Rozhledy matematicko-fyzikální

Michal Růžek

Proč se rázostroj přestává odrážet aneb synchronizace prostřednictvím nepružných srážek

Rozhledy matematicko-fyzikální, Vol. 101 (2026), No. 3, 53–61

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/153811

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 2026

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Proč se rázostroj přestává odrážet aneb synchronizace prostřednictvím nepružných srážek

Michal Růžek, INSA Lyon, Francie

Abstrakt. Přemýšleli jste někdy, proč se kuličky v rázostroji samovolně synchronizují? Podle fyziky by se přece měly pouze odrážet. Ve skutečnosti existuje jednoduchý fyzikální argument, který vysvětluje nevyhnutelnou synchronizaci tohoto pohybu. Čtěte dál a odhalte, jaký mechanismus je skrytý za tímto chováním.

1. Úvod

Rázostroj je symbolem klasické mechaniky tak, jako je ozubené kolo symbolem inženýrství, zkumavka chemie, Petriho miska biologie nebo dalekohled astronomie. Jeho obraz zdobí titulní stránky učebnic fyziky a jeho modely stojí na stolech na univerzitách po celém světě. Toto malé zařízení, pojmenované v angličtině po Isaacu Newtonovi (Newton's cradle), pravděpodobně vynalezl jeho předchůdce, francouzský učenec Edme Mariotte (1620–1684). Jeho účelem bylo jasně ilustrovat zákony zachování hybnosti a kinetické energie.

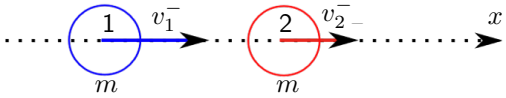
Pokud si koupíte nepříliš kvalitní rázostroj, nebo se jej pokusíte sami postavit jako autor tohoto článku, může vás čekat nepříjemné překvapení. Rázostroj se sice zpočátku chová tak, jak předpovídali slavní učenci 17. století, tzn. že kuličky si při každé srážce vyměňují své rychlosti, ale poměrně záhy dojde k nečekané změně – kuličky se od sebe přestanou odrážet. Místo toho se synchronizují, takže ke srážkám nedochází. Možná proto většina experimentů před zvídavým mladým publikem končí dříve, než k tomuto okamžiku dojde. Pokud přesto budete v experimentu pokračovat a pozorný student se zeptá: „Proč už kuličky neodskakují?“, tento článek by vám měl poskytnout odpověď.

2. Pružná a nepružná srážka[1)]

Než se ponoříme do problému synchronizace, je vhodné připomenout několik známých faktů o rázu izolovaných koulí. Pro jednoduchost uvažujme koule o stejné hmotnosti m pohybující se po přímce orientované

[1)] Pozn. red.: V českém prostředí se rozlišuje „dokonale nepružná srážka“ pro pohyb spojených těles po srážce a „nedokonale pružná srážka“ pro případ popisovaný v článku.

podél osy x. Levá koule bude mít vždy index 1 a pravá index 2. Rychlosti koulí před srážkou budeme označovat v_1^- a v_2^- a po srážce v_1^+ a v_2^+ (obr. 1).



Obr. 1: Koule před srážkou

2.1 Pružná srážka

Dokonale pružná srážka se řídí dvěma zákony zachování: zákonem zachování hybnosti a zákonem zachování kinetické energie. Matematicky jsou vyjádřeny pomocí rychlostí před a po srážce takto pomocí rovnic (1) a (2).

Zákon zachování	Rovnice	
hybnosti	$m(v_1^- + v_2^-) = m(v_1^+ + v_2^+)$	(1)
energie	$\frac{m}{2}((v_1^-)^2 + (v_2^-)^2) = \frac{m}{2}((v_1^+)^2 + (v_2^+)^2)$	(2)

