# 5 Historie

## 5.1 Zlatý řez v Eukleidových Základech

Řecký geometr Eukleidés (2. pol. čtvrtého a 1. pol. třetího st. př. n. l.) je jedním z nejznámějších matematiků starověku. O jeho životě se mnoho neví. Z děl pozdějších autorů lze vyčíst, že žil za vlády **Ptolemaia I.**[1] v Alexandrii. Jeho nejvýznamnější dílo *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) bylo pravděpodobně napsáno někdy okolo roku 300 př. n. l. Kromě tohoto snad nejdůležitějšího geometrického díla v dějinách vůbec, sepsal několik dalších matematických spisů; ne všechny se však dochovaly.

*Základy*, skládající se ze třinácti knih (částí), jsou systematickým shrnutím tehdejších geometrických znalostí. Po *Bibli* se staly nejvydávanější knihou a přes 2000 let sloužily jako učebnice geometrie. Je v nich položen základ „eukleidovské geometrie" budované deduktivním způsobem (v tehdejší době jedinečným).

Podle struktury textu lze usoudit, že jednotlivé knihy *Základů* nevznikaly postupně tak, jak jsou číslovány (kdyby při psaní určité knihy věděl Eukleidés to, co je psáno v knihách předcházejících, patrně by postupoval při dokazování některých tvrzení jinak). Také je pravděpodobné, že autory některých částí jsou další matematici žijící ve stejné době jako Eukleidés nebo dříve.

Pro nás je podstatné, že právě v *Základech* se nám dochoval zatím snad nejstarší písemný záznam o zlatém řezu. Eukleidés nazývá zlatý řez poměrem „krajním a středním". V úvodu šesté knihy je uvedena následující definice (cituji z českého překladu **Františka Servíta**[2] z roku 1907 [29]):

> *Pravíme, že přímka*[3] *jest rozdělena poměrem krajním a středním, když větší úsečka má se k menší jako celá k větší.*[4]

Dále uvedu pro zajímavost několik tvrzení z Eukleidových *Základů* souvisejících se zlatým řezem. Tvrzení jsou opět vypsána z knihy [29]. Kde je třeba, doplňuji tvrzení vysvětlením, přepisem do dnešního jazyka nebo náznakem důkazu pomocí současných algebraických zápisů. Eukleidovy důkazy jsou poměrně

[1] Ptolemaios I. (367-283 př. n. l.), makedonský generál Alexandra Velikého, v roce 305 př. n l. se stal vládcem Egypta.

[2] František Servít (1848-1. 11. 1923), profesor gymnázia v Jičíně a na Královských Vinohradech v Praze.

[3] Slovem přímka je zde (stejně jako v dalších tvrzeních) myšlena úsečka.

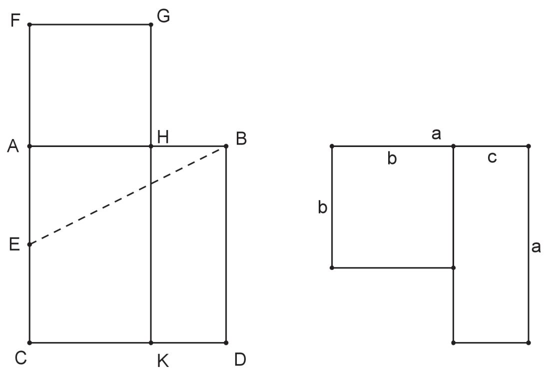
[4] Poznámka F. Servíta: Rozdělení „zlatým řezem", kdež úsečka větší je střední úměrnou.

zdlouhavé a z hlediska dnešního jazyka náročné, proto je neuvádím. Podrobnější rozbor většiny následujících vět a jejich důkazů nalezne čtenář v práci [15]. Znění některých tvrzení vypadá spíš jako zadání úlohy. V *Základech* však úlohy a tvrzení nejsou rozlišovány, navíc u úloh je vždy dokazována správnost řešení. U jednotlivých tvrzení je vyobrazen obrázek stejný, jako v *Základech* u důkazu tohoto tvrzení.[5] Jsou-li obrázky dva, ten vpravo slouží k názornějšímu pochopení mého vysvětlení daného tvrzení (čtenáře bych ráda upozornila, že značení použité ve vysvětleních jednotlivých tvrzení nekoresponduje se značením v příslušném převzatém obrázku). Není-li uveden žádný obrázek, znamená to, že nebyl ani v *Základech.*

**Kniha druhá, tvrzení XI.** (obr. 5.1):

> *Rozděl danou přímku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.*

Úlohu snadno objasníme, přepíšeme-li ji pomocí matematických vztahů. Je dána úsečka délky $a$, kterou máme rozdělit na dvě úsečky délek $b$, $c$ (tedy $b + c = a$). Nechť $b > c$. Uvažujeme obdélník, jehož kratší strana má délku $c$ a delší délku $a$, a čtverec se stranou délky $b$. Porovnáme-li jejich obsahy, dostáváme $b^2 = a \cdot c$, po úpravě $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ nebo také $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$, z čehož plyne, že je daná úsečka dělena ve zlatém řezu.



