

Matematika v devíti kapitolách

Úvod

In: Jiří Hudeček (author): Matematika v devíti kapitolách. Sbíрка početních metod z doby Han s komentářem Liu Huie z doby Wei a Li Chunfenga a dalších z doby Tang. Překlad, vysvětlivky a úvod. (Czech). Praha: Katedra didaktiky matematiky MFF UK, 2008. pp. 5–23.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/400834>

Terms of use:

© Hudeček, Jiří

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÚVOD

Cílem tohoto krátkého úvodu k vlastnímu překladu je vybavit čtenáře základní orientací v systému čínské matematiky a povědomí o pozici *Matematiky v devíti kapitolách* v ní. Obširnější informace lze získat z publikací v angličtině, francouzštině a ruštině, uvedených v oddílu Literatura, případně z autorovy diplomové práce [Hudeček 2006].

Na úvod poznámku – v celém textu používám pro přepis čínských znaků jejich moderní spisovnou výslovnost ve standardní čínštině (*putonghua*), zapisovanou o cialním čínským fonetickým přepisem *pinyin*. Znaký uvádím standardně v plné formě (tzv. tradiční znaký), pouze v seznamu literatury ponechávám zjednodušené formy, případně jiné transkripce, podle původních názvů a jmen.

Doba vzniku „Devíti kapitol“

Kniha, kterou budeme dále označovat pro stručnost *Devět kapitol*, existovala v průběhu své historie pod několika odlišnými názvy. Nejstarší z nich se objevuje v nápise na úředních mírách a váhách z druhého století našeho letopočtu a zní *Jiu zhang suan shu* 九章算術, doslova „Techniky výpočtů [podle] Devíti článků“. Slovo *zhang*, které v době vzniku textu znamenalo krátký úsek několik vět, později začalo označovat i delší úsek, kapitolu, a dnes se proto ustálil překlad *Devět kapitol*.

Devět kapitol bylo donedávna nejstarší dochované čistě matematické dílo čínské civilizace. Ačkoli dnes díky archeologickým nálezům máme k dispozici i starší soubor „technik výpočtů“ ze 2. století př. n. l. (*Suan shu shu* 算數書 čili *Knihu výpočtů* – viz anglické překlady [Cullen 2004], [Dauben 2007b]), postavení *Devíti kapitol* v historii čínské matematiky je neotřesitelné. Téměř každý čínský matematik až do 20. století se na tuto knihu odkazoval, dokonce i v dobách, kdy byl její text v oběhu jen v několika neúplných kopiích. *Devět kapitol* se v několika ohledech podobá Eukleidovým *Základům* – vznikaly kompilací starších poznatků, sloužily jako vzor matematického textu, inspirovaly významné komentáře a de novaly, co všechno patří do matematiky. Na rozdíl od *Základů* však nemůžeme s jistotou označit autora *Devíti kapitol* ani dobu jejich vzniku.

První a nejdůležitější komentátor *Devíti kapitol*, Liu Hui, popsal vznik textu v předmluvě v roce 263 n. l. takto:

Vývoj z „Devatera počtů“ vede k *Devíti kapitolám*. Když tyranská dynastie Qin spálila knihy, metody této klasické sbírky se poztrácely nebo poškodily. Za dynastie Han pán z Beipingu Zhang Cang a nejvyšší správce zemědělství Geng

Shouchang prosluli svým počtářským uměním. Protože starý text byl velmi porušený, doplnili a opravili ho. Proto když srovnáváme kapitoly dnešního textu, jsou místy odlišné od starého a výklad obsahuje mnoho moderních formulací. (viz *Překlad*, str. 47)

Liu Hui tvrdí, že text vznikl ještě před sjednocením Číny postupným rozšiřováním elementárního „Devatera počtů“, pak byl ztracen a za dynastie Západní Han (202 př. n. l. – 9 n. l.) obnoven. Tato tvrzení však pod tíhou jiných indicií nevypadají příliš věrohodně. Zmiňovaných „Devatero počtů“ je jedno ze „Šesti umění“, předmětů, kterým byli podle jedné pasáže klasické knihy *Zhouské obřady* (*Zhou Li*) vyučováni urození jinoši v době Západní Zhou (cca 1050 – 771 př. n. l.). Potíž je v tom, že *Zhouské obřady* vznikly až několik staletí po zániku původního zhouského systému a nevíme, jestli tato klasická kniha odráží historické znalosti nebo spíš představy svých anonymních autorů. Obsah pojmu „Devatera počtů“ byl navíc s matematikou, jak ji známe z *Devíti kapitol*, výslovně spojen teprve zhruba sto let před vznikem Liu Huiova komentáře.¹

I další části příběhu jsou pochybné. Dynastie Qin (221 – 206 př. n. l.), první ze sledu dynastií čínských císařů, je skutečně známá svou snahou omezit zasahování literátů do státních záležitostí. Jednou z drastičtějších epizod boje Prvního svrchovaného císaře (Qin Shi Huangdi) s kritickými intelektuály mělo být zničení všech knih mimo císařskou knihovnu a mimo vymezené praktické příručky. Alespoň to tvrdí Sima Qian, autor *Zápisků historika*, který bývá ovšem podezříván, že vládu Prvního císaře líčí z pohledu intelektuála, navíc služebníka následující dynastie, příliš jednostranně jako dobu temna. Matematika však i podle Sima Qiana patřila mezi povolené „praktické nauky“, takže přisouzení ztráty *Devíti kapitol* působení Prvního císaře je v rozporu s tím, co se o jeho vládě traduje.

Ačkoli jména hanských hodnostářů, která Liu Hui zmiňuje, jsou známa z kronik, tyto kroniky neříkají nic o tom, že by dotyční hodnostáři redigovali nebo napsali nějaké texty. Zhang Cang 張蒼 (kolem 230–125 př. n. l.) působil již na dvoře dynastie Qin, za dynastie Západní Han byl prvním ministrem v letech 176–162 př. n. l. Byl také pověřen vedením statistik a stanovením kalendáře, měř a vah. Geng Shouchang 耿壽昌, činný 84–45 př. n. l., dosáhl hodnosti nejvyššího správce hospodářství a vynikal v matematice, astronomii i navrhování staveb. Dodejme, že kroniky z doby Han ani žádný text jména podobného *Devíti kapitolám* neuvádějí.

Kriticky vzato Liu Hui neposkytuje důvěryhodnou oporu pro svá tvrzení, kladoucí vznik a konečnou redakci *Devíti kapitol* do doby více než 300 let před vznikem jeho vlastního komentáře. Na to poukázal již významný literát Dai Zhen (1724–1777), který v 70. letech 18. století připravil několik edic *Devíti kapitol*. Dai Zhen odmítl Liu Huiovu verzi především na základě faktu, že v textu *Devíti kapitol* jsou zmíněny hanské reálie, například hlavní město

¹ Viz též pozn. 10 k Liu Huiově předmluvě.

Chang'an nebo císařská obora Shanglin, text tedy nemohl vzniknout dříve než za dynastie Han.

Ve 20. století bylo zformulováno velké množství hypotéz ohledně místa, času i původce národní redakce *Devíti kapitol*. Podle nedávno zesnulého historika čínské matematiky Li Diho (1923–2006) je třeba vidět vznik *Devíti kapitol* jako postupný proces sbírání bambusových proužků s řešením praktických úloh z administrativní praxe, podobných, jaké tvoří archeologicky nalezený text *Suan shu shu*. Proto některé části *Devíti kapitol* odrážejí předhanské reálie a část matematických termínů se objevuje již v předhanských textech. Li Di se domníval, že na redakci matematických proužků se podíleli všichni významnější dvorští hodnostáři, které známe a kteří se zabývali nancemi, nejen Zhang Cang a Geng Shouchang, ale také například Sang Hongyang (152–80 př. n. l.), který zavedl monopol na železo a sůl.

