Rozhledy matematicko-fyzikální

Pavla Šimová; Jakub Suchánek
Korespondenční seminář M&M

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 3, 11–19

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153805

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Korespondenční seminář M&M

Pavla Šimová a Jakub Suchánek za M&M

Milá čtenářko, milý čtenáři, rádi bychom ti představili časopis M&M! Je určený pro středoškoláky a podílí se na něm (nejen) studenti MFF UK. Pravidelně se v něm dočteš o různých zajímavých oblastech matematiky, fyziky a informatiky. Zároveň k daným tématkům najdeš vždy i úlohy na procvičení a problémy nabádající k dalšímu samostatnému zkoumání.

V prvním čísle letošního ročníku najdeš třeba tématka o programovacím jazyce Python, kombinatorice a grafech, operačních systémech nebo obecné teorii relativity.

Tvá sepsaná řešení lze poté odevzdat prostřednictvím našeho webu `https://mam.mff.cuni.cz`, do časopisu můžeš přispět dokonce i vlastním článkem. Podporujeme i řešení úloh a psaní článků ve skupině, takže můžeš řešit třeba dohromady s kamarádem.

Došlá řešení obodujeme a pošleme k nim zpětnou vazbu. Za body potom získáš různé ceny – třeba ponožky, knihy, hry, nebo dort za nejlepší článek. Kromě toho ti za body promineme přijímačky na Matfyz nebo tě pozveme na týdenní soustředění plné kamarádů, her, přednášek a vědeckého bádání!

Na ukázku zde uvádíme tématko o rozměrové analýze od Kuby S. z prvního čísla aktuálního 33. ročníku časopisu M&M.

Téma 4 – Rozměrová analýza
Díl 1: Odhadování vztahů bez pochopení fyziky

Jak poznáte, který návrh zaoceánské lodi je nejlepší, když nemáte počítačové simulace a nemůžete si dovolit postavit tucet drahých plavidel v plné velikosti a zkoušet je na moři? Překvapivě daleko se dostanete jenom tím, že pečlivě hlídáte jednotky. Metoda, které se říká *rozměrová analýza*, z „uhádnutí“ dělá skoro exaktní disciplínu – a navíc přesně určí, v jakém režimu musí běžet zmenšený model, aby se choval jako skutečnost.

Rozměrová analýza se fundamentálně používá na dvě věci:

- Uhodnutí fyzikálního vztahu.
- Navržení experimentu, kde se budou relevantní jevy chovat stejně, což nám umožní změřit všechny konstanty v uhodnutém vztahu.

Ty spolu velmi souvisí, jelikož často dostaneme trochu jinou podobu vztahu, než je standardní, protože všechny konstanty musí být bezrozměrné, a tato podoba je nejvíce užitečná pro návrh experimentů v praktičtějším měřítku.

Rozměrovou analýzou se nejprve z proměnných poskládají bezrozměrné skupiny.[1)] V modelu nastavujeme volné proměnné, aby celkem bezrozměrná skupina vycházela stejně jako v reálné verzi. V nádrži se vlečený model lodi proto vláčí znatelně pomaleji, v jiném experimentu létají modely letadel ve vzduchu o teplotě $-160\,^{\circ}\mathrm{C}$. Hlavní reálné využití rozměrové analýzy je tedy škálování modelů pro jevy, které nejdou spočítat, ale je potřeba simulovat. V současnosti NASA stále používá kryogenní hypersonický větrný tunel.

Jak rychle chodíte?

Cílem tu pro nás bude:

1. najít vztah mezi rychlostí chůze a proměnnými popisujícími nohu,
2. prověřit ten vztah v praxi.

Co všechno by rychlost chůze v mohlo ovlivnit?

Než začneme počítat, zastavme se u téhle otázky. Napnutá noha se chová jako kyvadlo: v kyčli je zavěšená k tělu a chodidlo opisuje oblouk. Pohodlná (energeticky nejlevnější) rychlost chůze v (m/s) bude souviset s tím, jak rychle toto kyvadlo dokáže přehazovat nohu z jedné strany na druhou.