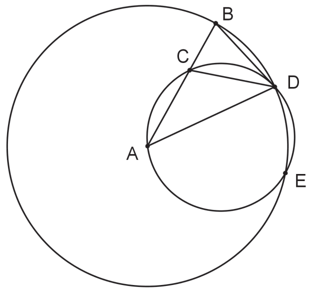

Obrázek 5.1: Kniha druhá, tvrzení XI.

**Kniha čtvrtá, tvrzení X.** (obr. 5.2):

> *Sestroj rovnoramenný trojúhelník mající úhly na základně jednotlivě dvakrát větší úhlu třetího.*

Takový trojúhelník nazýváme zlatý. Poměr délek jeho ramena a základny je zlaté číslo. V Základech je tento trojúhelník dále používán při vepisování pravidelného pětiúhelníku do dané kružnice.

[5] Obrázky jsou opět převzaty z českého překladu od F. Servíta.

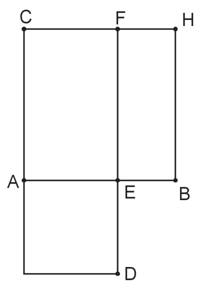



Obrázek 5.2: Kniha čtvrtá, tvrzení X.

**Kniha šestá, tvrzení XXX.** (obr. 5.3):

*Rozděl přímku omezenou poměrem krajním a středním.*

Dnešními slovy řečeno: Rozděl danou úsečku zlatým řezem.

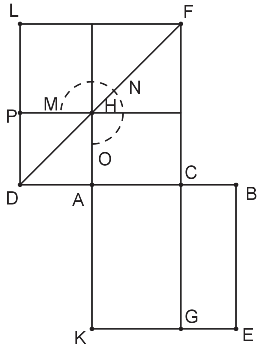



Obrázek 5.3: Kniha šestá, tvrzení XXX.

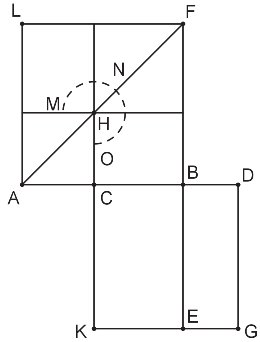
**Kniha třináctá, tvrzení I.** (obr. 5.4):

*Když se rozdělí přímka poměrem krajním a středním, čtverec z větší úsečky, zvětšené o polovici celé, rovná se pateronásobnému čtverci z polovice.*

Označíme-li délku dané úsečky $a$ a rozdělíme-li ji na dvě části $x$ a $a - x$ zlatým řezem, musí platit $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, neboli po úpravě $x^2 + ax - a^2 = 0$. Tvrzení můžeme přepsat následovně $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = 5 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Úpravou této rovnice dostáváme vztah $x^2 + ax - a^2 = 0$, který je podle předpokladů splněn.




Obrázek 5.4: Kniha třináctá, tvrzení I.




Obrázek 5.5: Kniha třináctá, tvrzení II.

**Kniha třináctá, tvrzení II.** (obr. 5.5):

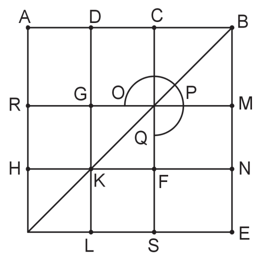
*Když je čtverec přímky pateronásobkem čtverce z úsečky její, rozdělí-li se řečená úsečka zdvojnásobena jsouc poměrem krajním a středním, větší úsečka (nová) je zbývající částí přímky počáteční.*

Je dána úsečka $AB$ a bod $C$ ležící mezi body $A$, $B$ tak, že platí: $|AB|^2 = 5 \cdot |AC|^2$. Uvažujeme-li bod $D$ na polopřímce $AB$ takový, že $|CD| = 2 \cdot |AC|$, a rozdělíme-li úsečku $CD$ zlatým řezem, bude délka většího dílu úsečky $CD$ rovna délce úsečky $BC$.

**Kniha třináctá, tvrzení III.** (obr. 5.6):

*Když se rozdělí přímka poměrem krajním a středním, čtverec menší úsečky zvětšené o polovici úsečky větší rovná se pateronásobnému čtverci z polovice úsečky větší.*

Přímku délky $a$ rozdělíme zlatým řezem na části dlouhé $x$ a $a-x$ tak, že $x > a-x$. Čtverec menší úsečky zvětšené o polovici větší zapíšeme: $\left(a - x + \dfrac{x}{2}\right)^2$, pateronásobek čtverce z polovice úsečky větší zapíšeme: $5 \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$. Dostáváme tedy rovnici $\left(a - x + \dfrac{x}{2}\right)^2 = 5 \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$, kterou lze ekvivalentními úpravami převést na rovnici zlatého řezu $x^2 + ax - a^2 = 0$, o které z předpokladů víme, že je splněna.

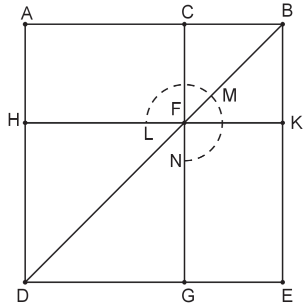



Obrázek 5.6: Kniha třináctá, tvrzení III.

