

Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse

Inhalt

In: Heinrich Jacob Karl Durége (author): Elemente der Theorie der Functionen einer Complexen veränderlichen Grösse. Mit besonderer berücksichtigung "Der schöpfungen Riemann's". (German). Leipzig: B. G. Teubner, 1864. pp. VII--XII.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400419>

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Inhalt.

Einleitung	Seite 1
----------------------	------------

Abschnitt I.

Geometrische Darstellung der imaginären Grössen.

§ 1. Eine complexe Grösse $x + iy$ oder $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ wird durch einen Punkt in einer Ebene repräsentirt, der x und y zu rechtwinkligen, und r und φ zu Polarcoordinaten hat. Durch eine complexe Grösse wird eine Gerade ihrer Länge und Richtung nach bestimmt. Richtungscoefficient	12
§ 2. Construction der vier ersten algebraischen Operationen	14
1. Addition	15
2. Subtraction. Verlegung des Nullpunctes	16
3. Multiplication	17
4. Division. Anwendung auf zwei Aufgaben	19
§ 3. Complex Variable. Sie kann zwischen zwei Punkten verschiedene Wege durchlaufen. Richtung der wachsenden Winkel	21

Abschnitt II.

Von den Functionen einer complexen Variablen im Allgemeinen.

§ 4. Die Zusammengehörigkeit der Werthe der Variablen und der Function das wesentliche Merkmal einer Function	23
§ 5. Bedingungen, unter welchen $w = u + iv$ eine Function von $z = x + iy$ ist	26
§ 6. Die Derivirte $\frac{dw}{dz}$ ist unabhängig von dz	28
§ 7. Ist w Function von z , so ist das System der Punkte w dem Systeme der Punkte z in den unendlich kleinen Theilen ähnlich. Abbildung. Verwandtschaft	31

Abschnitt III.

Mehrdeutige Functionen.

§ 8. Bei einer mehrdeutigen Function ist der Werth derselben abhängig von dem Wege, welchen die Variable durchläuft. Verzweigungspuncte	35
---	----

	Seite
§ 9. Zwei Wege ertheilen einer Function dann und nur dann verschiedene Werthe, wenn sie einen Verzweigungspunct einschliessen	40
§ 10. Beispiele: 1) \sqrt{z} , 2) $(z-1)\sqrt{z}$, 3) $\sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}}$, 4) $\sqrt[3]{\frac{z-a}{z-b}} + \sqrt{z-c}$. Cyclische Vertauschung der Functionswerthe	44
§ 11. Einführung der <i>Riemann'schen</i> Flächen, welche die Ebene n -fach bedecken. Verzweigungsschnitte	53
§ 12. Nachweis, dass diese Vorstellungsart den n -werthigen Functionen conform ist	58
§ 13. Stetiger und unstetiger Uebergang über die Verzweigungsschnitte. — Einfache Verzweigungspuncte und Windungspuncte höherer Ordnung	61
§ 14. Im Unendlichen geschlossene Flächen. Der unendlich entfernte Punct kann auch Verzweigungspunct sein. Beispiele verschiedener Anordnung der Verzweigungsschnitte	64
§ 15. Jede rationale Function von w und z ist mit w gleichverzweigt	67

Abschnitt IV.

Integrale mit complexen Variablen.

§ 16. Definition des Integrals. Abhängigkeit desselben von dem Integrationswege	68
§ 17. Das Flächenintegral $\iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ ist gleich dem auf die Begrenzung ausgedehnten Linienintegrale $\int (P dx + Q dy)$. Positive Begrenzungsrichtung	70
§ 18. Ist $P dx + Q dy$ ein vollständiges Differential, so ist $\int (P dx + Q dy)$, bezogen auf die Begrenzung einer Fläche, in welcher P und Q endlich und stetig sind, gleich Null. Es ist $\int f(z) dz = 0$, wenn das Integral längs der Begrenzung einer Fläche genommen wird, in welcher $f(z)$ endlich und stetig ist. Bedeutsamkeit der einfach zusammenhängenden Flächen	76
§ 19. Der Werth eines Begrenzungsintegrals ändert sich nicht, wenn in die begrenzte Fläche solche Theile ein-, oder aus ihr austreten, in denen $f(z)$ endlich und stetig ist. — Ein Begrenzungsintegral ist gleich der Summe der Integrale, genommen längs kleiner geschlossener Linien, welche die in der Fläche enthaltenen Unstetigkeitspuncte einzeln umgeben	78
§ 20. Ist $f(z)$ in $z=a$ so unendlich gross, dass $\lim (z-a) f(z) = p$ ist, so ist, um a herum integrirt, $\int f(z) dz = 2\pi i p$. Zurückführung der Integralwerthe auf geschlossene Linien um die Unstetigkeitspuncte	82
§ 21. Integral um einen Verzweigungspunct b . Setzt man $(z-b)^{\frac{1}{m}} = \xi$ und $f(z) = \varphi(\xi)$, so hat $\varphi(\xi)$ an der Stelle $\xi=0$ keinen Verzweigungspunct. Ist mindestens $\lim (z-b)^{\frac{m-1}{m}} f(z)$ endlich, so ist $\int f(z) dz = 0$	85

Abschnitt V.

