Rozhledy matematicko-fyzikální

Jakub Kuchařík

Důkaz větší než nekonečno, který končí u nuly

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 3, 1–10

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153803

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Důkaz větší než nekonečno, který končí u nuly

Jakub Kuchařík, Gymnázium Karla Čapka, Dobříš

Abstrakt. Tento článek se zabývá takzvanými Goodsteinovými posloupnostmi. Může se zdát, že tyto posloupnosti rostou do nekonečna, ale je dokazatelné, že všechny skončí v nule. Už to samo o sobě by byl velmi zajímavý fakt, ale co jej dělá ještě zajímavějším, je způsob jeho důkazu, který se nevyhnutelně obrací k ordinálním číslům. Přibližně polovina tohoto textu je věnována ne zcela formálnímu seznámení s ordinálními čísly. Jedná se o náročné téma, které je podstatnou součástí tzv. teorie množin. Čtenářům, kteří se s nimi nikdy nesetkali, radíme nezoufat, pokud bude text těžko stravitelný; snad poslouží alespoň pro přibližnou představu.

Goodsteinovy posloupnosti

Na začátku se podíváme na to, o čem se vlastně budeme bavit. Jako Goodsteinovy posloupnosti (čteme: [gudstajnovy]) označujeme různé posloupnosti generované poměrně složitým rekurzivním způsobem. Jednotlivé členy posloupnosti nazvěme $g_1, g_2, g_3, \ldots$ Jako g_1 můžeme zvolit libovolné přirozené číslo. Pro názornost uvažujme $g_1 = 290$. Abychom vygenerovali g_2, přepišme naše číslo do dvojkové soustavy následujícím způsobem:

$$g_1 = 290 = 2^8 + 2^5 + 2^1.$$

Potom přepišme všechny vzniklé exponenty stejným způsobem, tedy tak, aby byly vyjádřeny ve dvojkové soustavě. Dále postupujme obdobně: objeví-li se v exponentu číslo větší než 2, pak i tento exponent rozepíšeme ve dvojkové soustavě. To opakujme, dokud se výsledný výraz nebude skládat pouze z číslic 1 či 2.

$$g_1 = 290 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+1} + 2^1.$$

Nyní vezměme všechny výskyty čísla 2 v tomto zápisu, přepišme je na 3 a od výsledku odečtěme 1. Tím získáme druhý člen naší posloupnosti:

$$g_2 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3^3+1} + 3^1 - 1 \doteq 4{,}43 \cdot 10^{38}.$$

Abychom získali g_3, vezmeme g_2, přepíšeme do trojkové soustavy, nahradíme všechny 3 za 4 a od výsledku odečteme 1.

$$g_2 = 3^{81} + 3^{28} + 2 = 3^{(3^{3+1})} + 3^{(3^3+1)} + 2,$$
$$g_3 = 4^{(4^{4+1})} + 4^{(4^4+1)} + 2 - 1 \doteq 3{,}23 \cdot 10^{616}.$$

Další členy g_i generujeme analogicky. Vždy přepíšeme naše původní g_{i-1} v soustavě o základu i (včetně všech exponentů, exponentů exponentů atd.) a následně všechny instance čísla i nahradíme za $i+1$ a od tohoto výsledku odečteme 1.

Je patrné, že tato posloupnost nabývá velmi vysokých hodnot opravdu rychle, ale může se stát, že by klesala? Snadno si uvědomíme, že například $g_4 < g_3$ právě tehdy, když zápis g_3 ve čtyřkové soustavě nebude obsahovat žádnou čtyřku. Lze si rozmyslet, že toto nutně implikuje, že $g_3 < 4$. Obecně platí, že $g_{n+1} < g_n$ právě tehdy, když $g_n < n+1$. Může toto vůbec někdy nastat?

Vidíme přece, že posloupnost na začátku roste extrémně rychle. Zdá se tedy nepravděpodobné, že růst časem zpomalí natolik, aby platilo $g_n < n+1$. Pan Reuben Goodstein ovšem dokázal, že pro libovolnou volbu $g_1 \in \mathbb{N}$ toto vždy nastane. Každá Goodsteinova posloupnost tedy po konečně mnoha krocích skončí v nule – a to vše díky nepatrnému členu -1. [3]

Do nekonečna a ještě dál!