**Kniha třináctá, tvrzení IV.** (obr. 5.7):

> *Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním, součet čtverců z celé a z úsečky menší je třikrát větší nežli čtverec úsečky větší.*

Přímku délky $a$ rozdělíme zlatým řezem na části dlouhé $x$ a $a-x$, $x > a-x$. Tvrzení přepsané do rovnice vypadá následovně: $a^2+(a-x)^2 = 3\cdot x^2$. Úpravou této rovnice opět získáme rovnici zlatého řezu.

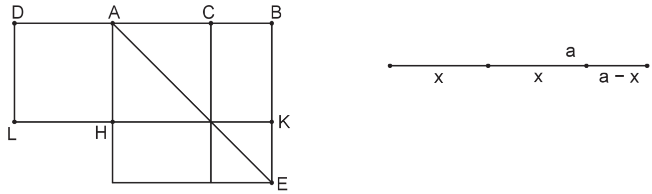



Obrázek 5.7: Kniha třináctá, tvrzení IV.

**Kniha třináctá, tvrzení V.** (obr. 5.8):

> *Když se přímka rozdělí poměrem krajním a středním a připojí se k ní rovná úsečce větší, celá přímka rozdělena jest poměrem krajním a středním, a větší úsečkou jest přímka počáteční.*

K přímce délky $a$ rozdělené zlatým řezem na úsečky délek $x$, $a-x$ $(x > a-x)$ připojíme úsečku délky $x$. Nyní má platit: $\dfrac{a+x}{a} = \dfrac{a}{x}$. Úpravou této rovnice získáme rovnici $x^2 + ax - a^2 = 0$, která z předpokladů platí.




Obrázek 5.8: Kniha třináctá, tvrzení V.

**Kniha třináctá, tvrzení VI.**:

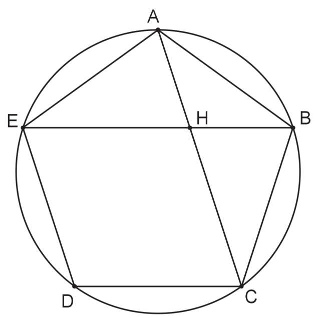
> *Když se přímka změrná rozdělí poměrem krajním a středním, každá z úseček je nezměrná, nazývaná úsečnicí.*

Dnešními slovy řečeno: Rozdělíme-li úsečku, jejíž délka je racionální číslo, zlatým řezem, budou mít takto získané části původní úsečky iracionální délku. Pojem úsečnice je zaveden v knize desáté, kde je používán právě pro „nezměrnou“ úsečku získanou dělením úsečky „změrné“.

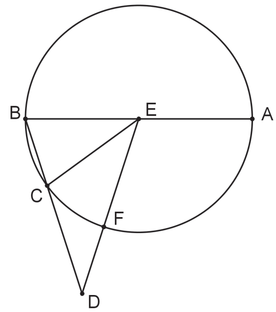
**Kniha třináctá, tvrzení VIII.** (obr. 5.9):

> *Když jsou v pětiúhelníku stejnostranném a stejnoúhlém proti dvěma sousedním úhlům úhlopříčky, protínají se navzájem poměrem krajním a středním, a větší jejich úsečky rovnají se stranám pětiúhelníku.*

Pětiúhelníkem stejnostranným a stejnoúhlým se myslí pravidelný pětiúhelník (má „stejné úhly, stejné strany“). Vezmeme-li dvě různé úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, které nemají společný krajní bod, dělí jejich průsečík každou z nich ve zlatém řezu (viz podkapitola 3.4).




Obrázek 5.9: Kniha třináctá, tvrzení VIII.




Obrázek 5.10: Kniha třináctá, tvrzení IX.

**Kniha třináctá, tvrzení IX.** (obr. 5.10):

> *Když se sečtou strana šestiúhelníku a strana desetiúhelníku, do téhož kruhu vepsaných, celá přímka jest rozdělena poměrem krajním a středním a její úsečkou větší je strana šestiúhelníku.*

Platnost tohoto tvrzení vyplývá například ze středoškolské konstrukce pravidelného pětiúhelníku popsané na straně 56.

Tvrzení uvedená na začátku 13. knihy jsou dále použita při konstrukci pravidelných mnohostěnů vepisováním do kulové plochy. Touto částí ale *Základy* nekončí. Ke třinácti knihám byly později připojeny další dvě, takzvané *Dodatky*. Jejich autorem již pravděpodobně není Eukleidés. Za autora čtrnácté knihy je považován **Hypsiklés z Alexandrie**,[6] autorem patnácté knihy je možná **Isidor z Milétu**[7] nebo některý z jeho žáků [2]. Obě knihy pojednávají

[6] Hypsiklés z Alexandrie (asi 190-120 př. n. l.), řecký matematik.

