Rozhledy matematicko-fyzikální

Hrátka s čísly

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 3, 36–36

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153808

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Hrátka s čísly

Úloha.

Uvažujte libovolné nejvýše čtyřmístné číslo, které má alespoň dvě různé číslice. (Pokud má méně než 4 číslice, doplňte ho nulami zepředu.) Číslice uspořádejte vzestupně, poté sestupně a odečtěte menší číslo od většího. Proces opakujte a opakujte a opakujte... Např. $5560 \to 6550 - 556 = 5994 \to 9954 - 4599 = 5355 \ldots$ Otázka zní: *Co se stane?*

Úloha z minulého čísla.

Uvažujme následující netradičně definovanou posloupnost přirozených čísel $(g_n)_{n=1}^{\infty}$. Její první člen je $g_1 = 290$. Abychom vyrobili následující člen, tak prvně přepíšeme naše číslo ve dvojkové soustavě následujícím způsobem: $g_1 = 290 = 2^8 + 2^5 + 2$.

Kdykoli se ve dvojkovém zápisu některého exponentu objeví exponent větší než 2, i tento exponent nahradíme jeho dvojkovým zápisem. Pokračujeme, dokud nedostaneme výraz obsahující pouze číslice 1 a 2. Získáme tudíž následující výraz $g_1 = 290 = 2^{2^{2+1}} + 2^{2^2+1} + 2$.

Nyní vezměme všechny výskyty čísla 2 v tomto zápisu, přepišme je na 3 a od výsledku odečtěme 1. Tím získáme druhý člen naší posloupnosti: $g_2 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3^3+1} + 3 - 1 \doteq 4{,}43 \cdot 10^{38}$.

Abychom získali g_3, vezmeme g_2, přepíšeme do trojkové soustavy, nahradíme všechny 3 za 4 a od výsledku odečteme 1.

$g_2 = 3^{81} + 3^{28} + 2 = 3^{3^{3+1}} + 3^{3^3+1} + 2,$

$g_3 = 4^{4^{4+1}} + 4^{4^4+1} + 2 - 1 \doteq 3{,}23 \cdot 10^{616}.$

Další členy g_i generujeme analogicky. Vždy přepíšeme naše původní g_{i-1} v soustavě i (včetně všech exponentů a exponentů exponentů atd.) a následně všechny instance i nahradíme za $i + 1$ a od tohoto výsledku odečteme 1.

Je patrné, že tato posloupnost nabývá hodně vysokých hodnot opravdu rychle. Ale jak je to s jejím limitním chováním? K jaké hodnotě se blíží, když n roste nade všechny meze? Je to nekonečno? A to je právě úkol pro čtenáře: *Spočítejte limitu posloupnosti* $(g_n)_{n=1}^{\infty}$.

Odpověď najdete v článku Jakuba Kuchaříka: *Důkaz větší než nekonečno, který končí u nuly.* Autor ukáže, že posloupnost $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ se dostane po konečně mnoha krocích do nuly. A kdybychom pokračovali odečítáním jedničky, bude tedy limita $-\infty$.