Der Logarithmus und die Exponentialfunction.

§ 22. Definition und Eigenschaften des Logarithmus. Vieldeutigkeit desselben 89

§ 23. Die Exponentialfunction $z = e^w$. Abbildung der z -Fläche auf der w -Fläche 93

Abschnitt VI.

Allgemeine Eigenschaften der Functionen.

§ 24. Ist $\varphi(z)$ in einer Fläche T stetig und einädrig, so ist für jeden Punct t derselben $\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z) dz}{z-t}$, das Integral auf die Begrenzung von T ausgedehnt. — In einem Gebiete, in dem eine Function $\varphi(z)$ stetig und einädrig ist, sind es auch ihre Derivirten, und setzt man $\varphi(z) = u + iv$, so kann weder u noch v an einer Stelle dieses Gebietes einen Maximal- oder Minimalwerth haben 97

§ 25. Entwicklung einer Function nach der *Taylor'schen* Reihe. Convergenz derselben. — Eine Function einer complexen Variablen kann nur auf eine Weise stetig, und ohne sich zu verzweigen, fortgesetzt werden. — Eine Function, die in einem beliebig kleinen endlichen Theile constant ist, ist überall constant 100

§ 26. Entwicklung einer Function nach steigenden und fallenden Potenzen 104

Abschnitt VII.

Ueber das unendlich gross und unendlich klein Werden der Functionen.

A. Functionen ohne Verzweigungspuncte. Einwerthige Functionen.

§ 27. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass eine einw. Function $\varphi(z)$ in einem Puncte a endlich und stetig ist, ist $\lim (z-a) \varphi(z) = 0$ 107

§ 28. Eine einw. Function, die für keinen endlichen oder unendlich grossen Werth der Variablen unendlich gross wird, ist eine Constante. Eine Function, die keine Constante ist, muss unendlich gross und Null werden und jeden gegebenen Werth annehmen können 109

§ 29. Eine einw. Function $\varphi(z)$, die überhaupt von einer endlichen Ordnung unendlich gross wird, muss es von einer ganzen Ordnung werden. Sie wird in a unendlich gross von der n ten Ordnung, wenn $\lim (z-a)^n \varphi(z)$ weder Null noch unendlich ist 110

§ 30. $\varphi(z)$ bleibt für $z = \infty$ endlich und stetig, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{z} = 0$ ist. Sie wird unendlich gross von der n ten Ordnung, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{z^n}$ endlich und nicht Null ist 114

	Seite
§ 31. Eine einw. Function, welche nur für $z = \infty$ und hier von endlicher Ordnung unendlich gross wird, ist eine ganze Function. Wird sie hier von unendlich hoher Ordnung unendlich gross, so lässt sie sich nach Potenzen von z in eine für alle Werthe der Variablen convergirende Reihe entwickeln	116
§ 32. Eine einw. Function, die nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, ist eine rationale Function	117
§ 33. $\varphi(z)$ ist bis auf eine additive Constante bestimmt, wenn für jeden Unstetigkeitspunct eine Function gegeben ist, die ebenso unstetig wird, wie $\varphi(z)$ es werden soll	118
§ 34. $\varphi(z)$ wird für $z = a$ unendlich klein oder Null von der n ten Ordnung, wenn $\lim \frac{\varphi(z)}{(z-a)^n}$ weder Null noch unendlich ist	119
§ 35. Wird $\varphi(z)$ in einem Gebiete n Mal Null und ν Mal unendlich gross, so ist, auf die Begrenzung des Gebiets bezogen, $\int d \log \varphi(z) = 2\pi i(n-\nu)$	121
§ 36. Eine einw. Function wird in der ganzen unendlichen Ebene ebenso oft Null als unendlich gross	123
§ 37. Eine einw. Function ist bis auf einen constanten Factor bekannt, wenn man alle endlichen Werthe kennt, für welche sie unendlich klein oder gross wird, und für jeden die Ordnung des Unendlichwerdens	125

B. Functionen mit Verzweigungspuncten.

§ 38. Eine Function $f(z)$ ist in einem Windungspuncte $(m-1)$ ter Ordnung b stetig, wenn $\lim (z-b)^{\frac{1}{m}} f(z) = 0$ ist. — Sie wird dort n Mal unendlich gross, wenn jeder der in b zusammenfallenden Werthe von der Ordnung $\frac{n}{m}$ unendlich gross, d. h. wenn $\lim (z-b)^{\frac{n}{m}} f(z)$ endlich und von Null verschieden ist.	127
§ 39. Verhalten der derivirten Function in einem Verzweigungspuncte	130
§ 40. Abbildung einer Fläche in der Nähe eines Verzweigungspunctes	136
§ 41. Eine n -werthige Function w , welche m Mal unendlich gross wird, ist die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen w und z , welche in Bezug auf w vom n ten, und deren Coefficienten in Bezug auf z vom m ten Grade sind	138

Abschnitt VIII.