[7] Isidor z Milétu (442-537 n. l.), architekt, podílel se na stavbě chrámu Hagia Sofia v Konstantinopoli (dnešní Istambul).

o pravidelných mnohostěnech. V knize čtrnácté jsou dvě věty související se zlatým řezem. Věty cituji z knihy [2], kde je uveden Smolíkův[8] překlad *Dodatků*. Pro dělení úsečky zlatým řezem užívá termín poměr vnější a střední.

**Věta 5.**:

> *Rozdělíme-li dovolnou přímku v poměru vnějším a středním, má se přímka, jejíž čtverec se rovná součtu čtverce celé oné přímky a čtverce části její větší k přímce, jejíž čtverec se rovná součtu čtverce téže celé přímky a čtverce části její menší, jako se má hrana krychle k hraně dvacetistěnu.*

Symbolicky bychom tuto poměrně komplikovaně formulovanou větu mohli zapsat následovně:

> Danou úsečku délky $a$ rozdělíme zlatým řezem na díly $x$ a $a-x$ tak, že $x > a-x$. Potom poměr $\frac{b}{c}$, kde $b^2 = a^2+x^2$, $c^2 = a^2+(a-x)^2$, je shodný s poměrem délek hran krychle a pravidelného dvacetistěnu vepsaných téže kulové ploše.

**Věta 7.**:

> *Rozdělíme-li dvě přímky v poměru vnějším a středním mají se přímky ty k sobě jako jejich části.*

Větu opět převedu do dnešního symbolického zápisu:

> Jsou dány dvě úsečky délek $a$, $b$. Obě tyto úsečky rozdělíme zlatým řezem, úsečku délky $a$ tak rozdělíme na úsečky délek $x$ a $a-x$, přičemž $x > a-x$, úsečku délky $b$ rozdělíme na úsečky délek $y$ a $b-y$, přičemž $y > b-y$. Potom $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Sama textu rozumím tak, že závěrečným tvrzením je rovnost poměrů $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ (při výše zavedeném označení). V důkazu se však dokazuje rovnost $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, která je s rovností $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ ekvivalentní.

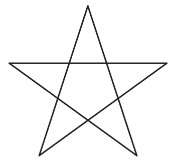
## 5.2 Zlatý řez u dalších autorů starověku

Zlatý řez byl pravděpodobně znám ještě před Eukleidem. Pythagorejci[9] měli ve znaku pentagram (obr. 5.11), symbol, ve kterém lze najít zlatý řez hned několikrát.

[8] Josef Smolík (∗ 5. 11. 1832, † 12. 9. 1915), středoškolský profesor matematiky a fyziky, působil zejména v Praze a v Pardubicích (více o jeho životě a díle v knize [3]).

[9] Žáci pythagorejské školy, kterou okolo roku 530 př. n l. založil v Krotónu (jihoitalská dórská kolonie) Pythagorás ze Samu.

Byl to pravděpodobně právě jeden z Pythagorejců – **Hippasos z Metapontu**[10] – kdo objevil nesouměřitelnost[11] strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku pomocí nekonečného vepisování pětiúhelníků do sebe. Je možné, že nesouměřitelnost a iracionální čísla byla jako první objevena prostřednictvím zlatého řezu, většinou se však má za to, že tyto fenomény byly odhaleny zkoumáním poměru úhlopříčky a strany čtverce [16].



Obrázek 5.11: Pentagram

Řecký matematik **Theaitétos**[12] vepsal pravidelný pětiúhelník do kružnice, dokázal, že pravidelných mnohostěnů existuje právě pět, a je považován za prvního matematika, který tato tělesa sestrojil. Je pravděpodobné, že z jeho prací čerpal Eukleidés při psaní desáté a třinácté knihy svých *Základů*.

**Hérónovi z Alexandrie**[13] je připisována dnes asi nejznámější konstrukce zlatého řezu (viz Konstrukce 1 v kapitole 2), která je jakousi obměnou konstrukce uvedené v *Základech* v knize druhé, tvrzení XI. Hérón se také zabýval aproximací obsahu pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku, kružnicí opsanou pravidelnému pětiúhelníku a objemem pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu [8].

Dalším významným matematikem, jehož práce souvisí se zlatým řezem, je **Klaudios Ptolemaios**.[14] Jeho nejznámější prací je bezpochyby *Velká skladba* (řecky *Megalé syntaxis*), známá pod názvem *Almagest* [34]. Ptolemaios sestavil tabulky tětiv (délky tětiv příslušné středovým úhlům v závislosti na poloměru kružnice) srovnatelné s moderními trigonometrickými tabulkami. Zabýval se i výpočtem tětiv příslušných k úhlům 36° a 72°, což jsou strany pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku vepsaných do dané kružnice. Při těchto výpočtech pracoval se zlatým řezem a pokusil se určit hodnotu $\varphi$ [8].

Poslední matematik tohoto období, kterého zde uvedu, je **Pappos z Alexandrie**.[15] Kromě jiného se zabýval konstrukcí pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu a výpočtem objemů pravidelných mnohostěnů. Konstrukce dvanáctistěnu a dvacetistěnu uvádí ve třetí knize svého díla *Synagoge* (celkem 8 knih). Pappovo pojetí je zcela odlišné od Eukleidových *Základů*. Výpočet objemů popisuje v knize páté. Uvádí zde rovněž několik lemmat využívajících zlatý řez. Například [8]:

- Rozděl úsečku $AB$ zlatým řezem v bodě $G$ tak, že $GB$ je menší částí původní úsečky. Potom $\dfrac{|AB|^2}{5 \cdot |GB|^2} > \dfrac{4}{3}$.

