tuto plochu vyjádřit jako

$$\begin{aligned}
K\pi &= \int_{|z|\in D} \left|f'(z)\right|^2 |\mathrm{d}z|^2 = \\
&= \int_{|z|\in D} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \overline{k a_k z^{k-1}}\right) |\mathrm{d}z|^2 = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} nk a_n \overline{a_k} \int_{r=0}^{1} \underbrace{\int_{t=0}^{2\pi} r^{n+k-2} \mathrm{e}^{i(n-k)t} \cdot r \,\mathrm{d}t}_{0 \text{ pokud } n\neq k}\, \mathrm{d}r = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \int_{r=0}^{1}\int_{t=0}^{2\pi} r^{2n-1}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \cdot \frac{2\pi}{2n} = \\
&= \pi \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot |a_n|^2,
\end{aligned}$$

takže

$$\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot |a_n|^2 = K.$$

Všechny takové funkce jsou konečné Blaschkeho součiny

$$f(z) = \varepsilon \prod_{k=1}^{K} \frac{z - c_k}{1 - \overline{c_k} z}\ ,$$

kde $c_1, \ldots, c_K \in D$ a $|\varepsilon| = 1$.

4. Výsledky

Níže je uvedeno pořadí nejúspěšnějších studentů v každé kategorii. Za každý příklad bylo možné získat maximálně 10 bodů.

První kategorie:

Pořadí	Jméno	Město	Pr. 1	Pr. 2	Pr. 3	Pr. 4	$\sum$
1.	Konstanty Smolira	Krakov	10	10	6	9	35
1.	Krzysztof Salata	Krakov	10	5	10	10	35
3.	Xavier Díaz	Barcelona	9	5	10	9	33
4.	Michal Janík	Praha	10	4	7	9	30
5.	Julian Bleicher	Mnichov	10	7	5	7	29
5.	Jakub Šošovička	Praha	10	10	9	–	29
7.	Namik Agić	Záhřeb	10	7	1	10	28
8.	Jordi Ferré	Barcelona	10	10	7	0	27
9.	Jeremi Hyska	Varšava	10	6	10	0	26
9.	Andrei Karmanovich	Krakov	10	1	10	5	26

Druhá kategorie:

Pořadí	Jméno	Město	Pr. 1	Pr. 2	Pr. 3	Pr. 4	$\sum$
1.	Łukasz Orski	Krakov	10	10	10	10	40
1.	Medine Odayeva	Aščhabad	10	10	10	10	40
3.	Adam Naskręcki	Varšava	10	10	10	7	37
4.	Martin Bierbaumer	Vídeň	10	10	9	7	36
4.	Samuel Meyer	Bonn	8	10	10	8	36
6.	Aleksandar Prodanov	Sofia	10	6	10	7	33
7.	Lennart Christian Grabbel	Bonn	10	10	2	10	32
8.	Korneliusz Obarski	Varšava	8	5	10	7	30
8.	Juri Kaganskiy	Bonn	10	10	0	10	30
10.	Matouš Šafránek	Praha	10	10	0	7	27