Abychom mohli pochopit Goodsteinův důkaz, musíme se nejprve seznámit s neintuitivním konceptem ordinálních čísel. Ordinální čísla jsou rozšířením přirozených, podobně jako komplexní čísla jsou rozšířením reálných nebo racionální jsou rozšířením celých. Motivace zavedení ordinálních čísel (ordinálů) je srovnatelná s motivací pro zavádění komplexních čísel: když matematiky trápilo, že polynom $a^2 + 1$ nemá žádný reálný kořen, tak si představili nový objekt – imaginární jednotku, která by tuto „díru“ vyplnila. Z tohoto jednoho předpokladu (existence imaginární jednotky) lze následně odvodit vše o novém systému komplexních čísel, z čehož plyne mnoho nových metod pro řešení zdánlivě nesourodých problémů (které často mohou působit jako řešitelné čistě v $\mathbb{N}$ či $\mathbb{R}$).

Jakou „díru“ tedy vyplňují ordinální čísla? ω, nejmenší z nekonečných ordinálů, slouží jako objekt splňující nerovnost $\omega > n$ pro všechna přirozená čísla n. Odtud plyne i definice tohoto objektu.

Definice 1. ω je nejmenší objekt (ordinál), pro který platí nerovnost $\omega > n$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$.

Tato definice může působit tak, že ω je jediným ordinálem. To však nemůže být dál od pravdy – je to pouze jeden člen „množiny“[1] všech ordinálních čísel, jejíž „podmnožinou“ jsou mimochodem i všechna čísla přirozená.

„Množina“ ordinálních čísel splňuje dvě klíčové vlastnosti:

1) Pro každý ordinál α existuje následník, který se značí $\alpha+1$ a splňuje $\alpha + 1 > \alpha$. (Přičemž žádný menší ordinál β nesplňuje $\beta > \alpha$.)
2) Pro každou množinu ordinálů existuje ordinál větší než všechny ordinály z této množiny.

Z vlastnosti 2) přímo plyne, že nějaké číslo jako ω musí existovat. Pokud budeme totiž chtít ordinál větší než všechna přirozená čísla, pak sáhneme právě po ω (z definice je to nejmenší takový ordinál). Budeme-li chtít ordinál, který je větší než všechna přirozená čísla a ω, tak můžeme použít $\omega + 1$ apod.

Dále je důležité podotknout, že ačkoliv každý ordinál musí mít následníka, ne každý ordinál musí mít předchůdce (viz např. ω). Těmto ordinálům říkáme *limitní ordinály*, protože představují jakýsi limitní skok do „nových výšin“ ordinálů (např. ω je skok z přirozených čísel do ordinálů tvaru $\omega + n$). Ostatní ordinály přirozeně nazýváme *následnické*, neboť jsou přímým následníkem jiného ordinálu.

Na rozdíl od reálných či komplexních čísel ordinální čísla neužíváme pro jejich početní vlastnosti, ale k zachycení struktury uspořádání a zobecnění principu matematické indukce tak, aby fungoval i pro jiné dobře uspořádané množiny než přirozená čísla. Této zobecněné matematické indukci říkáme *transfinitní indukce* a bude to hlavní nástroj, kterým dokážeme, že Goodsteinovy posloupnosti nakonec musí klesat.[2]

Jeden ze způsobů, jak si představovat ordinály a především ω, je pomocí pořadí (odkud také vychází slovo *ordinální*). Uvažujme množinu objektů, přičemž každému z těchto objektů můžeme přiřadit nějaké (při-