---

[10] Hippasos z Metapontu (žil okolo roku 450 př. n. l.), řecký matematik.

[11] Dvě úsečky jsou nesouměřitelné, jestliže jejich délky nemají žádného společného celočíselného dělitele.

[12] Theaitétos (asi 415-369 př. n. l.), řecký matematik, pocházel z Athén.

[13] Hérón z Alexandrie (asi 10–70 n. l.), řecký matematik, fyzik a vynálezce, zabýval se mimo jiné mechanikou a hydraulikou.

[14] Klaudios Ptolemaios (asi 90–165 n. l.), řecký geograf, astronom a astrolog, který žil pravděpodobně v Alexandrii.

[15] Pappos z Alexandrie (žil pravděpodobně v 1. pol. 4. st. n. l.), řecký matematik.

- Nechť $AG$ je průměr kružnice se středem $E$. Sestroj úsečku $BD$ takovou, že $BD \perp AG, D \in AG$, $B$ leží na kružnici a platí: $|AG| = 3 \cdot |GD|$. Sestroj trojúhelník $AGB$. Dále rozděl úsečku $BG$ zlatým řezem v bodě $T$ tak, že $BT$ je delší část úsečky $BG$. Na úsečce $AG$ sestroj bod $Z$ tak, aby $|EG|^2 = 5 \cdot |EZ|^2$. Potom platí: $\dfrac{|BT|^2}{|GZ|^2} = \dfrac{5}{3}$.

## 5.3 Zlatý řez v arabské matematice

Arabská matematika, o které zde bude řeč, se rozvíjela v období od začátku 9. století do přibližně poloviny 10. století. K nejznámějším autorům patří matematik a astronom **Muhammad al-Chwárizmí**,[16] který se věnoval zejména algebře. Jedna jeho úloha zní [8]:

> *Rozdělím deset na dvě části. Jednu vynásobím deseti a druhou sama sebou. Tyto součiny pak budou stejné.*

Zapíšeme tuto úlohu pomocí rovnice:

> Číslo 10 jsme rozdělili na $x$ a $10 - x$, přičemž $x$ vynásobíme desíti a $10 - x$ vynásobíme výrazem $10 - x$. Má nastat následující rovnost:
>
> $$10x = (10 - x)^2.$$
>
> Tuto rovnost lze ale přepsat následovně:
>
> $$\frac{10}{10 - x} = \frac{10 - x}{x},$$
>
> což je rovnice pro rozdělení úsečky délky 10 zlatým řezem, kde $x$ je menší částí původní úsečky. Je ovšem otázkou, zda al-Chwárizmí měl v úmyslu použít zlatý řez.

Dalším významným arabským matematikem byl **Abú Kámil**.[17] Kámil použil vlastnosti zlatého řezu ve dvou knihách: (*Kniha o algebře, Kniha o pětiúhelníku a desetiúhelníku*). Podrobněji jsou práce arabských matematiků související se zlatým řezem zpracovány v [8].

## 5.4 Zlatý řez v období renesance

O zlatém řezu v pracích z období středověku toho příliš nevíme, protože z tohoto období pochází řada dosud neprozkoumaných rukopisů. Na základě již prozkoumaných prací se však lze domnívat, že ve středověku o matematiku (včetně zlatého řezu) poněkud opadl zájem. Jednu z výjimek tvoří Fibonacciho

---

[16] Abú Abdalláh Muhammad ibn Músa al-Chwárizmí (asi 780–850 n. l.), matematik a astronom, věnoval se aritmetice, algebře, astronomii, geografii a výpočtům kalendáře.

[17] Abú Kámil Shuja ibn Aslam ibn Muhammad ibn Shuja (asi 850–930 n. l.), zabýval se algebrou a jejím užitím v geometrii.

posloupnost, kterou popsal Fibonacci ve svém díle *Liber Abaci* (více viz podkapitola 1.4). Rozkvět zlatého řezu nastal až v období renesance, zejména díky několika malířům a matematikům současně.