Dobu vzniku textu s názvem, který známe, můžeme omezit lety 6 př. n. l. a zhruba 80 n. l. Začátek tohoto období tvoří kompilace katalogu císařské knihovny Liu Xiangem a Liu Xinem, konec je spojen s jistým Ma Xuem, který „vynikal ve znalosti ‚Devíti kapitol‘“. Zmíněný katalog, začleněný do kroniky dynastie Západní Han (*Han shu*), obsahuje názvy dvou nedochovaných knih o početních metodách (*Du Zhong suan shu* 杜忠算術 a *Xu Shang suan shu* 許商算術), ale nikoli *Devět kapitol*. Je však pravděpodobné, že druhá z těchto knih, dílo hodnostáře Xu Shanga dlouhé 26 svitků, obsahovala mnoho podobného materiálu jako *Devět kapitol*.

K ustálení podoby *Devíti kapitol* muselo dojít před rokem 263, kdy byl dokončen první známý komentář. Díky tomu, že úzce sleduje a často cituje text, který se mezitím stal „klasikou“, můžeme si být jisti, že jeho autor pracoval v zásadě se stejnou knihou, jaká se dochovala do dnešní doby.

Čínská společnost za dynastie Han

I přes zmíněné nejasnosti ohledně doby vzniku *Devíti kapitol* je nejpravděpodobnější, že většina textu byla vytvořena nebo alespoň významně přetvořena za dynastie Západní Han. I když v textu samotném nenalezneme mnoho odkazů na tuto dobu, měla velký vliv na to, že byla z roztroušených textů nakonec vytvořena jedna sbírka.

Začátek této dynastie (202 př. n. l.) ještě úzce souvisí se vznikem jednotného čínského státu v roce 221 př. n. l. Sjednocení říše předchozí dynastií Qin bylo upevněno vznikem centralizovaného byrokratického aparátu a soustavou podrobných předpisů pro hospodaření s místními zdroji a jejich odvody do centra.² I když skální a podobné výpočty byly nepochybně náplní práce správců a úředníků i dříve, jednotný stát začal mít zvýšený zájem na tom, aby byly prováděny korektně a především jednotně. Nikoli náhodou mají první dvě

² Pečlivost, s níž byly tyto předpisy tvořeny, dokládají zlomky qinských zákonů nalezené při archeologických vykopávkách – viz [Hulsewé 1985].

kapitoly *Devíti kapitol* výrazně preskriptivní, normativní nádech – metody pro výpočet ploch polí a přepočty různých druhů obilí mezi sebou musely být centrálně schváleny a sjednoceny. Protože je bez větších rozdílů nacházíme již v *Knize výpočtů*, jedná se pravděpodobně o odkaz dynastie Qin, možná již předchozích centralizovaných Válčicích států.

Za dlouhé vlády císaře Wu Diho (140–87 př. n. l.) došlo k dalšímu upevnění státního centralismu. Wu Di na jedné straně vytvořil státní monopoly na těžbu soli a výrobu železa nebo státní mincovnictví, na druhou stranu usiloval o vytvoření ideologického systému, který by podpořil císařskou vládu. Z myšlenkového odkazu doby Válčicích států byla vytvořena ortodoxní konfuciánská nauka, ostatní proudy a texty byly zatlačeny do pozadí a jejich vyznavači hráli již vedlejší, i když leckdy důležité role. Pro upevnění tohoto ideologického systému bylo také vytvořeno Nejvyšší učení (*Tai xue* 太學), na němž působili specialisti na jednotlivé klasické knihy a vykládali je ve schválených interpretacích nejnadějnějším adeptům státní služby.

Od této doby tedy existovala na stát napojená úzká vrstva špičkových učenců, kteří se zabývali prací s klasickými textovými soubory, které se dochovaly z dřívějších dob. Působení těchto státních učenců vyústilo v ustálení kanonických verzí „konfuciánských“, ale i řady jiných klasických knih.

Mimo tento ideologický systém, založený na textech, které dnes řadíme mezi konfuciánské, využíval císař mnohé prvky i z jiných tradic.³ Praktické potřeby organizace moci a správy státu si například vynutily využití „legalistických“ přístupů⁴, jako byly logisticko-ekonomické systémy na zmírnění hospodářské nerovnováhy. Jedním z nich byl systém zvaný „Rovnoměrná dodávka“ (*jun shu*). Takto nazvané nařízení existovalo již v době Válčicích států a jeho tehdejší fungování zachycuje 6. kapitola *Devíti kapitol* – vzdálenější okresy odváděly nižší daně, aby bylo dosaženo rovnoměrnosti zátěže lidu. Za Wu Diho získalo toto jméno význam státem organizovaného velkoobchodu s místními výrobky, které se převážely z oblastí, kde byly lacino k dostání, do jiných částí říše, kde je bylo možné draze prodat.

Wu Di pořádal nákladné vojenské expedice do odlehlých částí říše a vedl okázalý život plný pompézních cest a obřadů s velkým doprovodem. Většina

³ „Konfuciánství“ doby Han zahrnovalo především ideu kosmického řádu, který vládce udržuje svou ctností, pečlivým a velkorysým vykonáváním obřadů a dodržováním propracované symboliky. Tato nauka byla ve skutečnosti dosti eklektická, využívala složitých spekulací o korelaci planet, barev, ročních období, částí těla atd. Viz [Fung Yu-lan 1952-3], sv. 2. Samotné schéma vzájemně ostře vymezených „škol“ textů, podle nějž dodnes staročínské myšlení klasi kujeme, přitom vzniklo nejspíše až za Wu Diho vlády a později.

⁴ Jako typický zástupce legalismu se obvykle chápe lozof Han Fei (asi 290–230 př. n. l.), který ve svých dílech vložil teorii ovládnání podřízených odměnami a tresty, zdůrazňoval nadřazenost vládce a jeho zákona všem ostatním autoritám a brojil proti humanismu učenců („konfuciánů“), kteří tím podřívají autoritu vládce. V praxi se legalismus také projevoval důrazem na podrobnou regulaci života důsledně užívanými normami. Legalismus byl uplatňován ve státě Qin a konkrétně mistr Han Fei byl velmi uznáván Prvním císařem a jeho ministrem Li Si'em.

jeho hospodářských opatření byla proto motivována hlavně snahou posílit příjmy státu. Sílící zájem o efektivnější hospodaření byl pravděpodobně důležitým důvodem vzniku matematických textů – již zmíněné Xu Shangovy a Du Zhongovy početní techniky pocházejí z půlstoletí po Wu Diho smrti.

Důležitými rysy doby, kdy pravděpodobně vznikl text *Devíti kapitol*, zejména jeho uspořádání, byly tedy snaha o systematizaci starší tradice okolo jednoho ortodoxního směru, eklektičnost a orientace na praktická zlepšení každodenních činností. Mimo císařský dvůr došlo k velkému rozvoji obchodu, řemesel a také náročnosti hospodářské administrativy, nemáme však přímé doklady o tom, zda se tyto děje odrazily na textu *Devíti kapitol*.