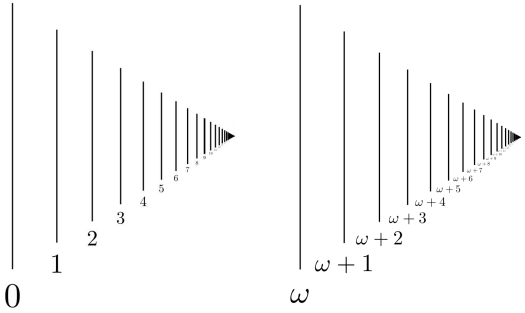
[1] Přísně vzato je ordinálů tolik, že se do žádné množiny nevejdou. Správné označení této struktury tedy není množina, ale třída (což je zobecnění množiny). Detaily toho, z jakých důvodů toto platí, jsou nad rámec tohoto článku. Pro účely zjednodušení budeme, ne zcela přesně, tvrdit, že ordinály dohromady tvoří „množinu“ (v textu bude odlišena uvozovkami).

[2] Transfinitní indukcí můžeme kromě Goodsteinovy věty například ukázat, že existuje podmnožina kartézské roviny $\mathbb{R}^2$, která protíná každou přímku této roviny právě ve dvou bodech.

rozené) pořadové číslo[3]. Pro lepší znázornění si můžeme namísto abstraktních objektů představovat čáry. Například $\mathbb{N}$ si představíme jako levou polovinu obr. 1, neboť ke každé čáře můžeme jednoznačně přiřadit jedno přirozené číslo.

Důležitou strukturou, kterou chceme v naší množině mít, je tzv. *dobré uspořádání*. Dobré uspořádání je speciální druh uspořádání množiny, který vyžaduje, aby dle tohoto uspořádání měla každá neprázdná podmnožina dané množiny nejmenší[4] prvek.

Je třeba si uvědomit, že ne každé uspořádání je dobré. Budeme-li uvažovat např. standardní uspořádání celých čísel: $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, pak vidíme, že jistě není dobré (například množina všech záporných celých čísel nemá nejmenší prvek). Celá čísla lze ovšem dobře uspořádat například podle absolutní hodnoty, kdy budeme střídat znaménka, následujícím způsobem: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ V tomto uspořádání má každá podmnožina celých čísel svůj nejmenší prvek a uspořádání je tedy *dobré*.



Obr. 1: Schéma představující přirozená čísla a ordinály tvaru $\omega + k$, pro $k \in \mathbb{N}$, jako množinu čar

Co se stane, pokud přidáme v našem schématu jednu další čáru za všechny ostatní? Celkový počet čar se nezmění[5], z čehož bychom mohli usuzovat, že ani jejich očíslování se nezmění. Jaké číslo však přiřadíme poslední čáře tak, abychom zachovali jejich uspořádání? Rozhodně jí ne-

[3] Všude v článku považujeme 0 za přirozené číslo.

[4] Slovem nejmenší zde není myšleno klasické porovnávání čísel, ale porovnávání v rámci tohoto uspořádání.

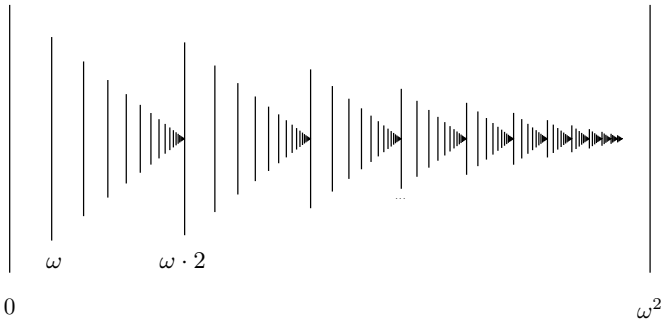
[5] Všechny čáry můžeme přejmenovat z n na $n+1$ a naší nové čáře přiřadit pozici 0, tudíž se bavíme pořád o stejné velikosti nekonečna, jako jsou přirozená čísla. O dvou množinách A, B říkáme, že jsou stejně velké *(mají stejnou kardinalitu)* právě tehdy, když existuje bijekce (vzájemně jednoznačné zobrazení) A na B.

můžeme dát žádné přirozené číslo – všechna jsou již zabraná. Musíme jí tedy přiřadit nějaký index, jehož hodnota je větší než libovolné přirozené číslo. Inu, nezbývá nám nic jiného než ji očíslovat ω, neboť podle předchozí definice je právě ω nejmenší vyhovující číslo. Naše čára potom bude ležet na ω-té pozici, jak je ukázáno na obr. 1.