Prvním z nich byl **Piero della Francesca**.[18] Napsal *Traktát o abaku* (*Trattato d'Abaco*), *Traktát o perspektivě* (*De prospectiva pingendi*) a *Knížečku o pěti pravidelných tělesech* (*Libellus de Quinque Corporibus Regularibus*). V jeho díle se objevuje řada úloh a řešení na téma pravidelný pětiúhelník a pravidelná tělesa. Počítá délky stran a úhlopříček, obsahy, povrchy a objemy zmíněných geometrických objektů, přičemž v řadě jeho řešení figuruje zlatý řez [16]. Zde je malá ukázka z jeho díla:

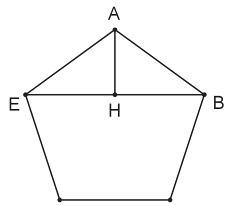
> *Úhlopříčka pravidelného pětiúhelníku měří 12. Nalezněte stranu tohoto pětiúhelníku.*

Víme, že strana je větší částí úhlopříčky rozdělené zlatým řezem. Na tomto principu je založeno i Francescovo řešení. Další příklad:

> *Strana pravidelného pětiúhelníku měří 4. Nalezněte úhlopříčku tohoto pětiúhelníku.*

Jedná se o obrácenou úlohu k předchozímu příkladu. Na tomto faktu je založeno i její řešení. A ještě jedna úloha:

> *Strana pravidelného pětiúhelníku měří 4. Nalezněte výšku $AH$ na úhlopříčku $BE$* (obr. 5.12).




Obrázek 5.12: Výška na úhlopříčku v pětiúhelníku

Velkou část z Francescova díla převzal italský mnich **Luca Pacioli**.[19] Sepsal dílo *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (*Souhrn poznatků o aritmetice, geometrii, poměrech a úměrnosti*), které lze považovat za jakousi středověkou encyklopedii matematiky. Většinu Francescova díla o tělesech použil ve svém třísvazkovém traktátu o zlatém řezu *De divina proportione* (*O božském poměru*). V páté kapitole prvního svazku uvádí pět důvodů, proč by se podle jeho názoru měl zlatý řez označovat jako božský poměr [16].

[18] Piero della Francesca (asi 1415–12. 10. 1492), italský malíř, představitel rané renesance.

[19] Luca Pacioli (1445–1517), vychovatel, učitel, matematik samouk, od 70 let 15. století příslušník františkánského řádu.

- *„Protože je jeden a více jich není.“ Pacioli přirovnává jedinečnost zlatého řezu k tomu, že jedinost „je nejvyšším přídomkem samého Boha“.*
- *Pacioli shledává podobnost mezi definicí zlatého řezu z přesně tří délek*[20] *a existencí svaté Trojice – Otce, Syna a Ducha svatého.*
- *Vidí obdobu v rozumové neuchopitelnosti Boha a ve skutečnosti, že zlatý řez je iracionální číslo. Přímo napsal: „Jako není možné patřičně definovat Boha a nelze jej pochopit pomocí slov, tak ani naše proporce nemůže být vymezena pochopitelnými čísly, ani vyjádřena nějakou racionální veličinou; vždy zůstane skrytá, utajená a, jak ji nazývají matematici, iracionální.“*
- *Pacioli přirovnává všudypřítomnost a neměnnost Boha k soběpodobnosti spojené se zlatým řezem – k tomu, že hodnota tohoto poměru je vždy stejná a nezávisí na délce rozdělené úsečky ani na velikosti pětiúhelníku, tedy útvarů, z nichž se poměry délek vypočítávají.*
- *Pátý důvod prozrazuje ještě platónštější názor na existenci, než zastával sám Platón. Pacioli uvádí, že stejně jako Bůh pomocí páté esence, ztělesněné dvanáctistěnem, uvedl v bytí celý vesmír, tak zase zlatý řez dává existenci dvanáctistěnu, jelikož toto těleso bez něj sestrojit nelze. Dodává, že ani další čtyři platónská tělesa (představující zemi, vodu, vzduch a oheň) není možné srovnávat mezi sebou bez zlatého řezu.*

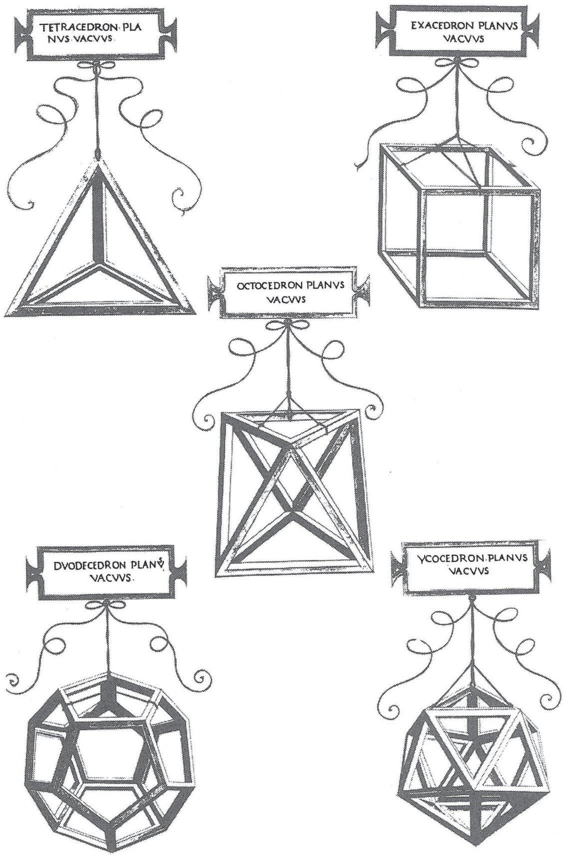
Ve druhém svazku *De divina proportione* pojednává Pacioli o poměrech a jejich využití v architektuře a struktuře lidského těla. Jeho zpracování je založeno na práci římského architekta **Marka Vitruvia Pollia**.[21] Vitruvius napsal [22]:

> *Příroda totiž vytvořila lidské tělo tak, že obličej od brady k hornímu konci čela k začátku vlasových kořínků měří $\frac{1}{10}$ těla a stejně tolik i natažená dlaň od kloubu v zápěstí ke konečku prostředního prstu...*
>
> *Přirozeným středem lidského těla je pupek. Položí-li se totiž člověk naznak s roztaženýma rukama i nohama a umístí-li se střed kružítka na jeho pupek, bude se čára opsané kružnice dotýkat prstů obou rukou i nohou. Stejně tak jako se podává na lidském těle obrazec kružnice, právě tak lze na něm zjistit i obrazec čtverce...*
>
> *Vytvořila-li tedy příroda lidské tělo tak, aby proporce jeho částí zachovávaly daný poměr k jeho celkovému útvaru, je zřejmé, že předchůdci důvodně zavedli, aby se i při stavebních výtvorech zachovával přesný rozměrový soulad jejich jednotlivých částí v poměru ke vzhledu celkového útvaru...*

[20] Daná úsečka a její dvě části vzniklé po rozdělení zlatým řezem.

[21] Marcus Vitruvius Pollio (1. st. př. n. l.) byl široce vzdělaný římský architekt. Ve svém díle *De architectura libri decem* (*Deset knih o architektuře*) se zabývá architekturou, stavebním inženýrstvím, gnómonikou, naukou o sestrojování přístrojů na měření času a naukou o sestrojování strojů na zdvihání pevných těles a vody, výběrem místa a dispozicí staveb, naukou o stavebních materiálech atd. Podle něj je estetika architektury založena na číselných vztazích odvozených z proporcí lidského těla [22].

Na základě těchto slov vytvořil **Leonardo da Vinci**[22] kresbu *Vitruviánského muže*, někdy též zvanou *Vitruviánský člověk* (obr. III v příloze B).

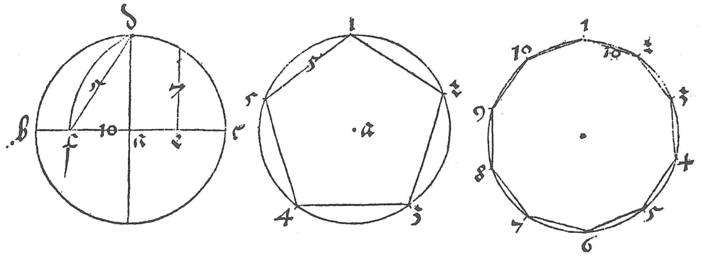



Obrázek 5.13: Ilustrace knihy *De divina proportione*

V mnoha pracích o zlatém řezu je možné se dočíst, že podle Pacioliho určuje zlatý řez poměry ve všech uměleckých dílech. Pacioli ale obhajuje spíše vitruviánský systém založený na jednoduchých racionálních poměrech [16]. Pravdou však je, že Vitruviovy poměry jsou občas blízké zlatému číslu. Jedná se totiž často o poměry typu $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{8}{5}$, čili o podíly sousedních členů Fibonacciho posloupnosti (viz podkapitola 1.4).

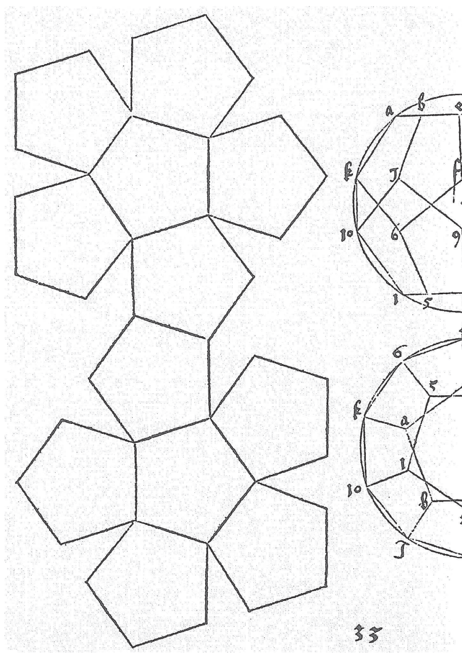
Zajímavé ilustrace knihy *De divina proportione* vytvořil rovněž Leonardo da Vinci. Jeho originální kresby mnohostěnů (obr. 5.13) inspirovaly mnohé další umělce.

[22]Leonardo da Vinci (15. 4. 1452–2. 5. 1519), významný renesanční malíř, sochař, vynálezce, ale i architekt, přírodovědec aj.



Obrázek 5.14: Pravidelný pětiúhelník a desetiúhelník

Dalším významným renesančním umělcem a matematikem v jedné osobě byl **Albrecht Dürer**.[23] Dürer byl přesvědčen, že matematika je významnou složkou umění. Pobýval v Itálii, kde se seznámil s dílem Lucy Pacioliho. Zajímala ho geometrie, zkoumal lidský pohyb a poměry délek částí lidského těla.