Obsah a forma *Devíti kapitol*

Devět kapitol vytvořilo pro následnou tradici čínské matematiky vzor toho, co je obsahem matematiky (*suan 算*), i toho, jakou formou se o tomto obsahu píše. Obecně jsou obsahem *Devíti kapitol* komplexy číselných úloh a metod jejich řešení. Mezi úlohou a metodou je nerozdělitelné pouto: metoda bez úlohy nemá smysl (mnohdy nelze mimo kontext úlohy ani pochopit význam použitých termínů), úloha bez metody nemá opodstatnění. *Devět kapitol* totiž není sbírka řešených příkladů, s jakými se setkáváme ve škole my. Je to sbírka metod řešících určité typy úloh. Úloha ilustruje metodu řešení, je to vlastně implicitní de nice pojmů, s nimiž metoda operuje.

Dlouhodobý dopad mělo i vymezení konkrétního obsahu matematiky na 9 oddílů (Tab. 1).

Tab. 1 – Rozdělení matematiky do devíti kapitol

Kapitola	Obsah
PRAVOÚHLÁ POLE	Výměry útvarů, zlomkové operace
OBILÍ A ZRNO	Trojčlenka, konverze
ODSTUPŇOVANÉ ROZDĚLENÍ	Dělení celku do podílů, trojčlenka
MENŠÍ ŠÍŘKA	Dělení obsahů součtem zlomků, odmocniny
POSOUZENÍ PRACÍ	Objemy těles a výpočty práce podle norem
ROVNOMĚRNÁ DODÁVKA	Podíly podle dvou kritérií, násobná trojčlenka
PŘEBYTEK A NEDOSTATEK	Chybný odhad a dvojí chybný odhad
PARALELNÍ OHODNOCENÍ	Soustavy lineárních rovnic
KRATŠÍ A DELŠÍ ODVĚSNA	„Pythagorova“ věta a pravoúhlý trojúhelník

I když další vývoj stavěl čínské matematiky před nové typy úloh, které do tohoto dělení nezapadaly, pokusy vrátit se k obsahovému dělení *Devíti kapitol* trvaly až do konce 16. století, kdy první styky se západní matematikou tento omezující rámec de nitivně rozbily. Zásadní význam pro tuto setrvačnost mělo

přesvědčení, které cítíme již z Liu Huiovy předmluvy, že takto matematiku rozdělili velcí mudrci, zakladatelé civilizace. Životaschopnost obsahového dělení *Devíti kapitol* však netkví jen v tradicionalismu čínských matematiků: nelze popřít, že vyčerpávalo prakticky všechny oblasti aritmetiky a lineární algebry, které byly pro řešení praktických problémů potřeba. Srovnáme-li *Devět kapitol* s kteroukoli raně novověkou evropskou učebnicí aritmetiky, zjistíme zarážející styčné body – zlomkové operace, trojčlenka a převody jednotek, odstupňované rozdělení (v evropských učebnicích většinou zvané „společensví“), druhá a třetí odmocnina, dvojitá trojčlenka a metoda falešných odhadů tvořily i v Evropě 16.–18. století základ praktické matematiky.

Devět kapitol vytvořilo i formální vzor pro budoucí matematiky, jak o matematice psát. O využití úloh a metod jsem se již zmínil; druhou stránkou formy je styl a jazyk. Čínské matematické texty, založené na *Devíti kapitolách*, jsou psány přísně neosobně, nečasově a autonomně. *Devět kapitol* nikdy na nic a na nikoho neodkazuje, necituje, nepoužívá žádné rétorické ani stylové gury, modální slovesa ani částice. Tento stav má pravděpodobně speciální historické důvody, například kompilaci z mnoha různých zdrojů nebo vlivy odborného stylu nematematických děl ze stejné doby. Ve výsledku však podporuje autoritu sdělení tím, že ho zbavuje jakýchkoliv vazeb na lokalitu, čas nebo konkrétní osoby, a tímto zjevně velmi imponoval generacím čínských matematiků, kteří ho přijímali pro svá díla.

Manipulace s čísly

Čínská matematika měla sice svou teorii, ale v jádru nebyla založená na jazyku, na argumentaci – jejím základem byly manipulace s reprezentacemi čísel a velikostí. V době vzniku *Devíti kapitol* a dlouho poté (minimálně do 15. století) byly základní reprezentací čísel shluky početních tyčinek. Z *Devíti kapitol* se toto výslovně nedozvíme, avšak používání početních tyčinek dokládá již text *Laozi* neboli *Dao de jing*, patrně ze 3. století př. n. l., kde čteme v oddíle 27: „Kdo výborně počítá, nepoužívá (=nepotřebuje) početní tyčinky“. Byly také učiněny archeologické nálezy skutečných tyčinek, nejstarší ze 3. století př. n. l. (40 bambusových tyčinek z Changsha), některé kostěné, ze slonoviny a dokonce i ze železa.

Počítání pomocí fyzických žetonů bylo běžné i v jiných civilizacích, například ve starém Řecku. Speciální čínská forma těchto žetonů – tyčinka – patrně souvisí s věštebními praktikami *Knihy proměn*, které byly založeny na manipulaci se sušenými stonky trávy standardní velikosti. Způsob zápisu čísel tyčinkami poprvé popisují až texty, které jsou nejspíš o sto až dvě stě let mladší než nejstarší komentář k *Devíti kapitolám* – *Matematická klasika Mistra Suna* (*Sunzi suan jing*) a *Zhang Qiujianova matematická klasika* (*Zhang Qiujian suan jing*) – a není tedy vyloučeno, že ve starších dobách nebyl standardizován. Připomeňme, že o tyčinkách nenacházíme nic ani v „Knize výpočtů“, která jinak obsahuje i elementární techniky, například násobilku. Pro porozumění

Devíti kapitolám a jejím komentářům ostatně není konkrétní forma zápisu čísel tyčinkami důležitá, podstatný je hlavně samotný fakt, že čísla se „pokládala“, nikoli psala. Přesto je vhodné se seznámit s reprezentací čísel, popsanou v *Sunzi suan jing*, minimálně proto, že byla víceméně stabilní po dalších zhruba tisíc let.

Podle této knihy se tyčinkami vyjadřují číslice od 1 do 9, a to ve dvou střídaných soustavách:

Tab. 2 – Zápis číslic početními tyčinkami

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
liché řády (1, 100, ...)						┌	┌┌	┌┌┌	┌┌┌┌
sudé řády (10, 1000, ...)	—	=	≡	≡≡	≡≡≡	└	└└	└└└	└└└└

Čísla byla zobrazována v poziční desítkové soustavě. Všimněme si zkrácení prvních 5 tyčinek do jedné příčné – to nápadně připomíná nejen pozdější čínské kuličkové počítadlo, ale zejména abakus a početní desky, jak byly používány ve starověku a středověku na Západě. Důvodem této příbuznosti je pravděpodobně univerzální lidská vlastnost, že schopnost počítat předměty na první pohled (subitizace) zhruba končí u pěti – větší množství je třeba počítat kus po kuse.

Manipulace se žetony-tyčinkami při výpočtech je velmi přímočará a především na rozdíl od psaných výpočtů umožňuje opravovat výsledky průběžně, takže všechny operace je možné provádět od vyšších řádů směrem k nižším. Řády se zapisovaly zleva doprava, alespoň soudě dle nejstaršího známého zápisu čísel napodobujícího shluky tyčinek z dynastie Tang (618–906). Připomeňme v této souvislosti, že převažující směr čínského písma je shora dolů ve sloupcích zprava doleva, i když na nejstarších písemných památkách se psalo různými směry a jednotlivé znaky se obvykle píšou zleva doprava.