Napišme co nejdelší rozumný seznam kandidátů na proměnné a u každého jeho rozměr v základních SI jednotkách:

[1)] Bezrozměrná skupina je součin několika veličin v nějakých mocninách, kde se všechny rozměry vykrátí. Například to může být něco jednoduchého jako $l^{-1} \cdot d$, kde l i d mají rozměr v metrech, takže $\mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{m} = \mathrm{m}^0 = 1$. Nebo to může být složitější jako $Q^2 \cdot \rho^{-2} \cdot g^{-1} \cdot D^{-5}$. Rozepíšeme rozměry a postupně krátíme:

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{kg/s})^2 \cdot (\mathrm{kg/m^3})^{-2} \cdot (\mathrm{m/s^2})^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-5} \\
\to\ &\mathrm{kg}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{kg}^{-2} \cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-5} \\
\to\ &\cancel{\mathrm{kg}^2} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \cancel{\mathrm{kg}^{-2}} \cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-5} \\
\to\ &\mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{m}^{-5} \\
\to\ &\cancel{\mathrm{s}^{-2}} \cdot \mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \cancel{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{m}^{-5} \\
\to\ &\mathrm{m}^6 \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{m}^{-5} \\
\to\ &\mathrm{m}^{6-1-5} = \mathrm{m}^0 = 1.
\end{aligned}
$$

- délka nohy l (m),
- výška těžiště nohy nad zemí h (m),
- průměr nohy d (m),
- hmotnost nohy m (kg),
- tíhové zrychlení g ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).

Teď pozorujeme dvě věci.

Hmotnost musí vypadnout.

m je jediná proměnná, která má v sobě rozměr kg. Výsledná rychlost má rozměr m/s; kilogramy v odpovědi nemáme čím „umazat“, takže se hmotnost v rozměrově správném vztahu nesmí objevit. (Fyzikálně se to dalo tušit: kyvadlo v tíhovém poli je stejně jako padající kámen na hmotnosti nezávislé.)

Délky můžeme zjednodušit na jednu.

Délky l, h, d mají stejný rozměr m. To se dá vyřešit ve dvou případech: ty 3 délky na sobě nejsou nezávislé, nebo dokážeme říci, jak je složit dohromady. Naštěstí u většiny lidí i kráčejících zvířat jsou v přibližně konstantních poměrech. Takže platí, že jsou závislé. Ten druhý případ uvidíme v úloze 1.7 na konci tématka. Nahradíme tedy h za $c_1 \cdot l$ a d za $c_2 \cdot l$. Bezrozměrné konstanty můžeme všechny složit dohromady při skládání rovnice, takže zbude jediná nezávislá délka l.

Zbyly nám jen l a g. Teď nějak potřebujeme poskládat bezrozměrné skupiny – součin/podíl mocnin našich proměnných, kde se všechny rozměry vyškrtají. Jelikož máme akorát o jednu proměnnou (l, g, v) víc, než máme jednotek (m, s), tak víme, že budeme mít právě jednu bezrozměrnou skupinu $l^a \cdot g^b \cdot v^c$. Vychází to z toho, že když vezmeme do jedné skupiny právě dva rozměry, tak třetí rozměr zůstane ve skupině samotný a nemůže se vykrátit. Z jedné skupiny můžeme rovnici udělat triviálně:

$$1 = \mathrm{konst} \cdot l^a \cdot g^b \cdot v^c.$$

Abychom vykrátili proměnné, stačí nám 2 neznámé exponenty, a jelikož nás zajímá vztah pro v, můžeme nastavit $c = 1$ a přeskládat rovnici na

$$v = \mathrm{konst} \cdot l^a \cdot g^b.$$

Dalším krokem je porovnání jednotek:

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m}^a \cdot (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})^b = \mathrm{m}^{a+b} \cdot \mathrm{s}^{-2b}.$$

Porovnáním exponentů[2] u metru a sekundy dostaneme

$$a + b = 1, \qquad -2b = -1,$$

odkud

$$b = \frac{1}{2}, \qquad a = \frac{1}{2}.$$

Výsledkem je

$$v = \xi \cdot \sqrt{g \cdot l},$$

kde ξ je bezrozměrná konstanta. Tu rozměrová analýza neprozradí, ale stačí ji odhadnout z jediného měření. Ekvivalentně: kombinace

$$\xi = v/\sqrt{g \cdot l}$$

je u chůze univerzální bezrozměrné číslo pro všechny chodící tvory.

Úloha [2b]
Stopkami a metrem změřte rychlost pohodlné chůze několika co nejvíc různě vysokých kamarádů a délku jejich nohy (od kyčle k zemi). Vyneste v proti $\sqrt{l}$. Vyjde přímka? Odhadněte z ní konstantu ξ.

Úloha [1b]
Na Měsíci je g přibližně šestkrát menší než na Zemi. Jakou rychlostí byste tam chodili? Srovnejte s tím, co popisovali měsíční astronauti – proč „normální“ chůze na Měsíci nefungovala a raději přešli na charakteristické poskakování?