Integrale.

A. Integrale über geschlossene Linien ausgedehnt.

§ 42. Das Integral $\int f(z) dz$ genommen um einen Unstetigkeitspunct, um den die z -Fläche sich m Mal windet, hat dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens von $f(z)$ angiebt, das Glied, welches von der ersten Ordnung	
---	--

	unendlich gross wird, vorhanden ist; und dieser Werth ist dann gleich $2m\pi i$ mal dem Coefficienten dieses Gliedes . .	Seite 140
§ 43.	Geschlossene Linien um den unendlich entfernten Punct. Das Integral längs einer solchen Linie richtet sich nach der Beschaffenheit der Function $z^2/f(x)$	143

B. Integrale über nicht geschlossene Linien. Unbestimmte Integralfunctionen.

§ 44.	Das Integral einer Function $\varphi(z)$, dessen obere Grenze einen Werth a erreicht, für den $\varphi(z)$ unendlich gross ist, hat dann und nur dann einen endlichen Werth, wenn $\lim (z-a)\varphi(z) = 0$ ist. Art des Unendlichwerdens einer Integralfunction. Logarithmisches Unendlichwerden . . .	148
§ 45.	Verhalten des Integrals, wenn die obere Grenze sich ins Unendliche entfernt. Es ist dann und nur dann endlich, wenn $\lim z\varphi(z) = 0$ ist	150

Abschnitt IX.

Einfach und mehrfach zusammenhängende Flächen.

§ 46.	Erklärungen. Feststellung der Begriffe. Beispiele . . .	152
§ 47.	Querschnitte	157
§ 48.	Nachweis, dass jede $(n+1)$ -fach zusammenhängende Fläche durch n beliebige Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt wird, deren Begrenzung dann aus einem ununterbrochenen Zuge besteht, bei welchem die Querschnitte zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden	158

Abschnitt X.

Von den Periodicitätsmoduln.

§ 49.	Betrachtung einer Integralfunction innerhalb einer mehrfach zusammenhängenden Fläche. Beim Ueberschreiten eines Querschnitts ändert sich die Function unstetig um eine längs des Querschnitts constante Grösse. Vieldeutigkeit der Integralfunctionen. Die inversen Functionen sind periodisch	167
§ 50.	Erweiterung für den Fall, dass frühere Querschnitte durch spätere in Abschnitte getheilt werden. Die Anzahl der unabhängigen Periodicitätsmoduln ist gleich der Anzahl der Querschnitte	172
§ 51.	Genauere Bestimmung der Puncte, welche aus der Fläche bei Untersuchung einer Integralfunction ausgeschlossen werden müssen, und welche nicht	175
§ 52.	Beispiele:	
	1. Der Logarithmus	177
	2. Der Arcus Tangens	178
	3. Der Arcus Sinus	183
	4. Das elliptische Integral	187

Abschnitt XI.

Bestimmung einer Function durch Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen.

§ 53.	Bestimmung einer überall endlich bleibenden Function innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche	201
-------	---	-----

	Seite
§ 54. Bestimmung einer Function, die innerhalb einer einfach zusammenhängenden Fläche unendlich wird	206
§ 55. Verwandlung einer Function von x und y in eine Function von $x + iy$	211
§ 56. Modificationen für den Fall, dass die einfach zusammenhängende Fläche durch Ziehen von Querschnitten aus einer mehrfach zusammenhängenden entstanden ist	213
§ 57. Abbildung einer einfach zusammenhängenden Fläche durch einen Kreis	214

Abschnitt XII.

Ueber die Bestimmung des Zusammenhangs einer gegebenen Fläche.

§ 58. Die Anzahl der positiven Umläufe, welche die Begrenzung einer einfach zusammenhängenden Fläche macht, ist um Eins grösser, als die Anzahl der in der letzteren enthaltenen einfachen Verzweigungspuncte	217
§ 59. Bei einer $(q+1)$ -fach zusammenhängenden Fläche besteht zwischen der Anzahl q ihrer Querschnitte, der Anzahl U der positiven Umläufe ihrer Begrenzung und der Anzahl g ihrer einfachen Verzweigungspuncte die Beziehung $q = g - U + 1$	222
§ 60. Bei einer im Unendlichen geschlossenen Fläche, welche $(q+1)$ -fach zusammenhängend ist, aus n Blättern besteht und g einfache Verzweigungspuncte besitzt, besteht die Beziehung $q = g - 2(n-1)$	224