Z textu *Devíti kapitol* vyplývá, že se tyčinkové číslice „pokládaly“, není však zřejmé, na co přesně. Někteří autoři, například J. Needham, předpokládali existenci jakési standardní početní desky šachovnicovitě rozdělené do políček pro různé řády a různé operandy, však pro tuto představu není vůbec žádná opora v celé historii čínské matematiky. Vzhledem k tomu, že počtář potřeboval především velkou univerzálnost a hodně prostoru (nejstarší známé tyčinky jsou dlouhé 14 cm, během historického vývoje se zkrátily asi na 9 cm), není ani pravděpodobné, že by nějaká konkrétní podoba a velikost takové desky vyhovovala všem jeho potřebám. Čísla byla rozkládána v určitých konvenčních relativních pozicích. Například při dělení byl obsah uprostřed, dělitel dole a výsledek nahoře, ale smíšená čísla mohla být vyjádřena také jinak (čitatel vlevo dole, celá část uprostřed nahoře, jmenovatel vpravo dole). Nejstarší prameny, pokud z nich lze o pozici čísel na „početní desce“ něco vyčíst, nejsou zcela konzistentní.

Kanonické komentáře

Devět kapitol bylo v roce 656 začleněno do souboru *Deseti matematických klasik*, které tvořily předepsané učivo nově zřízeného matematického oboru císařské univerzity. Verze, která byla pro výuku přijata, obsahovala dva komentáře, které budeme označovat jako „kanonické“. Ačkoli víme o celé řadě dalších komentářů, které byly do té doby k textu připsány, pouze tyto dva se zachovaly do dnešní doby. Byly do klasického textu vloženy po jednotlivých větách a odstavcích, jak to u tohoto druhu komentářů bylo v čínské písemné tradici zvykem.

První z nich napsal v roce 263 Liu Hui 劉徽 ze státu Wei (jedna ze Tří říší, na něž se Čína rozpadla na konci 2. století). O datu vzniku Liu Huiova komentáře se dozvídáme od druhého komentátora, Li Chunfenga 李淳風 (604–672), v *Kronice dynastie Sui* (*Sui shu*). Je to v podstatě jediná informace, kterou o Liu Huiovi máme. Původně zařadil do *Matematiky v devíti kapitolách* jako desátou kapitolu „Dvojí rozdíl“, o kterém mluví ve své předmluvě, ten však dnes existuje jako samostatný text *Matematická klasika mořského ostrova* (*Hai dao suanjing*). V Li Chunfengově době ještě existovaly také Liu Huiovy *Obrázky k „Devíti kapitolám“* a *„Dvojímu rozdílu“*, které však byly záhy nato ztraceny. Pouze se domníváme, že Liu Hui byl asi státní úředník či spíše státní učenec, který měl přístup do císařské knihovny a archivu (zmiňuje svá měření o ciálních etalonů dutých měř).

Liu Huiův komentář je cenný ve třech ohledech: zaprvé pomáhá pochopit velmi sevřené a heslovité části klasického textu, dále teoreticky analyzuje strukturu matematických metod, a navíc prezentuje výsledky vlastního bádání. Tyto tři ohledy se v jednotlivých glosách částečně prolínají, ale v zásadě je lze od sebe dobře odlišit.

Přímé vysvětlivky významu klasického textu jsou relativně nejjasnější a nejméně problematická část Liu Huiova komentáře. Můžeme se přít o to, jestli jsou založeny na autentické tradici výkladu *Devíti kapitol* nebo jen na Liu Huiově intuici (i tak by vhodně korigovaly intuici pozdějších komentátorů, což teprve naši dnešní), můžeme je odmítnout jako irelevantní a pokusit se číst a pochopit klasický text bez Liu Huiovy nápovědy, ale ve většině případů zjistíme, že Liu Huiův výklad je to nejsmysluplnější, čeho se můžeme dobrat. Některé z těchto vysvětlivek jsou však založeny na zavedení teoretických pojmů, které původní text nezná, nebo názorných modelů (tomu Liu Hui říká, „že se vnitřní struktura rozebere slovy a útvary rozkládají pomocí obrázků“).

Teorii, kterou Liu Hui takto konstruuje, již s úmysly autorů klasického textu ztotožňovat nemůžeme, i když si Liu Hui někdy myslí, že ji odhalil v textu, nikoli sám vytvořil. Považoval *Devět kapitol* za dílo mudrce dávnověku, Vévody z Zhou. Jeho předmluva a komentář vyjadřují přesvědčení, že nalezl skrytý jednotící vzorec, podle něhož je klasická kniha uspořádána. Liu Huiovy pojmy jsou však buď zcela nové, nezávislé na *Devíti kapitolách*, nebo mají výrazně bohatší a obecnější obsah než jejich předobraz. Liu Hui také bez

zvláštního výkladu používá některé postupy ověřování metod klasického textu, které také spadají do kategorie jeho tvůrčího rozvinutí. Na několika místech se komentátor pouští do úvah o vlastnostech čísel, objektů a struktur, v nichž se už nezastřené objevuje jeho vlastní tvorba.

Právě tato třetí část je nejsložitější a nejvolněji svázaná s klasickým textem. Komentáře tohoto typu mají většinou charakter uceleného pojednání, které je mnohem delší než komentovaná metoda, a často i opouštějí původní zadání úlohy. Liu Hui neměl ke klasickému textu zcela nábožnou úctu, jak vyplývá z jeho nemilosrdných poznámek „tato metoda neplatí“ nebo „tato myšlenka je nesprávná“. Liu Huiovy matematické inovace zahrnují metodu postupného přibližování, kterou použil například pro aproximaci π a iracionálních kořenů odmocniny, metodu třírozměrných modelů, kterou ověřil nebo vyvrátil většinu metod výpočtu objemů těles, a alternativní metodu výpočtu rozsáhlých soustav lineárních rovnic.

Liu Huiův komentář – zejména v těchto komplikovaných originálních částech – byl během staletí velmi porušen. Jeho dnešní interpolované a emendované znění je mnohdy přes veškerou snahu nesrozumitelné. Vzniká tak paradoxní, i když v klasické čínské literatuře ne zcela ojedinělá situace, kdy porozumění komentáři je místy obtížnější než porozumění staršímu klasickému textu. I přesto je komentář vodítkem ke klasickému textu – právě protože je strati kován a obtíže s porozuměním nejvíce zasahují tu vrstvu, která je nejméně svázaná s komentovaným textem.

Autor druhého kanonického komentáře, Li Chunfeng, je proti Liu Huiovi postava dobře známá. Pocházel z dnešního Fengxiangu v provincii Shaanxi, jeho otec byl úředník, který se kvůli kariérním problémům vzdal služby a věnoval se taoismu. Li Chunfeng se narodil v roce 604, již v roce 624 se dostal ke dvoru dynastie Tang (618–906) díky fundované kritice tehdejšího kalendáře. Dále pracoval jako astronom a historik.

Jeho komentář k „Deseti klasickým matematickým knihám“ vznikl v přímé souvislosti s výběrem těchto knih mezi učební materiály pro matematický obor císařské koleje (*Guo zi jian*). Nepsal jej sám, ale jako vedoucí kolektivitu, do kterého patřili také profesor (*boshi*) matematiky císařské koleje Liang Shu 梁述 a lektor (*zhujiao*) Nejvyššího učení Wang Zhenru 王真儒. Komentáře byly hotové před rokem 656. Li Chunfeng zastával vysoké úřady až do své smrti v roce 672. Kromě jeho komentářů k *Deseti klasickým matematickým knihám* se dochovala ještě další díla – kalendář, věštebně-přírodovědná příručka a zápisy o kulturních památkách.