Jak bychom vyřešili přidání další čáry? Vypadá to, že nám opět došla čísla, ale my ji jednoduše můžeme pojmenovat $\omega + 1$[6] (jak plyne ze značení v definici). Analogicky můžeme k ω přičíst libovolné přirozené číslo, čímž dostáváme další a další následníky. Nyní jsme jakýmsi způsobem zavedli přičítání k ordinálům, pojďme se tedy podívat, jak je to s násobením a mocněním.

Násobení přirozeným číslem je relativně snadné. Chceme-li $\omega \cdot 2$, pak ho lze najít jako limitní ordinál množiny všech přirozených čísel a všech čísel tvaru $\omega + n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Graficky si to představíme přidáním další čáry za obr. 1. Tento postup lze triviálně zobecnit na $\omega \cdot n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Pakliže chceme v našem schématu umocňovat, pak formálně hledáme limitní ordinál všech ordinálů tvaru $\omega \cdot m + n$ pro $m, n \in \mathbb{N}$. Z grafického hlediska musíme užít rekurzi. Vezměme si naše původní schéma, kde jsou jen přirozená čísla, a každou čáru v něm nahraďme kopií celého tohoto schématu. Tím vyčerpáme všechny možné násobky $\omega \cdot n$ pro $n \in \mathbb{N}$ (a potažmo i jejich následníky). Pokud tedy přidáme jednu další čáru, musíme nahradit původní n za ω, a tím získáme $\omega \cdot \omega$ neboli ω^2, jak je zobrazeno na obr. 2.



Obr. 2: Schéma představující několik skupin ordinálů v závislosti na jejich limitním ordinálu (ω, $\omega \cdot 2$, $\omega \cdot n$, ω^2, ...) jako množiny čar

[6] Se sčítáním (ani násobením) to bohužel ve skutečnosti není tak jednoduché, neboť sčítání ordinálů není komutativní. Výrazy $\omega + 1$ a $1 + \omega$ jsou tedy odlišné. U odčítání (a dělení) pak nastávají ještě další problémy, a proto je zde vůbec nedefinujeme.

Je asi představitelné, že obdobným způsobem je možné definovat i ω^3, ω^4 atd. Dále můžeme definovat ω^ω jako nejmenší ordinál větší než všechna ω^n pro přirozená n. To zdaleka není všechno, ale pro hrubou představu o tom, jak se definuje násobení a umocňování ordinálů, to stačí. Podstatné bude především to, že výrazy jako $\omega^{19} + \omega^7 \cdot 6 + \omega \cdot 69$, ω^ω, $\omega^{\omega^3+\omega\cdot 2}$ atd. jsou v ordinálních číslech dobře definované.

Zpět na zem

Se znalostí ordinálů se můžeme vrátit zpět ke Goodsteinovým posloupnostem. Nejprve si zaveďme notaci pro jednodušší vysvětlování.

Definice 2. Nechť $G_b^a(n)$ je funkce, která přepíše $n \in \mathbb{N}$ do b-soustavy tak, aby každé číslo v jejím zápisu bylo vyjádřeno v této soustavě. Následně všechny výskyty základu b přepíše na a.

S touto funkcí můžeme formálně definovat Goodsteinovu posloupnost.

Definice 3. *Goodsteinova posloupnost* je posloupnost členů $(g_k)_{k=1}^\infty$ taková, že $g_1 \in \mathbb{N}$ a všechna vyšší $g_i := G_i^{i+1}(g_{i-1}) - 1$.