Vyjádření v_2^+ z rovnice (1) a jeho dosazení do rovnice (2) vede po určité úpravě k následující kvadratické rovnici pro neznámou v_1^+:

$$(v_1^+)^2 - v_1^+(v_1^- + v_2^-) + v_1^- v_2^- = 0. \tag{3}$$

Tato rovnice má dvě řešení (uvažujeme, že $v_1^- > v_2^-$, jinak ke srážce nedojde):

$$(v_1^+)_{1,2} = \frac{v_1^- + v_2^- \pm (v_1^- - v_2^-)}{2}.$$

Je uvažováno pouze jedno z těchto řešení, a sice $v_1^+ = v_2^-$. Po zpětném dosazení do (1) a výpočtu v_2^+ lze vyjádřit řešení problému srážky v maticovém tvaru takto:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Rovnice (4) říká, že koule 1 a 2 si vyměňují rychlosti. Pokud je druhá koule v klidu, získá po srážce stejnou rychlost jako první, zatímco první se zastaví. Toto atraktivní chování rázostroje se také přibližně realizuje u rázu kulečníkových koulí. Co se ale stane, když srážka není zcela pružná?

2.2 Nepružná srážka

Během nepružné srážky se zachovává pouze hybnost (1), zatímco kinetická energie se nezachovává, ale zmenšuje se. Část se ztratí a převede do jiných forem energie.[2)] Pro vyjádření nepružné povahy srážky byl vyvinut poloempirický zákon restituce. Soustava rovnic nyní zní (po vynechání hmotností m):

Konstantní hybnost	$v_1^- + v_2^- = v_1^+ + v_2^+$	(5)
Zákon restituce	$e(v_1^- - v_2^-) = v_2^+ - v_1^+$	(6)

kde e je koeficient restituce, jehož hodnota je menší než jedna. Tento koeficient závisí především na kvalitě srážejících se kuliček, jejich dokonalém zarovnání a dalších faktorech. Tento koeficient byl pro rázostroj experimentálně stanoven hned několika autory ([3, 4, 5]).

Stejnou metodou jako dříve, tj. kombinací rovnic (5) a (6), lze vyjádřit výsledné rychlosti po srážce jako lineární kombinaci rychlostí před nárazem v maticovém tvaru takto:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-e & 1+e \\ 1+e & 1-e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Všimněme si, že rovnice (7) se pro $e = 1$ stává rovnicí (4). Jinými slovy rovnicí pro pružnou srážku. Podívejme se nyní, jak tato malá úprava vede k synchronizaci rázostroje po několika následných nárazech.

3. Synchronizace rázostroje

3.1 Použití lineárního modelu srážky

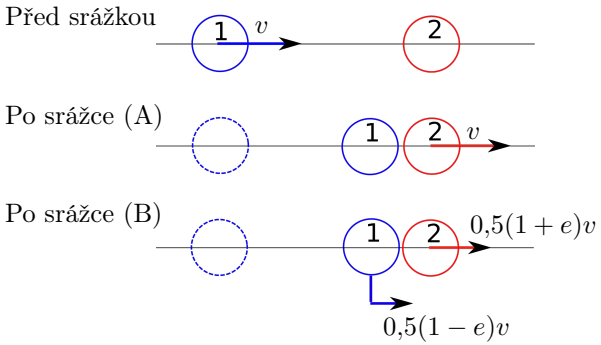
Uvažujme nyní typický začátek srážkového experimentu s rázostrojem. Nechť rychlost první kuličky je v ($v_1^- = v$), zatímco rychlost druhé kuličky je nulová ($v_2^- = 0$). Po první srážce se rychlosti kuliček liší v závislosti na uvažovaném případě (pružný vs. nepružný):

	Rychlost koule 1 po nárazu v_1^+	Rychlost koule 2 po nárazu v_2^+
Ráz pružný (A)	0	v
Ráz nepružný (B)	$0{,}5(1-e)v$	$0{,}5(1+e)v$

Tabulka 1: Rychlosti po prvním nárazu dle modelů

[2)] Například na trvalou deformaci, vibrace a teplo.

Rozdíl mezi těmito dvěma případy je schematicky znázorněn na obr. 2. V nepružném případě vidíme, že si první koule udržuje i po srážce malou dopřednou rychlost. Uvidíme, jak tato malá změna nevyhnutelně vede k synchronizaci rázostroje.