Li Chunfeng a jeho spolupracovníci byli zřejmě dokonale vzděláni v matematické literatuře, která byla v jejich době dostupná (bibliografická kapitola kroniky *Sui Shu*, která zachycuje stav, jaký zažili, obsahuje více než 10 knih o *Devíti kapitolách*). Odrazilo se to i v jejich komentáři, kde využívají poznatků z doby po Liu Huiovi, zejména citují dnes již ztracená díla otce a syna Zu Chongzhi'a (429–500) a Zu Genga (?). Mnoho dalších nedochovaných komentářů od významných autorů jako byli Zhen Luan 甄鸞 (6. st.) nebo Xu Yue 徐岳 však zřejmě také jejich práci ovlivnilo.

Li Chunfengův komentář má pro porozumění klasickému textu mnohem menší význam než komentář Liu Huiův. Doplňuje občas glosy zjevně inspirované analogickými Liu Huiovými komentáři u metod, kde to Liu Hui nepovažoval za potřebné, dále shrnuje některé Liu Huiovy komentáře rozložené do příliš mnoha glos a v několika případech Liu Hui koriguje (většinou chybně). Jedinou samostatnou matematickou úvahou v Li Chunfengově komentáři je doplněk k metodě výpočtu plochy kruhu a dále odvození objemu koule, které však pochází od Zu Genga.

Další vývoj tradice *Devíti kapitol*

V roce 1084 bylo *Devět kapitol* vydáno císařskou tiskárnou (*mi shu sheng* 秘書省) v rámci dalšího pokusu začlenit matematiku do systému vzdělávání státních úředníků (předchází na začátku dynastie Tang byl spojen se vznikem Li Chunfengova komentáře). Tento pokus souvisel s rozsáhlými reformami císaře Shenzonga (1068–1086) a po jeho smrti byl spolu s ostatními opatřeními odvolán. Vydání textu inspirovalo vznik dalších matematických děl. Na rozdíl od starších komentářů tyto nové knihy šly cestou rozvoje vlastních metod k řešení starých úloh, jako například ztracená Jia Xianova 賈憲 (11. st.) *Podrobná řešení Klasické matematické knihy Devíti kapitol Žlutého císaře* (*Huang Di Jiu zhang suan jing xi cao* 皇帝九章算經細草) nebo její další přepsání a rozvinutí Yang Huiem 楊輝, *Detailní rozbor Matematických metod Devíti kapitol* (*Xiang jie Jiu zhang suan fa* 詳解九章算法, 1261).

Devět kapitol s oběma komentáři znovu vydal literát se zájmem o matematiku Bao Huanzhi v roce 1213–1214 (někdy se uvádí také rok 1200, kdy podle své předmluvy našel výtisk knihy u kolegy Yang Zhongfua) v Hangzhou, hlavním městě dynastie Jižní Song (1127–1279). Sever Číny, včetně bývalého hlavního města Kaifengu a tamní císařské knihovny, byl v té době ovládnán džurčenskou dynastií Jin a původní vydání *Devíti kapitol* bylo tím pádem nedostupné. Prvních 5 kapitol Bao Huanzhi'ova tisku je dodnes uloženo v Šanghajské knihovně a jsou tak nejstarší dochovanou tištěnou matematickou knihou na světě.

Celý text známe jen díky tomu, že *Devět kapitol* bylo za následující dynastie Ming začleněno do jednotlivých hesel Encyklopedie éry Yongle (1406). Odtamtud si jej na konci 18. století vypsál již zmíněný Dai Zhen. Jeho výpisky byly poměrně nepozorné, což je o to mrzutější, že většina rukopisné Encyklopedie byla na konci 19. století zničena britsko-francouzskými vojsky. Jeho výpisky, přenesené s dalšími přiznanými i nepřiznanými zásahy do několika rukopisných i tištěných edic, na kterých se Dai Zhen podílel, jsou dnes proto základním textem pro poslední 4 kapitoly i Liu Huiovu předmluvu.

I přes zahrnutí do Encyklopedie éry Yongle se *Devět kapitol* za dynastie Ming (1368–1644) velmi rychle ztratilo z oběhu. Čínská matematika v této době prošla natolik hlubokou proměnou (především díky všeobecnému rozšíření kuličkového počítadla), že tradice zachycená v *Devíti kapitolách* přestala

být plně srozumitelná i pro největší matematiky, jako byl např. Wu Jing, autor díla *Kompendium ilustrativních příkladů k matematickým metodám „Devíti kapitol“* (*Jiu zhang suan fa bilei da quan* 九章算法比類大全, 1450). I přesto, že na *Devět kapitol* odkazuje názvem i členěním své knihy, jak přiznává, originální text *Devíti kapitol* nalezl jen po velkém úsilí a kromě prvních tří jednoduchých kapitol mu klasika připadala nejasná, zejména protože neobsahovala číselná řešení.

Obnovený zájem o *Devět kapitol* zahájila až Dai Zhenova rekonstrukce textu, původně určená pro vůbec největší čínskou encyklopedii, *Kompletní knihovnu čtyř oddílů* (*Si ku quan shu*, celkem přes 79 000 svazků). Mezitím prošla čínská matematika další zásadní proměnou, totiž vstřebáním části západní matematiky, s níž čínské dvorské matematiky seznámili jezuitští misiónáři, například Matteo Ricci (1552–1617), mezi lety 1600 a 1770. Dai Zhen také díky své znalosti západní geometrie a algebry a díky tomu, že tato nová, psaná tradice vysvobodila čínské matematiky z omezení daných používáním počítadla, rozuměl staré knize mnohem lépe než jeho předchůdci za dynastie Ming. Po vydání *Kompletních knih* (v sedmi rukopisných exemplářích a edici tištěné pohyblivými typy), která byla určena primárně pro potřeby císaře, připravil v letech 1776–1777 spolu s nakladateli a logy Qu Zengfaem a Kong Jihanem další dvě komerční vydání.⁵ Od té doby *Devět kapitol* vycházelo v dalších a dalších edicích a řada čínských matematiků pracovala na vyřešení mnoha nejasností, které tento text skrývá.

Přehled vývoje staré čínské matematiky

Na závěr tohoto historického úvodu jsem se rozhodl zařadit chronologii čínské matematiky zhruba do roku 1600 (příchod jezuitů) podle nejnovějších poznatků čínských i západních historiků. Mnoho českých zájemců o historii čínské matematiky má k dispozici stále jen dosti zastaralá díla, jako jsou [Needham & Wang Ling 1959] a [Li Yan & Du Shiran 1987] (to je pouze překlad [Li Yan & Du Shiran 1963-4]). Od té doby se poznání zejména staré čínské matematiky výrazně rozšířilo a zpřesnilo. Tento přehled je založen zejména na [Wu Wen-Tsun & Li Di 1998a], [Wu Wen-Tsun & Shen Kangshen 1998], [Wu Wen-Tsun & Li Di 1998b], [Wu Wen-Tsun & Shen Kangshen 1999] a [Wu Wen-Tsun & Shen Kangshen 2000]. Přehledné informace v angličtině je možné získat v [Martzloff 1997], [Shen Kangshen, *et al.* 1999] a [Dauben 2007a].

⁵ Zde prezentovaná historie textu vychází z díla největšího znalce vývoje textu *Devíti kapitol* Guo Shuchuna – viz [Chemla & Guo Shuchun 2004] a [Guo Shuchun 2004b].