Intuici, proč může tak nepatrný člen, jakým je -1, něco udělat s giganty, jako jsou členy Goodsteinovy posloupnosti, získáme pohlédnutím na několik členů této posloupnosti zapsaných pomocí obecné soustavy o základu a. Vyberme například $g_1 = 5$ a vypišme několik členů do následující tabulky:

g_i	hodnota	zápis v odpovídající soustavě	abstraktní zápis v a[7)]
g_1	5	$2^2 + 1$	$a^a + \mathbf{1}$
g_2	27	3^3	$a^a + \mathbf{0}$
g_3	255	$3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3$	$\boldsymbol{a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 3 + 3}$
g_4	467	$3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 2$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 3 + \mathbf{2}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
g_6	1197	$3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot 3 + \mathbf{0}$
g_7	1751	$3 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8 + 7$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + a \cdot \mathbf{2} + \mathbf{7}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
g_{14}	10830	$3 \cdot 15^3 + 3 \cdot 15^2 + 2 \cdot 15$	$a^3 \cdot 3 + a^{\cdot}3 + a \cdot 2 + \mathbf{0}$
g_{15}	13087	$3 \cdot 16^3 + 3 \cdot 16^2 + 16 + 15$	$a^3 \cdot 3 + a^2 \cdot 3 + \boldsymbol{a} + \mathbf{15}$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$

[7)] Koeficienty ve výrazech píšeme až za mocniny a kvůli nekomutativitě ordinálů, kterými za chvíli výrazy s obecným a nahradíme.

Ačkoliv hodnota g_i roste s rostoucím i, „struktura“ tohoto čísla z pohledu Goodsteinových posloupností klesá. Zde je mnohem patrnější, jakou roli vlastně naše -1 sehrává: mění „strukturu“ celého tohoto čísla, i když neuvěřitelně pomalu [2].

Díky ordinálním číslům můžeme tuto myšlenku „struktury“ vcelku jednoduše vyjádřit. V definici naší funkce $G_b^a(n)$ nás nic nenutí, aby $a, b \in \mathbb{N}$. Představme si, že zvolíme $a = \omega$. Tím přepíšeme naše čísla do jakési „ω-soustavy“, která plní stejnou roli jako abstraktní zápis v a soustavě, jenž je v tabulce. Víme totiž, že $\omega > b$, a proto musí platit $G_b^\omega(n) \geq G_b^{b+1}(n)$, čímž se zbavíme potřeby sledovat skutečnou velikost čísla. Namísto toho budeme sledovat jeho „strukturovou velikost“.

Do karet nám však hraje i to, že při pohlédnutí na „strukturovou velikost“ tohoto čísla spatříme, že ostře klesá. Toto klesání „strukturové velikosti“ probíhá i přes to, že Goodsteinova posloupnost jako taková roste. Tvrdíme tedy, že:

$$G_2^\omega(g_1) > G_3^\omega(g_2) > \cdots > G_{n+1}^\omega(g_n).$$

Než se vrhneme na důkaz tvrzení monotónního klesání této posloupnosti, rozmysleme si následující vztah pro $a < b < c$:

$$G_a^c(x) = G_b^c(G_a^b(x)), \tag{1}$$

který zřejmě platí, neboť nahradíme-li v zápisu čísla x cifry a za b a následně b za c, dostaneme stejný výsledný výraz, jako kdybychom nahradili rovnou cifry a za c.

Vrátíme-li se zpět k monotónnímu klesání, pak chceme ukázat, že platí nerovnost $G_{n+1}^\omega(g_n) > G_{n+2}^\omega(g_{n+1})$ pro libovolné $n \in \mathbb{N}$. Z definice víme, že $g_{n+1} = G_{n+1}^{n+2}(g_n) - 1$, což můžeme dosadit do dokazované nerovnosti, a tím dostáváme: $G_{n+1}^\omega(g_n) > G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n) - 1)$. Dále z rovnosti (1) můžeme za $G_{n+1}^\omega(g_n)$ dosadit výraz $G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n))$[8]. Nakonec tedy získáme následující tvar dokazované nerovnosti:

$$G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n)) > G_{n+2}^\omega(G_{n+1}^{n+2}(g_n) - 1). \tag{2}$$

Pro zjednodušení zápisu zaveďme substituci $N := G_{n+1}^{n+2}(g_n)$. N vnímejme jako libovolné přirozené číslo. Když usedne prach po našem dosazování, vznikne z nerovnosti (2)

$$G_{n+2}^\omega(N) > G_{n+2}^\omega(N - 1).$$

[8] V tomto případě jsme v (1) volili $a = n + 1$, $b = n + 2$, $c = \omega$.