Obr. 2: Rychlosti po první srážce v případě pružného (A) a nepružného (B) rázu

Než ale budeme pokračovat, stanovme si hypotézu o nárazech, které následují po prvním. Pokud přijmeme aproximaci matematického kyvadla[3)], pak k druhému nárazu dojde přesně na stejném místě, jako došlo k prvnímu, ovšem s obrácenými vektory rychlostí. Jestliže tedy vektory rychlosti směřují po první srážce doprava, budou směřovat před druhou srážkou doleva. V reálném experimentu to není úplně pravda, ale pro jednoduchost další analýzy tuto hypotézu zachovejme. Definujme tedy vektor $\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_i$ jako vektor rychlostí před i-tou srážkou a vektor $\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_i$ jako vektor po i-té srážce. S ohledem na hypotézu matematického kyvadla jsou následné vektory propojeny následovně:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_i = - \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_i . \tag{8}$$

Znaménko mínus značí již zmíněnou změnu orientace rychlosti v důsledku zpětného kývání kyvadla.

[3)] Matematické kyvadlo je idealizované kyvadlo tvořené hmotným bodem zavěšeným na nehmotném a neprotažitelném vlákně, které kmitá bez tření v homogenním tíhovém poli. Skutečné kyvadlo se mu blíží, jsou-li rozměry závaží malé ve srovnání s délkou závěsu a hmotnost závěsu zanedbatelná.

Jeden elegantní způsob, jak ukázat, že synchronizace musí nastat, je podívat se na vlastní čísla a vlastní vektory „kolizní“ matice $\mathbf{M}$ (definované rovnicí (7)). Po krátkém algebraickém výpočtu lze zjistit, že vlastní čísla a vlastní vektory jsou:

Vlastní číslo	$\lambda_1 = -e$	$\lambda_2 = 1$
Vlastní vektor	$\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Tabulka 2: Vlastní čísla a vlastní vektory kolizní matice $\mathbf{M}$

Nyní tyto vlastní vektory a vlastní čísla použijme. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že před srážkou lze vektory rychlostí rozložit na prostor definovaný vlastními vektory takto:

$$\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix} = \alpha_1 \boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{q}_2.$$

Rychlosti po srážce lze získat použitím rovnice (7) následovně:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_1 = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_1 = \alpha_1 \mathbf{M}\boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \mathbf{M}\boldsymbol{q}_2 = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{q}_2 = \\ = \alpha_1 (-e) \boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{q}_2. \tag{9}$$

Zde jsme použili vlastnosti vlastních čísel a vlastních vektorů matice $\mathbf{M}$, viz tabulka 2. U druhého rázu a s využitím rovnic (8) a (9) získáme:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_2 = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_2 = -\mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_1 = \alpha_1 (-e^2) \boldsymbol{q}_1 - \alpha_2 \boldsymbol{q}_2.$$

Podobně, pokud vezmeme v úvahu třetí srážku, dostaneme:

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_3 = \cdots = \alpha_1 (-e^3) \boldsymbol{q}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{q}_2.$$

Konečně, pro n-tou srážku:[4)]

$$\begin{bmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{bmatrix}_n = \cdots = \alpha_1(-e^n)\boldsymbol{q}_1 + (-1)^{n+1}\alpha_2\boldsymbol{q}_2 \approx$$
$$\approx \text{pro velké } n \approx (-1)^{n+1}\alpha_2\boldsymbol{q}_2 = (-1)^{n+1}\alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Z rovnice (10) vidíme, že pokud $e < 1$, několikeré srážky potlačí pohyb související s vlastním vektorem $\boldsymbol{q}_1$. Pohyb podél vlastního vektoru $\boldsymbol{q}_2$ na druhou stranu není srážkami ovlivněn a z dlouhodobého hlediska se rázostroj synchronizuje podél tohoto vektoru. To znamená, že již nedochází k žádným nárazům, protože obě rychlosti mají stejnou amplitudu a orientaci. Co se nakonec stane s kinetickou energií? Evidentně se nesníží až na nulovou hodnotu. V našem případě s počátečními rychlostmi $\begin{bmatrix} v_1^- \\ v_2^- \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} v \\ 0 \end{bmatrix}_1$ platí, že rozklad do vlastních vektorů je následující $\alpha_1 = \alpha_2 = v/2$. Kinetické energie na začátku a při synchronizaci jsou dány v tabulce 3.