Tab. 3 – Chronologie čínské matematiky do dynastie Tang

Datum	Období/událost Details
pozdní neolit 5.–3. tis. př. n. l.	Značky na keramice a kostech (Liuwan, Banpo) Vroubky na kostech a ryté značky podobné některým pozdějším číslicím.
13.–11. st. př. n. l.	Věšebné nápisy (<i>jiaguwen</i>) dyn. Shang Přir. čísla zapsaná číslicemi příbuznými s dnešními. Tabulky jednoduchých posloupností. Nejvyšší číslo: 40 000. Zlomky nedoloženy.
11.–8. st. př. n. l.	Nápisy na bronzích dyn. Zhou Čísla zapisovaná podobně jako za dyn. Shang, přesná velká čísla („13 081 zajatců“), vznik o c. měř a vah, věšebná numerologie, kalendář.
770–476 př. n. l. 475–221 př. n. l.	Doba „Letopisů“ (<i>Chunqiu</i>) Doba Válčících států Výuka počítání („Devatero počtů“), ražení mincí, vznik byrokratické vrstvy, numerologie <i>Knihy proměn</i> , náběhy k logice a axiomatické geometrii ve škole pozdních mohistů, aplikace číselných poměrů v řemeslech (<i>Kao gong ji</i>), zeměměřičství, kružidlo a úhelník.
kolem 300 př. n. l.	Aritmetický výpočet zapsaný v „Knize o zákonech“ (<i>Fa jing</i>) Výpočet rozpočtu rodiny podle výměry (100) a výnosnosti (1 1/2) pole, míry zdanění (1/10), počtu členů (5) a měsíční spotřeby na jednoho člena (1 1/2), ceny obilí (30) a peněžních vydání na oběti (300) a na šaty (300 na osobu) = nedostatek 450 měďáků ročně. Zápis obsahuje všechny mezivýsledky.
3. století př. n. l.	Vznik textu <i>Laozi</i> Doloženo používání početních tyčinek.
213 př. n. l.	Pálení knih Prvního Svrchovaného císaře (221–210 př.n.l.) Liu Hui tvrdí, že jím bylo poškozeno <i>Devět kapitol</i> .
202 př. n. l. – 9 n. l.	Dynastie Západní Han Rozvoj řemesel a státem organizované výroby, zavražovacíh staveb, statistiky a daňových výpočtů; kalendář <i>Santong Li</i> používá neurčitou analýzu pro určení společného počátku solárního a lunárního cyklu (<i>shangyuan</i>).
zač. 2. st. př. n. l.	Nejstarší archeologicky doložený „magický čtverec“ (naleziště Shuanggudui) Čtvercový stolek s kruhem uprostřed, na jehož okraji je 8 čísel v pořadí jako na „magickém čtverci“ 3 x 3.

před 186 př. n. l.	Uložení <i>Knihy výpočtů</i> do hrobky v Zhangjiashanu <i>Kniha výpočtů</i> (<i>Suan shu shu</i>) je nejstarší známý čínský matematický text, obsahuje některé názvy a metody totožné s <i>Devíti kapitoly</i> , ale celkově není stejná; neobsahuje výpočty odmocnin, soustav rovnic a stran pravouhlého trojúhelníka.
176–125 př. n. l.	Zhang Cang 張蒼 Činný na dvoře dyn. Západní Han (202 př.n.l. – 9 n.l.), Liu Hui tvrdí, že se podílel na redakci <i>Devíti kapitol</i> .
1. st. př. n. l.	Vznik <i>Matematické klasiky zhouského gnómonu</i> (<i>Zhou bi suanjing</i> 周髀算經) Kosmologická kniha s řadou numerických výpočtů (zlomky, znalost pythagorejské trojice $3^2 + 4^2 = 5^2$) a dialogem Mistra Chena s Rong Fangem o síle početních metod; jedna z <i>Deseti matematických klasik</i> .
1. st. př. n. l. – 1. st. n. l.	Vznik <i>Devíti kapitol</i> pod současným názvem Pravděpodobnější je pozdější vznik vzhledem k absenci knihy v katalogu <i>Qilüe</i> z konce 1. st. př.n.l.
9–23 n. l.	Liu Xin 劉信 používá $\pi \approx 3,1547$ Tato hodnota vyplývá ze zápisu rozměrů standardní duté míry.
kolem 80	Ma Xu 馬須, znalec <i>Devíti kapitol</i> Nejstarší spojení historicky doložené osoby s textem <i>Devíti kapitol</i> v o. ciální kronice („Zápisy Pozdějších Han“ – <i>Hou Han shu</i>).
78–139	Zhang Heng 張衡, politik a astronom Podle Liu Huiova komentáře napsal „Zhang Hengovy počty“, kde uvádí poměr objemu opsané a vepsané koule 26:5 a poměr obsahu čtverce k obsahu kruhu $\sqrt{8/5}$ (tj. $\pi \approx \sqrt{10}$), pozdější zdroje mu také přisuzují aproximaci $\pi \approx 92/29$.
179	Předpis pro používání měř a vah podle <i>Devíti kapitol</i> Nařízení zapsané na bronzové desce, jejíž frotáž se dochovala.
2. pol. 2. st.	Liu Hong 劉洪, autor kalendáře <i>Qian xiang li</i> Údajně také napsal nedochované dílo nazvané <i>Matematika v devíti kapitolách</i> ; jeho kalendář obsahoval lineární interpolace prvního řádu pro pohyb Měsíce.
2. – 3. st.	Xu Yue 徐岳, Liu Hongův žák Prameny z dynastie Tang mu připisují řadu různých redakcí <i>Devíti kapitol</i> , někdy též uváděn jako autor <i>Záznamu zachovaných početních technik</i> (<i>Shu shu ji yi</i>), jichž většina však pochází až z 6. st. (viz níže „Zhen Luan“).
220–581	Rozpad Číny – období Tří říší, dynastie Záp. a Vých. Jin, Šesti (jižich) dynastií a Šestnácti (severních) států Vznik či ustálení většiny z <i>Deseti matematických klasik</i> , četné komentáře k <i>Devíti kapitolám</i> , rozvoj astronomie, rozšíření buddhismu.