Problém. Najděte rychlost pohodlné chůze a délku nohy pro co nejvíce zvířat (slon, kráva, pes, kočka, kuře, ...). Vyneste do grafu v proti $\sqrt{g \cdot l}$ a ověřte, zda body leží na společné křivce (nebo přímce na log-log grafu). Pozor: do datasetu patří jen zvířata, která *skutečně kráčejí* (rovná, svisle stojící noha během opory) – ne ta, která skáčou, cválají nebo chodí s nohama horizontálně jako někteří plazi. Pasuje to?[3]

Problém. Proč je běh rychlejší než chůze, když náš vztah pro kyvadlo dává jedinou „přirozenou“ rychlost?

Nápověda: Co dělá běžcova noha v okamžiku, kdy se vrací dopředu – změnila se efektivní délka? Jaké dva efekty ovlivňuje délka a který byl ovlivněn?

[2] Jelikož proměnné násobíme, tak exponenty můžeme sčítat.

[3] Srovnávací dataset rychlostí chůze a rozměrů končetin u savců najdete např. v Alexander, R. McN.: *Principles of Animal Locomotion* (Princeton UP, 2003), graf 7.1.

Postup v rozměrové analýze

Co jsme právě udělali, se dá zformulovat jako návod:

1. **Sepište pravděpodobné proměnné.** Radši víc než míň.
2. **Zapište rozměry všech proměnných** v základních jednotkách (metr, sekunda, kilogram).
3. **Vyřaďte proměnné s unikátními rozměry.** Není možné je s ničím vykrátit pro tvorbu bezrozměrných skupin.
4. **Zkuste najít vztahy mezi veličinami se stejným rozměrem.** Někdy se jich můžeme zbavit úplně jako v prvním příkladě, jindy se nám povede najít mezi nimi vztah případně obsahující bezrozměrnou konstantu (uvidíme v posledním příkladě).
5. **Sestavte skupiny, které splňují *počet proměnných* = *počet rozměrů* $+1$.**
6. **Spočítejte exponenty, aby skupiny byly bezrozměrné.** Porovnáním rozměrů se mocniny doladí tak, aby se exponenty každého rozměru sečetly na nulu.
7. Pokud máte pouze jednu bezrozměrnou skupinu, můžete triviálně sestavit rovnici $1 = \xi \cdot \{S\}$. Pokud více, tak to potřebujete dořešit jinak než rozměrovou analýzou.

Tuhle kostru teď uvidíme na příkladu, kde seznam veličin není hned zřejmý.

Vlny na hladině

Podívejme se teď na jiný systém, kde se stejný rozměrový trik hodí. Hoďte kamínek do dostatečně hlubokého rybníka a sledujte kružnice, které se rozběhnou od místa dopadu. Jakou rychlostí c se takové vlny šíří?

Omezíme se na hluboké vlny (tedy na situaci, kdy je hloubka vody větší než půlka vlnové délky) a na vlny delší než 5 cm (protože v menších dělá velký efekt povrchové napětí).

Co může rychlost c ovlivnit? Kamínek hladinu vychýlí z rovnováhy a gravitace ji tlačí zpět dolů; setrvačnost rozhýbané vody rozkmit udržuje. Sepišme kandidáty:

- vlnová délka λ s rozměrem m,
- tíhové zrychlení g s rozměrem $\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$,
- hustota vody ρ s rozměrem $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$.

A teď se stane něco povědomého. Hustota musí vypadnout. Proměnná ρ je jediná, která v sobě nese kilogramy; rychlost c kilogramy neobsahuje, takže ρ nemá čím své kilogramy zkrátit a musí se objevit s nulovým exponentem. Je to přesně stejný krok jako u chůze, kde ze stejného důvodu vypadla hmotnost. Fyzikálně to dává smysl: obnovující síla na vlnu škáluje s ρ (tíha vychýleného sloupce vody) a setrvačnost rozkmitané vody taky s ρ, takže se v poměru, který určuje rychlost, vykrátí – stejně jako se u kyvadla vykrátí hmotnost.