Tato nerovnost již platit musí, neboť větší číslo má nutně větší „strukturovou velikost“, mají-li stejný základ. Alternativně bychom tato čísla mohli porovnávat, jako by byla v soustavě o základu ω, tj. můžeme porovnávat cifry obou čísel v ω soustavě zleva doprava tak, jak jsme zvyklí u soustav s konečným základem.

Pád od ∞ k 0

Tímto jsme ukázali, že $G_2^\omega(g_1) > \cdots > G_{n+1}^\omega(g_n)$. Jak nám ovšem má při zkoumání Goodsteinových posloupností pomoci fakt, že máme ostře klesající posloupnost čísel, která se početně chovají jako nekonečno? My chceme ukázat, že naše posloupnost se po konečně mnoha krocích dostane k nule, ne že zůstane v nekonečnu.

$$\begin{array}{ccccccc} G_2^\omega(g_1) & > & G_3^\omega(g_2) & > & G_4^\omega(g_3) & > & \dots \\ \| ? & & \| ? & & \| ? & & \\ \infty & > & \infty & > & \infty & > & \dots \end{array}$$

Zde přichází má oblíbená část důkazu: ukážeme, že všechny ostře klesající posloupnosti ordinálních čísel jednou musí klesnout k 0.

Věta 1. *Každá ostře klesající posloupnost ordinálů je konečná.*

Důkaz. Tento důkaz povedeme takzvanou transfinitní indukcí. Obdobně jako u běžné indukce ukážeme, že naše tvrzení platí pro nějaký prvek (základní krok). Dále ukážeme, že pokud tvrzení platí pro všechna $\beta < \alpha$, pak platí i pro α, což lze rekurzivně aplikovat na libovolný ordinál.[9)]

Tvrzení, které se snažíme dokázat, je, že ostře klesající posloupnost $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \dots$ je pro libovolný počáteční ordinál α_1 konečná[10)].

Jako základní krok zvolme $\alpha_1 = 0$, pro který naše tvrzení triviálně platí. Dále uvažujme ordinál α_1 a předpokládejme, že tvrzení platí pro všechny ordinály menší než α_1. Vezměme libovolnou ostře klesající posloupnost $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$. Díky indukčnímu předpokladu je $\alpha_2 > \alpha_3 > \cdots$ konečná (protože α_2 je menší než α_1). Pak je ale konečná

[9)] V klasické transfinitní indukci často výrok dokazujeme zvlášť pro následnické a zvlášť pro limitní ordinály, ale v tomto případě nám stačí předpoklad, že tvrzení platí pro všechny menší ordinály, což pokryje oba případy.

[10)] Tímto dokážeme, že Goodsteinovy posloupnosti jednou klesnou k nule, neboť jejich „strukturová“ podoba bude stále klesat alespoň o 1.

i původní posloupnost, která vznikne přidáním jediného členu (jmenovitě α_1). Z toho již plyne, že všechny ostře klesající posloupnosti ordinálů jsou konečné. □

Konečně se můžeme vrátit úplně na začátek, kdy jsme tvrdili, že máme jakousi „strukturu“ čísla v Goodsteinově posloupnosti, a tu jsme schopni vyjádřit pomocí soustavy o základu ω. Také jsme tvrdili, že vyjádříme-li tento tvar pomocí oné soustavy, musí být menší než naše původní číslo, což, jak jsme ukázali, nelze opakovat nekonečně. Zjistili jsme tedy, že po konečně mnoha krocích se náš tvar mění na 0, což ovšem znamená, že jsme potvrdili i naši původní hypotézu. Můžeme tedy již s jistotou vyslovit tzv. Goodsteinovu větu, pro kterou máme nyní důkaz.