asi pol. 3. st.	Zhao Shuangŭv 趙爽 komentář k <i>Zhou bi suan jing</i> Podrobná analýza vztahů mezi odvěsnami a přeponou, včetně barevných diagramů; odvození měření vzdálenosti Slunce metodou dvojího rozdílu pomocí principu „to, co vychází, doplní to, co vchází“ (viz <i>Překlad</i> , str. 49).
263	Liu Hui 劉徽 píše komentář k <i>Devíti kapitolám</i> Toto datum je zaznamenáno v pozdějších kronikách, sestavených Li Chunfengem.
4. st.	<i>Matematická klasika Mistra Suna (Sunzi suan jing 孫子算經)</i> Datum vzniku není známo, odvozuje se podle několika zmínek v textu. Obsahuje úvod do počítání s tyčinkami, úlohy a metody jednodušší než v <i>Devíti kapitolách</i> , někdy převzaté. Slavná „čínská zbytková úloha“ ($n \equiv 2 \pmod{3}$, $n \equiv 3 \pmod{5}$, $n \equiv 2 \pmod{7}$).
370–447 (jižní Čína)	He Chengtian 何承天, autor metody „ladění dělitele dnů“ (<i>tiao ri fa 調日法</i> , moderní název) Nejlepší zlomková aproximace pozorování podle 2 mezí s různými jmenovateli; podobná metodě N. Chuqueta z 15. století ($a_1/b_1 < x < a_2/b_2 \Rightarrow a_1/b_1 < a_3/b_3 = (a_1+a_2)/(b_1+b_2) < a_2/b_2$, nahradíme jednu z předchozích mezí zlomkem a_3/b_3 a pokračujeme).
pol. 5. st. (asi sev. Čína)	<i>Zhang Qiujianova matematická klasika (Zhang Qiujian suan jing, 張邱建算經)</i> Datum vzniku se také pouze odvozuje. Přidává další úlohy a alternativní metody k <i>Devíti kapitolám</i> , zejména rozvíjí úlohy s posloupnostmi. Obsahuje také neurčitou soustavu rovnic.
konec 5. st. (sev. Čína)	<i>Xia Houyangova matematická klasika (Xia Houyang suan jing, 夏侯陽算經)</i> Většina dnešní verze díla je mnohem pozdější, z původní verze se zachovala patrně předmluva a de nice různých metod dělení. Věnuje se hlavně manipulacím s čísly „pro začátečníky“.
429–500 (jižní Čína)	Zu Chongzhi 祖沖之, vypočetl $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ Napsal také dílo <i>Metoda navazování (Zhui shu)</i> , které bylo zařazeno mezi Deset klasik, ale málokdo mu rozuměl a za dynastie Tang se ztratilo. Pravděpodobně rozvíjel Liu Huiovy metody aproximace.
aktivní 500–530 (jižní Čína)	Zu Geng 祖暅 (též Zu Gengzhi nebo Zu Huanzhi), syn Zu Chongzhi'a Odvození správné metody pro výpočet objemu koule analogií Cavalieriho věty (viz <i>Překlad</i> , str. 119).

aktivní 530–570 (sev. Čína)	<p>Zhen Luan 甄鸞, buddhistický matematik a astronom, autor řady vlastních děl a komentářů ke starším knihám včetně <i>Devíti kapitol</i></p> <p><i>Matematická klasika pěti odborů</i> (<i>Wu cao suan jing</i>, 五曹算經) – příručka jednoduchých nebo jednoduše řešených úloh pro místní úředníky;</p> <p><i>Matematika v Pěti klasikách</i> (<i>Wu jing suan shu</i>, 五經算術) – kompilace citátů z klasických konfuciánských knih zmiňujících čísla nebo výpočty;</p> <p><i>Záznam dochovaných početních technik</i> (<i>Shu shu ji yi</i>, 數術記遺) – kniha silně ovlivněná buddhismem a taoismem, obsahuje zápis velkých čísel a různé lidové metody počítání, včetně rané verze počítadla, psána ve formě dialogu, nedrží se formátu <i>Devíti kapitol</i>;</p> <p>Dále napsal komentář k <i>Zhoubi suanjing</i>, jeho komentář k <i>Devíti kapitolám</i> se nedochoval.</p>
589–618	<p>Dynastie Sui znovu sjednotila Čínu, matematika na císařském vysokém učení (<i>Guo zi si</i>)</p> <p>Matematika měla v systému školy stejné postavení jako kaligrafie, oba obory měly stejný počet učitelů (2 doktory <i>boshi</i> a 2 asistenty <i>zhujiao</i>), matematika měla však dvojnásobný počet studentů (80).</p>

Tab. 4 – Chronologie čínské matematiky od dynastie Tang do roku 1600

Datum	Období/událost Detaily
618–906	<p>Dynastie Tang</p> <p>Zavedení systému státních zkoušek, do něž byla občas zařazena i matematika. Četné kontakty se Střední Asií, překlady indických matematických knih (neměly trvalý vliv). Největší rozšíření buddhismu, rozšíření knihtisku, rozvoj obchodu a růst měst. Přenos čínské kultury a systému státní správy do Koreje a Japonska. Dochované svitky s každodenními počty z Dunhuangu.</p>
asi 580–640	<p>Wang Xiaotong 王孝通, autor <i>Matematické klasiky navazující na dávnověk</i> (<i>Ji gu suan jing</i>, 緝古算經)</p> <p>Byla zařazena mezi Deset klasik, původní název byl <i>Matematika navazující na dávnověk</i> (<i>Ji gu suanshu</i>). Celkem 20 úloh, první je astronomický výpočet, zbytek hledání rozměrů těles o známém objemu – většinou odpovídají rovnicím 3. stupně, které jsou řešeny numericky (nastavením počátečních hodnot při odmocňování). Kniha vznikla kolem roku 630.</p>

656	<p>Li Chunfeng (603–672) sestavuje <i>Deset matematických klasik</i> pro obnovenou výuku matematiky na císařské vysoké škole</p> <p>„Deset klasik“ bylo: <i>Zhou bi suan jing</i>, <i>Jiu zhang suan jing</i>, <i>Hai dao suan jing</i>, <i>Sunzi suan jing</i>, <i>Xiahou Yang suan jing</i> (původní nedochovaná verze), <i>Zhang Qiujian suan jing</i>, <i>Wu cao suan jing</i>, <i>Wu jing suan shu</i>, <i>Zhui shu</i> a <i>Ji gu suanjing</i>. Ve stejném roce vznikly i jeho komentáře, např. také k <i>Devíti kapitolám</i>.</p>
683–727	<p>Mnich Yixing 一行 (os. jm. Zhang Sui 張遂)</p> <p>Odešel do buddhistického kláštera, aby se vyhnul lákání ke dvoru, ale byl nakonec v roce 717 nuceně přesídlen do kláštera v hlavníím městě a musel císaři sloužit. Sestavil na základě vylepšených astronomických pozorování kalendář a tabulku přírůstků délky stínu tyče dané výšky pro sklon slunce od nebeského pólu od 0 do 80° (de facto funkce tangens – předpokládá se indický vliv).</p> <p>Kalendářní výpočty využívaly zpřesňovaných interpolačních technik, založených na metodě <i>Devíti kapitol</i> (7.XIII) (viz <i>Překlad</i>, str. 182).</p>
762–779	<p>Vznik většiny dnešního textu <i>Xiahou Yangovy matematické klasiky</i></p> <p>Tato část byla pravděpodobně napsána Han Yanem 韓延. Zabývá se měřením a daněním polí a dalšími zeměměřičskými problémy na základě <i>Devíti kapitol</i>, s důrazem na rychlost výpočtů. Používá jednotnou sadu názvů pro desetinné zlomky (desetiny, setiny, tisíce atd.) všech množství, včetně peněz.</p>
906–960	<p>Pět dynastií a Deset království</p> <p>První matematická díla pro lidovou potřebu, žádné se nedochovalo.</p>
960–1126	<p>Dynastie Severní Song</p> <p>Další rozvoj obchodu a řemesel, války s Kitany, Džurčeny a Tanguty, severní Čína postupně upadá pod vládu těchto národů.</p>
1. pol. 11. st.	<p>Jia Xian 賈憲, poprvé zapsal „Pascalův trojúhelník“</p> <p>Jeho nedochované dílo <i>Podrobné postupy k matematickým metodám Devíti kapitol Žlutého císaře</i> tvořilo základ Yang Huiova pozdějšího komentáře k <i>Devíti kapitolám</i>. Jia Xian sice zapsal „tabulku pro odemčení odmocniny“ (binomické koeficienty – nebyl však znám jejich kombinatorický význam), ale upřednostňoval pro odmocňování metodu postupného přičítání, které se provádělo snáze než násobením koeficientů z tabulky.</p>