	Kinetická energie	
Začátek	$\frac{1}{2}mv^2$	(11)
Synchronizace	$\frac{1}{4}mv^2$	(12)

Tabulka 3: Kinetické energie na začátku a během synchronizovaného pohybu

Kinetická energie se tedy při synchronizaci sníží na polovinu.

Další propracovanější modely srážky a synchronizace jsou prezentovány v [1, 2], ale tento jednodušší model byl zvolen pro ilustraci základního konceptu tohoto jevu.

3.2 Použití Lagrangeových multiplikátorů

Existuje alternativní a poměrně jednoduchá metoda, která ukazuje, že k synchronizaci musí nakonec dojít, pokud uvažujeme nepružné srážky. Problém lze formulovat následovně. Najděme rychlosti dvou koulí, které splňují zákon zachování hybnosti, ale minimalizují kinetickou energii systému. To je rozumný předpoklad, protože energie při nepružných srážkách může být pouze ztracena, takže by mělo existovat minimum (možná i nula), kam systém bude směřovat. Problém je matematicky definován

[4)] Důkaz této rovnice lze snadno provést matematickou indukcí.

takto:

Podmínka pro hybnost	$v_1 + v_2 = v$	(13)
Funkce pro minimalizaci (energie)	$F = v_1^2 + v_2^2 = 2E/m$	(14)

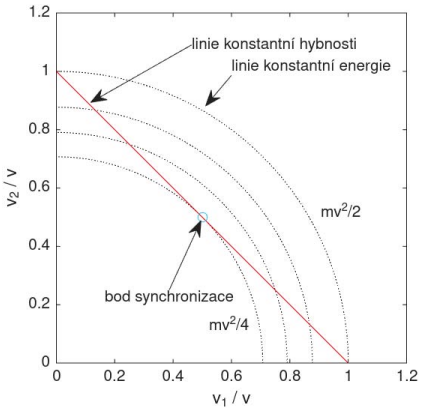
Nalezení extrému funkce $F(v_1, v_2)$ podrobené omezení (13) lze vyřešit tzv. Lagrangeovými multiplikátory. Místo hledání extrému funkce $F(v_1, v_2)$ hledáme extrém funkce

$$L(v_1, v_2, \lambda) = F(v_1, v_2) - \lambda(v_1 + v_2 - v). \tag{15}$$

Extrém funkce $L(v_1, v_2, \lambda)$ nalezneme tak, že najdeme bod, kde se všechny její parciální derivace rovnají nule:

$$\frac{\partial L}{\partial v_1} = 2v_1 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial v_2} = 2v_2 - \lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = -v_1 - v_2 + v = 0. \tag{16}$$

Řešením soustavy rovnic (16) je opět náš předchozí výsledek synchronizovaného pohybu, tzn. $v_1 = v_2 = v/2$.[5)]



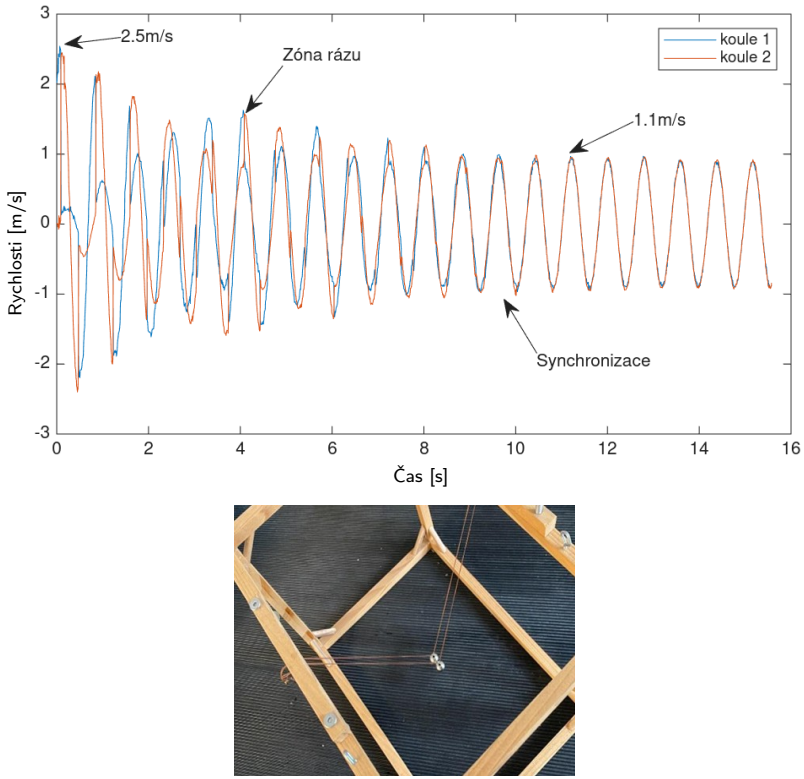
Obr. 3: Vysvětlení Lagrangeova multiplikátoru. Zde hledáme minimum funkce kinetické energie, přičemž řešení omezujeme konstantní hybností (červená čára). Bod znázorňuje extrém.