Věta 2 (Goodsteinova)**.** *Každá Goodsteinova posloupnost se po konečně mnoha krocích dostává do* 0*.*

Posledních pár detailů

Je patrné, že náš důkaz užívá docela nestandardního postupu, což přišlo zvláštní i jiným lidem. V roce 1982 se matematikům Kirbymu a Parisovi povedlo dokázat, že tato věta může být celá popsána systémem peanovské aritmetiky, ale nikdy v něm nemůže být dokázána[11]. Je tedy zvláštní, že tuto větu, která jistě v tomto systému platí, nelze pomocí něj nijak dokázat [1, 4].

O tom, že věta v peanovské aritmetice platí, se můžeme paradoxně přesvědčit tím, že ji v ní částečně dokážeme. My totiž dle Goodsteinovy věty víme, že každá z těchto posloupností musí být konečná. To znamená, že bychom mohli vyčíslit posloupnost pro libovolnou volbu počátečního členu g_1 a po konečném (neuvěřitelně gigantickém) počtu kroků bychom se dostali ke kýžené nule. Tento fakt jistě musí platit pro libovolné přirozené číslo – konečnost libovolné posloupnosti v peanovské aritmetice tedy dokázat lze. Co ovšem v peanovské aritmetice dokázat nelze, je, že tento výrok platí pro všechna přirozená čísla zároveň.

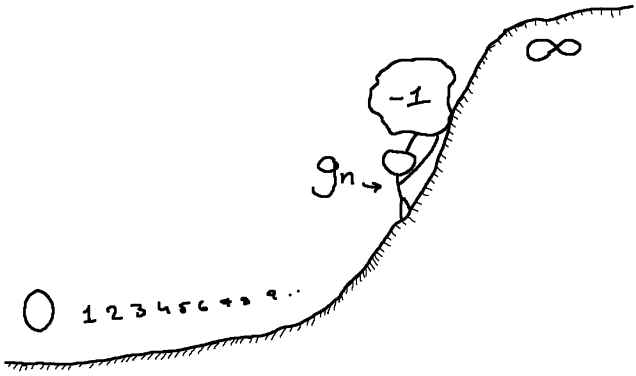
Vidíme tedy, že i zdánlivě „neužitečné“ úlohy a „zvláštní“ matematické objekty mohou mít ve výsledku velmi hluboké implikace.

Plyne tedy z tohoto článku nějaké ponaučení? Možná ano – při jeho psaní jsem si členy této posloupnosti představoval trochu jako slavného Sisyfa, hrdinu z řeckých bájí. Ten byl odsouzen bohy, aby do nekonečna

[11] Peanovská aritmetika je v podstatě základ pro práci a definování všech číselných struktur tak, jak je známe. Patří do ní definice čísel a operací mezi nimi.

valil obrovský kámen do kopce, ale těsně předtím, než se na něj dostal, se mu kámen svalil dolů. Členy Goodsteinovy posloupnosti jsou docela podobné: také už už to vypadá, že porostou nekonečně, a nakonec je porazí titěrná -1.

Z toho může plynout ponaučení značné: i ty nejmenší změny mohou mít na výsledek ten největší efekt. Anebo taky ne, ale dovolil jsem si svou sisyfovskou idealizaci vyobrazit na ilustraci níže.



Obr. 3: Goodsteinův Sisyfos

Poděkování

Velmi děkuji za podrobné komentáře recenzentovi. Díky nim článek získal na matematické přesnosti, aniž by ztratil na čtivosti.

Literatura

[1] *The Mindblowing Goodstein Sequences*. Online. Rising Entropy. `https://risingentropy.com/the-mindblowing-goodstein-sequences/`, 2020.

[2] *Solving a finite number problem using infinities* [@Sheafification of G]. Online. `https://www.youtube.com/watch?v=fDt0Ub9E2GI`, 2024.

[3] Goodstein, R. L.: On the restricted ordinal theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, roč. 9 (1944), č. 2, s. 33–41.

[4] Kirby, L., Paris, J.: Accessible independence results for Peano arithmetic. *Bulletin of the London Mathematical Society*, roč. 14 (1982), č. 4, s. 285–293.