1031–1095	<p>Shen Gua 沈括, autor <i>Zápisků od Potoka snů</i> (<i>Meng Xi bi tan</i>, 夢溪筆談), úvah o řadě témat od dějin a literatury přes politiku a medicínu po hry, zábavy a podivné úkazy</p> <p>Zaznamenává řadu technických vynálezů (například tisk pohyblivými typy), svoje poznatky z doby, kdy byl císařským astronomem a různé fyzické i myšlenkové experimenty. V oblasti matematiky zaznamenává různé techniky urychlující základní početní operace, hromadění diskretních objektů (součet aritmetických řad), výpočet/odhad kombinací kamenů na početní desce při hře <i>weiqi</i> (tj. <i>go</i> – 19 x 19 polí, každé může být obsazené bílým nebo černým nebo prázdné), a dále aplikace výpočtů ve vojenské logistice, akustice aj.</p>
1084	<p>Znovuzavedení matematiky do státních zkoušek, vytištění <i>Deseti matematických klasik</i></p> <p>První vydání <i>Devíti kapitol</i> tiskem. Výuka byla zrušena v roce 1086, krátce znovu obnovena v letech 1104 a 1110–1120. Dochovala se podrobná pravidla studia.</p>
1127–1279	<p>Dynastie Jižní Song</p> <p>Po dobytí severu Džurčeny dvůr přesídlil do dnešního Hangzhou jižně od Dlouhé řeky. Další rozvoj obchodu, ale trvalé války. Celé 13. století vliv Mongolů, kteří v roce 1234 vyvrátili Džurčenskou říši a do 60. let ovládli většinu jižní Číny. V této době se pravděpodobně začalo šířit čínské počítadlo (<i>suanpan</i>) v dnešní podobě. Vznik soukromých akademií, vyučujících praktické i vyšší matematice, matematická díla pro prostý lid (jménem známe nejméně 50).</p>
1192–1279	<p>Li Ye 李冶 (též Li Zhi 李治)</p> <p>Sloužil za dynastie Jin a později Kublajchánovi. Autor dvou dochovaných děl:</p> <p><i>Mořské zrcadlo pro měření kruhu</i> (<i>Ce yuan hai jing</i> 測圓海鏡) na úlohách zaměřování rozměrů kruhu řeší numericky rovnice až 10. stupně (metoda „nebeského počátku“ <i>tian yuan</i> 天元); vzorce postupně odvozuje, jedno z nejrigoróznějších děl tradiční čínské matematiky.</p> <p><i>Odvozování částí dodané ke starým metodám</i> (<i>Yi gu yan duan</i>, 益古演段), výpočty ploch a jejich rozměrů, také využívá řešení rovnic vyšších stupňů.</p>
1213–1214	<p>Bao Huanzhi'ova 鮑澣之 reedice <i>Deseti matematických klasik</i> podle severosungských tisků, vytiskl také <i>Shu shu ji yi</i></p> <p>Knihy nalezl u astronoma Yang Zhongfua v roce 1200 v hlavním městě Lin'anu (Hangzhou), vydal je jako úředník v Dingzhou v dnešní provincii Fujian. Do dnešního dne se zachovalo 6 z 11, z toho <i>Devět kapitol</i> pouze částečně (prvních 5 svazků). Faksimile byly vydány v roce 1981 v Pekingu.</p>

asi 1202–1261	<p>Qin Jiushao 秦九韶, autor díla <i>Devět kapitol početních spisů</i> (<i>Shu shu jiu zhang</i>, 數書九章, 1247)</p> <p>Toto mohutné dílo se navzdory názvu vůbec neřídí obsahovým dělením <i>Devíti kapitol</i>; obsahuje prakticky motivované, ale často matematicky velmi složité úlohy, používá hodně diagramů a číselných zápisů postupu výpočtu; soustavy kongurencí (metoda „hledání jednotky velké záplavy“ <i>da yan qiu yi</i> 大衍求一), praktické kalendářní výpočty, plochy polí a zaměřování vzdáleností, daňové úlohy, stavby, vojenská logistika aj.</p>
2. pol. 13. st.	<p>Yang Hui 楊輝</p> <p>Jeho knihy, vydávané pro veřejnost v 60. a 70. letech 13. století, podrobně popisují řadu praktických aritmetických technik. Měly velký vliv na pozdější matematiku, prováděnou pomocí počítadla, i na korejskou a japonskou matematiku. Vedl také vlastní matematickou školu, jejíž osnovy se dochovaly.</p>
přelom 13. a 14. st.	<p>Zhu Shijie, autor díla <i>Nefritové zrcadlo čtyř počátků</i> (<i>Si yuan yu jian</i> 四元玉鑿, 1303)</p> <p>Rozvíjí algebraické metody na soustavy rovnic vyššího stupně až o čtyřech neznámých (nebe, země, člověk a věci). Bylo částečně přeloženo do angličtiny Alexandrem Wyliem již v 19. století, moderní studie [Hoe 1977].</p>
1368–1644	<p>Dynastie Ming</p> <p>Na začátku doznívá zájem o matematiku z dřívějších dob (obnovení matematické výuky pro státní zkoušky, zahrnutí mat. knih včetně <i>Devíti kapitol</i> do encyklopedie <i>Yongle</i>). Období rozvoje obchodu a technologie, cesty čínských loďů do Afriky (admirál Zheng He, 1420). Postupné rozšíření kuličkového počítadla jako početního nástroje mezi lidem i dvorními matematiky. Na konci dynastie příchod Evropanů, přeložení části Euklidových <i>Základů</i> (Matteo Ricci, Xu Guangqi).</p>
1450	<p>Wu Jing 吳敬 vydává <i>Kompendium ilustrativních příkladů k matematickým metodám „Devíti kapitol“</i> (<i>Jiu zhang suanfa bilei daquan</i> 九章算法比類大全)</p> <p>Mohutné dílo, které na půdorysu <i>Devíti kapitol</i> shromažďuje přes 1000 úloh. Je na přechodu mezi aritmetikou početních tyčinek a kuličkového počítadla, některé metody a někdy i úlohy ve verších.</p>
16. st.	<p>Matematici Wang Wensu, Tang Shunzhi, Gu Yingxiang ad.</p> <p>Jejich díla ukazují, že již nerozuměli algebraické matematice 12.–14. století. Pracovali s kuličkovým počítadlem.</p>

1592	<p>Cheng Dawei (1533 – 1606) vydává <i>Spojení tradic matematických metod</i> (<i>Suanfa tongzong</i> 算法統宗)</p> <p>Nejúspěšnější tradiční čínská matematická kniha, vyšla celkem asi ve sto vydáních a přispěla významně k rozvoji matematiky v Koreji a Japonsku. Organizovaná podle <i>Devíti kapitol</i>, které doplňuje dvěma úvodními kapitolami o aritmetice kuličkového počítadla a různými „nezařaditelnými“ zvláštními metodami. Je velmi prakticky orientovaná, podrobná a jasná, což zřejmě přispělo k její popularitě. Jedná se přitom z větší části o kompilaci z Yang Huiovy, Wu Jingovy a několika dalších knih.</p>
1607	<p>Matteo Ricci (1552–1610) a Xu Guangqi (1562–1633) vydávají čínský překlad prvních 6 knih Euklidových <i>Základů</i></p> <p>I když evropská geometrie, zejména přísně deduktivní metoda výkladu, se čínským matematikům zdála zdlouhavá a příliš spekulativní, seznámení se západní matematickou tradicí mělo trvalý vliv a zahájilo přechodné období, kdy čínští matematici od evropských misionářů přejímali a rozvíjeli některé evropské prvky, aniž by byli ve stálém kontaktu se soudobou evropskou matematikou. Toto období trvalo až do konce 19. století. Souhrnný popis viz [Elman 2005].</p>