Zbyly nám tři proměnné c, λ, g a dva rozměry (m, s), tedy jedna bezrozměrná skupina. Hledáme $c = \text{konst} \cdot \lambda^a \cdot g^b$. Srovnáním rozměrů:

$$\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{m}^a \cdot (\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2})^b = \mathrm{m}^{a+b} \cdot \mathrm{s}^{-2b}.$$

Z exponentu u sekundy $-2b = -1$, tedy $b = 1/2$; z exponentu u metru $a + b = 1$, tedy $a = 1/2$. Vychází

$$c = \varphi \cdot \sqrt{g \cdot \lambda},$$

kde φ je bezrozměrná konstanta.

Vyšlo nám, že dlouhé vlny utíkají před krátkými – tomuhle jevu se říká disperze a je to důvod, proč se z neuspořádaného šplouchnutí časem rozjede úhledný vlnový balík: dlouhé komponenty běží napřed, krátké se opožďují.

Problém. Ověřte vztah $c = \varphi \cdot \sqrt{g \cdot \lambda}$ experimentálně a najděte φ. Najděte si klidnou vodní hladinu – rybník, okraj jezera, bazén nebo velkou vanu – s hloubkou alespoň 10 cm. Ideálně bez větru a vln, ať jsou vaše vlny vidět. Hoďte do vody hladký oblázek (průměr zhruba 1–5 cm) ze zvolené výšky mezi 20 cm a 1 m a natočte dopad zpomaleným videem na mobilu. Potřebujete nějak určit měřítko – buď umístíte pravítko poblíž dopadu, nebo si změříte vzdálenost mobilu od dopadu a spočítáte velikost pixelu. Vyzkoušejte několik kombinací kamínků a výšek, vyberte si, v jakých případech jsou rozbíhající se vlny dobře vidět. Rychlost vlny bude záležet pouze na vlnové délce a každý hod vytvoří několik vln o různých vlnových délkách. Z videí odečtěte pro několik různých hřebenů jejich vlnovou délku λ (vzdálenost mezi sousedními hřebeny) a jejich rychlost c (vzdálenost uraženou mezi dvěma snímky dělenou časem mezi nimi). Vyneste c^2 proti λ na lineárních osách a změřte sklon. Z toho spočítejte φ. Odevzdejte taky fotky, videa, případně s anotacemi.



Vibrace struny

Představte si napnutou strunu – třeba strunu kytary, gumičku přes krabičku od sirek nebo prádelní šňůru. Má lineární hmotnost μ (v kg/m) a je napnutá silou T (v $\mathrm{N} = \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$). Cvrnknete do ní příčně a po struně se rozběhne vlna – podobně jako se v předchozím experimentu rozbíhaly vlnky po hladině, akorát teď jednodimenzionálně. Seznam proměnných je tentokrát krátký, postup ale zůstává stejný jako u kapilárních vlnek: sepište kandidáty, zapište jejich rozměry, slepte bezrozměrnou kombinaci a přečtěte odpověď.

Úloha [3b]
Jakou rychlostí v se rozběhnou vlny po prádelní šňůře? Předpokládejte, že gravitace se dá zanedbat, jelikož je napnutí struny dost silné.

Když jsou faktory dva

Rozměrová analýza bývá nejzajímavější tam, kde se jeden jev rozpadá na dva nezávislé škálovací zákony. Zpět k parníku z úvodu: loď při pohybu vodou táhne dvě odlišně se škálující složky odporu: *vlnový odpor* (loď si na hladině vytváří soustavu vln, jejichž energie mizí za zádí) a *třecí odpor* (tenká vrstva vody u trupu se pohybuje s lodí, vzniká viskózní tření po celé smáčené ploše). Každá má vlastní bezrozměrnou kombinaci: vlnový odpor škáluje s $v/\sqrt{g \cdot L}$ (rychlost lodi, gravitační zrychlení, délka lodi), třecí odpor na jiné kombinaci rychlosti, délky a vlastností vody. Obě kombinace nelze na zmenšeném modelu dodržet současně.

Jedno řešení, co se nabízí, je naškálovat jeden model, aby byl vlnový odpor zanedbatelný a třecí správně, druhý model, aby byl třecí odpor zanedbatelný, ale vlnový správně. Problém je, že abychom třecí odpor naškálovali správně, natož zanedbatelně, tak potřebujeme kapaliny řádově méně viskózní než vodu, a takové kapaliny se špatně hledají.

Druhé řešení, které v tomto případě je nutno využít, je, že třecí odpor se vlastně dá docela dobře spočítat. Vlnový odpor je ten složitý, který velmi záleží na přesném tvaru lodi. Takže naškálujeme model, aby vlnový odpor odpovídal (loď jede patřičně pomaleji, aby byly vlny geometricky podobné), od změřeného odporu odečteme třecí odpor pro model, a zbylý vlnový odpor naškálujeme. Tento postup se používal pro vývoj lodí od druhé půlky 19. století.