Obrázek 5.15: Pravidelný dvanáctistěn a jeho síť

Ve své knize *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (*Pojednání o měření s kružítkem a pravítkem*), Norimberk 1525, klade důraz

[23]Albrecht Dürer (∗ 21. 5. 1471, † 6. 4. 1528), německý malíř a grafik, jeden z nejvýznamnějších představitelů renesančního umění.

na to, že výtvarník má znát geometrii. Se zlatým řezem z této knihy souvisí zejména popis konstrukce logaritmické spirály, přesné i přibližné konstrukce mnohoúhelníků (včetně pětiúhelníku a desetiúhelníku - obr. 5.14) a Platónova tělesa, u kterých (stejně jako u mnoha dalších těles) rozkreslil jako jeden z prvních autorů sítě (obr. 5.15), z nichž se tato tělesa dají složit [16]. Další Dürerovou významnou prací je kniha *Vier Bücher von menschlicher Proportion* (*Čtyři knihy o lidských proporcích*), Norimberk, 1528.

## 5.5 Zlatý řez v novověku

Od přelomu 15. a 16. století se zlatý řez objevuje v pracích mnoha autorů, většinou ale jako přepracování starších výsledků. Například **Rafael Bombelli**[24] ve své knize *Algebra* řeší úlohy související se zlatým řezem nebo popisuje Hérónovu konstrukci rozdělení usečky zlatým řezem či Ptolemaiovu konstrukci nalezení strany pravidelného pětiúhelníku. Rovněž se zabývá pravidelnými mnohostěny. Zlatý řez ve svých pracích použili i **Petrus Ramus**[25] nebo **Simon Stevin**[26] [8].

Jak už jsem se zmínila v první kapitole, se zlatým řezem pracoval také **Johannes Kepler**.[27] V roce 1597 uvedl Kepler v dopise svému profesoru Michaelu Mästlinovi tuto úlohu [8]:

> *Když nad úsečkou rozdělenou zlatým řezem sestrojíme pravoúhlý trojúhelník tak, že daná úsečka je jeho přeponou a pravý úhel leží kolmo nad dělícím bodem, potom délka kratší odvěsny tohoto trojúhelníku bude rovna délce větší části rozdělené úsečky.*

Keplerův důkaz úlohy(v zájmu srozumitelnosti poupraven):

> Mějme úsečku $AE$ rozdělenou zlatým řezem. Dělícím bodem je bod $F$, přičemž $AF$ je delší část rozdělené úsečky. Sestrojme kolmici k $AE$ v bodě $F$ a polokružnici nad průměrem $AE$. Průsečík $D$ je vrchol pravého úhlu trojúhelníku $AED$. Chceme dokázat, že $|DE| = |AF|$ (obr. 5.16).
>
> Víme, že $\triangle EFD \sim \triangle DFA \sim \triangle ADE$, proto $|AE| : |ED| = |ED| : |EF|$. Protože úsečka $AE$ je bodem $F$ rozdělena ve zlatém řezu, platí navíc $|AE| : |AF| = |AF| : |EF|$. Z posledních dvou vztahů vyplývá, že $|AF| = |ED|$.

S tímto trojúhelníkem pracuje Kepler dále. Dokazuje, že

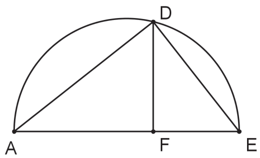
$$|AE| : |AD| = |AD| : |ED|,$$

[24] Rafael Bombelli (1526–1572), italský matematik, věnoval se zejména algebře.

[25] Petrus Ramus (1515–1572), francouzský matematik, filosof a humanista, působil jako profesor rétoriky.

[26] Simon Stevin (1548–1620), belgický matematik, fyzik a vynálezce.

[27] Johannes Kepler (∗ 27. 12. 1571, † 15. 11. 1630), významný německý matematik, astronom a astrolog, část svého života působil také v Praze. Jeho jméno je spojeno především s objevem tří zákonů o pohybu planet.




Obrázek 5.16: Trojúhelník z Keplerovy úlohy

neboli nejdelší strana trojúhelníku k prostřední se má stejně jako prostřední k nejkratší. V tomto příkladu je určitá analogie se zlatým řezem úsečky, jen je definice přenesena na délky stran pravoúhlého trojúhelníku.

Dále Kepler pracoval s Fibonacciho čísly, která patrně objevil nezávisle na Fibonaccim. Právě Keplerovi je připisován objev skutečnosti, že podíly sousedních členů této posloupnosti se blíží zlatému číslu.

Názvy „zlatý řez“ a „zlaté číslo“ se v různých jazycích objevily v literatuře až v 19. století. Vývoj terminologie zlatého řezu podrobně rozebírá například Roger Herz-Fischler v knize [8] na stranách 164–170. V téže době se také objevují teorie proporcí lidského těla založené na zlatém řezu či výzkumy experimentální estetiky, která mimo jiné zjišťovala, jakou roli má zlatý řez v působení na lidskou psychiku. Osob zabývajících se touto problematikou je mnoho, o některých se zmiňuji v dalších kapitolách této práce.