[5)] Pozn. redakce: V tomto jednoduchém případě vidíme, že platí $F = v_1^2 + v_2^2 = (v - v_2)^2 + v_2^2 = 2v_2^2 - 2vv_2 + v^2 = 2(v_2 - v/2)^2 + v^2/2$. Tudíž minima nabývá F pro $v_2 = v/2 = v_1$.

4. Experimentální studie

Otázkou zůstává, do jaké míry model odpovídá realitě – odpověď na ni dá jednoduchý experiment, který lze provést s jakýmkoli rázostrojem a moderním smartphonem.

Pomocí zpomaleného videa (slow motion) a volně dostupné aplikace (např. Tracker) je možné s dostatečnou přesností měřit polohu a rychlosti kuliček v čase. Obr. 4 ukazuje rychlosti kuliček od začátku experimentu. Nejdříve dochází k velkým srážkám, přičemž celková kinetická energie s každým nárazem klesá. Po pouhých 8 sekundách však dochází k téměř úplné synchronizaci. Obě kuličky mají stejnou rychlost, a i když se pohybují společně, jejich kinetická energie klesá jen velmi pomalu.



Obr. 4: Experimentálně naměřené rychlosti kyvadla na podomácku vyrobeném rázostroji. Lze pozorovat pokles přibližně o polovinu počáteční rychlosti.

5. Závěrem

Závěrem lze říci, že rázostrojem lze demonstrovat nejen zákony zachování hybnosti a kinetické energie, ale také synchronizaci dvou mechanických systémů. Synchronizace dynamických systémů je sama o sobě zajímavou disciplínou (další příklady viz [6]). Poněkud překvapivě je nelinearita (neideálnost) spolu s disipací energie dynamických systémů často nezbytnou podmínkou pro vznik synchronizace.

Nebuďte smutní, pokud se váš rázostroj neodráží donekonečna tak, jak jste si představovali. Není to vada, ale jen důsledek hlubšího vhledu do fyzikální podstaty mechanického rázu.

Literatura

[1] Minseok, L., Seokchan, H.: *Synchronization Behavior of Newton's Cradle.* Online: https://doi.org/10.48550/arXiv.2401.16693.

[2] Jafari, F. A.: Investigation of parameters in oscillations of Newton's cradle. *Lat. Am. J. Phys. Educ.*, roč. 14 (2020), č. 3. Online: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/7587116.pdf.

[3] Cross, R.: Multiple collisions of two balls in a Newton's cradle. *Eur. J. Phys.*, roč. 39 (2018), č. 2. Online: https://doi.org/10.1088/1361-6404/aa9163.

[4] Cross, R.: The effect of very small gaps in Newton's cradle. *Eur. J. Phys.*, roč. 42 (2021), č. 2. Online: https://doi.org/10.1088/1361-6404/abc093.

[5] White, C.: A comparative study of two types of ball-on-ball collision. *Phys. Educ.*, roč. 52 (2017). Online: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6552/aa6d2a.

[6] Strogatz, H. S.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* CRC Press, 2015.