Modelování sila

Zemědělské silo, dávkovač léků nebo obyčejná slánka – všechno to jsou úlohy o tom, jak rychle vypadává sypký materiál otvorem dole. Jelikož je silo velká stavba, je to příklad, kde se rozměrová analýza používala v praxi pro pochopení chování z vhodného modelu. Budeme se snažit zjistit, jaký hmotnostní průtok Q (v kg/s) vyteče kruhovou aperturou o průměru D.

Nejprve si ale povíme o sypkých materiálech. Sypká hmota se chová jinak než kapalina. Zrna se o sebe opírají a přenášejí si zatížení přes *silové řetězce* – náhodné řetězy bodových dotyků, po kterých většina tíhy sloupce neputuje rovnou dolů, ale šikmo v těch směrech, kde je více opory.

- **Proč výška náplně nehraje roli.** Jakmile se nad otvorem vytvoří krátká klenba (zrnka se dočasně zaklíní do klenby), proudí materiál jen rychlostí, jakou se tato klenba hroutí. Svislé napětí ve sloupci se s hloubkou navíc saturuje – přestává růst, protože tíhu přebírají boční stěny přes tření. Tlak u dna nezávisí na tom, jak vysoko je silo naplněné (proto je v hromadě obilí spodní zrno rozdrcené méně, než by člověk naivně čekal). Průtok otvorem tedy nezávisí na výšce náplně – rozhoduje jen lokální geometrie kolem otvoru.
- **Sypná hmotnost.** U sypké hmoty je dobré rozlišovat dvě veličiny. Hustota materiálu zrna (třeba křemen u písku $\approx 2\,650\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$) popisuje, z čeho je jedno zrno udělané. Pro proudění ze sila ale potřebujeme sypnou hmotnost (někdy též sypnou hustotu) ρ – hmotnost volně nasypané hmoty na celkový objem, který zaujímá, včetně dutin mezi zrny. Typicky je 50–65 % hustoty pevného zrna. Toto je ta veličina, kterou chcete použít pro hustotu. Pokud ji budete potřebovat měřit, tak porovnáváte objem sypkého materiálu včetně dutin a jeho hmotnost, musíte si tedy změřit objem v odměrce.

Úloha [4b]
Pomocí rozměrové analýzy odvoďte vztah pro hmotnostní průtok Q. Dospějte k formuli v uzavřeném tvaru (až na 2 bezrozměrné konstanty).

Nápověda: Jsou tam dvě relevantní délkové proměnné – průměr otvoru D a velikost zrna d. Jelikož velikost zrna zmenšuje efektivní otvor, stačí tyto dvě proměnné používat pouze ve tvaru $(D - \theta \cdot d)$, kde θ je bezrozměrná konstanta.

Problém. Sestavte si doma vlastní malé silo a ověřte škálování z úlohy 4. Chcete docela rovné dno a možnost měnit velikost díry nebo několik sil s různě velkými dírami, cca mezi 3 mm a 3 cm. Sypejte různé materiály – mouku (ale ne hladkou, tam už příliš působí molekulární síly), krystalový cukr, kuskus, čočku, cizrnu nebo cokoli jiného, co se sype alespoň jednou z dírek.

Pro každou kombinaci změřte, za jak dlouho vyteče známé množství materiálu, a spočítejte Q. Q bude docela konstantní, než sypká hmota v silu začne docházet. Vyneste $\log Q$ proti $\log D$ a porovnejte sklon s teoretickou předpovědí (používáme log-log graf, protože z x^a se stane přímka ax' a je tedy mnohem snazší změřit proměnnou a z grafu). Odhadněte obě bezrozměrné konstanty a diskutujte odchylky. Pro jeden zvolený otvor navíc ověřte, že Q nezávisí na výšce náplně. Odevzdejte taky fotky, videa, případně s anotacemi.

Další témátka z časopisu M&M i odevzdávátko na řešení úloh najdete na `https://mam.mff.cuni.cz/`.

BRněnský KOrespondenční Seminář

Adéla Heroudková (za organizátory semináře)

BRKOS je matematický korespondenční seminář určený pro všechny středoškolačky a středoškoláky (a klidně i základoškolačky a základoškoláky), kteří mají rádi matematiku a řešení netradičních problémů. Soutěž je organizována za podpory Ústavu matematiky a statistiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity.