Lenka Vojteková

Jan Vojtěch a jeho stredoškolské učebnice

In: Martina Bečvářová (editor); Jindřich Bečvář (editor): Matematika v proměnách věků. V. (Slovak). Praha: Matfyzpress, 2007. pp. 152–165.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/400892

UČEBNICE PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

131

GEOMETRIE

PRO IV. TŘÍDU STŘEDNÍCH ŠKOL

NAPSAL

JAN VOJTĚCH

Se 130 obrazci

ŠESTÉ VYDÁNÍ,
nově upravené podle učebních osnov z r. 1933

Schváleno vynesením ministerstva školství a národní osvěty ze dne 13. dubna 1934, čís. 39641/34-II/1, pro střední školy s českoslov. jazykem vyučovacím ve znění českém

CENA VÁZ. VÝTISKU Kč 10,40

PRAHA 1934
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS", PRAHA VIII

JAN VOJTĚCH

a jeho stredoškolské učebnice

Lenka Vojteková

1. Jan Vojtěch (1879–1953)

Jan Vojtěch (obr. 1) sa narodil 5. 8. 1879 v Kyjove na Morave v rodine debnára Eduarda Vojtěcha a Anežky rod. Seidlovej. V rokoch 1885–1890 navštevoval českonemeckú obecnú školu v Kyjove, a zamýšľal pokračovať v štúdiu na miestnom nemeckom gymnáziu. Avšak na popud svojho katechétu M. Fischera v septembri 1890 nastúpil na české gymnázium v Uherskom Hradišti. Po jeho absolvovaní sa rozhodol študovať matematiku na filozofickej fakulte univerzity Karlo-Ferdinandovej v Prahe. Tu absolvoval osem semestrov. Potom Jan Vojtěch vyučoval na stredných školách hlavne matematiku a fyziku, a to najmä vo vyšších triedach. Dokonca už na konci štvrtého roku svojho štúdia na univerzite (1902) vyučoval na akademickom gymnáziu v Prahe ako suplujúci učiteľ matematiku a fyziku. V ďalších rokoch pôsobil takisto ako suplujúci učiteľ na českom štátnom gymnáziu v Prahe III, v Olomouci a tiež súkromne vyučoval u Masarykov (Jana a Olgu). Od 1. 9. 1904 bol menovaný skutočným učiteľom na českej zemskej reálke v Lipníku nad Bečvou, kde pobudol 3 roky. Tu sa spoznal so svojou manželkou Vlastou rod. Machancovou. Zosobášili sa 27. 10. 1906 a o necelý rok neskôr sa im, už v Brne, narodil syn Jaromír. Ďalších desať rokov bol Jan Vojtěch profesorom na novozriadenej druhej českej štátnej reálke v Brne. Spočiatku tu učil matematiku a fyziku, neskôr už len matematiku. Už dva roky po príchode do Brna (1909) sa habilitoval na súkromného docenta a začal popri vyučovaní na reálke prednášať na brnenskej technike. V roku 1923 odchádza do Prahy na vysoké učení technické, kde bol menovaný riadnym profesorom. Bol tiež členom rôznych spolkov a zúčastňoval sa zjazdov týkajúcich sa okrem iného aj matematiky a jej vyučovania na strednej škole. Roku 1936 prednášal na I. zjazde pre stredoškolskú pedagogiku a didaktiku v Prahe: *Elementární geometrie s vědeckého hlediska.* V roku 1937 ovdovel. Po zatvorení vysokých škôl odchádza roku 1940 do nútenej výslužby na tzv. „dovolenou s čekatelným“. Po vojne opäť pôsobí na technike v Prahe. 19. 1. 1953 v Prahe Jan Vojtěch zomiera.

Pri príležitosti vydania nových učebných osnov pre stredné školy Jan Vojtěch napísal na vyzvanie výboru Jednoty českých matematikov a fyzikov v Prahe pre jej nakladateľstvo celý rad učebníc geometrie pre IV. až VII. triedu gymnázií, reálnych gymnázií a reáliek, kde zúročil svoje dlhoročné skúsenosti s vyučovaním matematiky na strednej škole. Pre IV. a V. triedu sú to základy geometrie, teda planimetria a stereometria, pre VI. triedu napísal trigonometriu a pre

VII. triedu analytickú geometriu. Vojtěch vo svojom životopise píše, že pôvodne boli vydané tieto tituly: Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií, 1910, 142 strán, pro IV. tř. reálek, 1910, 94 s., pro V. tř. gymnasií, 1910, 134 s., pro V. tř. reálných gymnasií, 1910, 122 s., pro V. tř. reálek, 1911, 180 s., pro VI. tř. gymnasií a reálných gymnasií, 1911, 132 s., pro VI. tř. reálek, 1911, 164 s., pro VII. tř. gymnasií a reálných gymnasií, 1912, 147 s., pro VII. tř. reálek, 1912, 166 s.. V ďalších vydaniach boli urobené rôzne zmeny: skracovanie, rozdeľovanie a opätovné spájanie látky, odstraňovanie, či pridávanie príkladov k cvičeniu a podobne. Spolu s B. Bydžovským ešte vydali tieto knihy: Matematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií, 1912, 180 s., Matematika pro nejvyšší třídu reálek, 1912, 176 s., a Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol, v ktorých Vojtěch sám zostavil geometrickú časť.

Okrem učebníc pre stredné školy, napísal aj niekoľko učebníc pre školy vysoké: Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických, 1916, 304 s. (3. vydanie 1922 rozšírené do 2 zväzkov), Přehled vyšší matematiky, 1926, 330 s. a Geometrie projektivní, 1932, 880 s.

V tejto práci by som sa podrobnejšie chcela venovať Vojtěchovým geometriám pre IV. triedu stredných škôl. Budem sa snažiť porovnať obsah a rozsah týchto učebníc a upozorniť na niektoré príklady, výklady a dôkazy, ktoré sa mi zdali byť netradičné, alebo iným spôsobom zaujímavé.

Obr. 1: Prof. Dr. Jan Vojtěch

2. Stredné školy v Česku v 1. pol. 20. storočia

Najprv by som chcela priblížiť, aké typy škôl sa vyskytovali v Čechách a na Morave v dobe, keď vyšli Vojtěchove učebnice. Nájdeme tu najmä tri typy škôl: gymnázium, reálka a reálne gymnázium, z ktorého sa neskôr vydiferencovali dva typy: pôvodnejší typ A a reformovaný typ B. Okrem týchto už spomenutých tu boli aj dievčenské a reformné stredné školy.

Gymnáziá boli v tej dobe osemročné (do roku 1849 boli šesťročné) a delili sa na dva stupne. Kým nižší stupeň (1.–4. ročník) zabezpečoval elementárne vzdelanie, na vyššom stupni (5.–8. ročník) sa vyučovali filozoficko-historické a matematicko-prírodovedné predmety, hoci matematika tu mala nižšiu hodinovú dotáciu ako na reálkach. Maturitná skúška na klasickom gymnáziu oprávňovala k štúdiu na všetkých univerzitných fakultách, tiež na VŠ banskej a poľnohospodárskej. Ak absolvent gymnázia preukázal dostatočné znalosti a zručnosti v deskriptívnej geometrii a kreslení, mohol študovať aj na VŠ technckej. (Potůček 1992)

Reálka bola sedemročná stredná škola s maturitou (od 30-tych rokov 19. st. bola šesťročná). Mala všeobecno-vzdelávací charakter, zameraná však bola najmä na matematicko-prírodovedné disciplíny. Podobne ako gymnáziá boli reálky delené na dva stupne. Na nižšom stupni (1.–4. ročník) boli tri roky venované teoretickej príprave a štvrtý rok bol zameraný na prax. Po ňom nasledoval trojročný vyšší stupeň (5.–7. ročník), kde sa vyučovali vyššie spomenuté matematicko-prírodovedné predmety. Oproti gymnáziám mali do výuky zaradený aj istý počet hodín deskriptívnej geometrie. Maturitná skúška na reálke oprávňovala k štúdiu na všetkých štúdijných odboroch na VŠ technickej. (Potůček 1992) Pre štúdium na iných VŠ bolo potrebné urobiť doplnkové skúšky.

Reálne gymnázium bolo vlastne akýmsi pokusom o spojenie klasického gymnázia a reálky. Je to typ osemročnej strednej školy s rozšírenou výukou prírodovedných predmetov a s obmedzením výuky starých jazykov (bez gréčtiny). Býva označované ako typ A (Potůček 1992, a iní). Z neho sa totiž oddelil nový typ: reformované reálne gymnázium, označované ako typ B. Na rozdiel od klasického gymnázia sa u typu A z učiva fyziky vyčlenila chémia ako samostatný predmet, do fyziky boli začlenené základy astronómie a navyše bola do výuky zaradená deskriptívna geometria, aj keď s nižším hodinovým zastúpením ako na reálkach. U typu B sa zhodoval nižší stupeň s nižším stupňom reálky. Vyššie gymnaziálne triedy vypustili z učiva chémiu, deskriptívnu geometriu a obmedzili kreslenie. Navyše zaviedli filozofickú propedeutiku a pridali hodiny latinčiny. Maturita na oboch typoch reálnych gymnázií oprávňovala k štúdiu na všetkých univerzitných fakultách, okrem teologickej fakulty, tiež na VŠ banskej a poľnohospodárskej, a absolventov reálneho gymnázia (typ A) k štúdiu na všetkých odboroch VŠ technickej. Absolventi reformovaného reálneho gymnázia (typ B) si museli doplniť maturitu skúškou z deskriptívnej geometrie, ak chceli v štúdiu pokracovať na VŠ technickej.

3. Vojtěchove Geometrie pre 4. triedu SŠ

Vráťme sa teraz k Vojtěchovým učebniciam geometrie. Budem sa v prevažnej miere zaoberať týmito knihami:

- Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií, Praha 1910, 1. vydanie
- Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních, Praha 1924, 5. vydanie upravené
- Geometrie pro IV. třídu středních škol, Praha 1934, 6. prepracované vydanie

Ak porovnáme obsah a rozsah týchto učebníc, zistíme, že prvá a druhá (teda jej časť venovaná štvrtým triedam) sa v podstate zhodujú, až na spojenie niektorých podkapitol do jednej alebo naopak. Nájdeme tu nasledovné kapitoly: Úvod, I. Souměrnost osová, II. Posouvání, III. Otáčení, IV. Pohyby vůbec (takto je nazvaná táto kapitola v prvej knihe, kým v druhej vystupuje pod názvom Shodnost, obsahom si však zodpovedajú) a V. Homotetičnost a podobnost. Kapitola Úvod je vo všetkých troch učebniciach rovnaká. V geometrii pre IV. a V. triedu je ešte navyše uvedený: Dodatek pro reálky nazvaný Obecnější vztahy. Tvorí ho asi 15 strán venovaných priečkam trojuholníka, homológii, „harmonické čtveřině bodu a paprsku“, pólu a poláre. Ďalej sú tu ešte kapitoly zo stereometrie, ktoré však neprislúchajú k učivu štvrtej triedy stredných škôl. No v učebnici, ktorá je spomínaná ako tretia, je úplne vynechaná kapitola o podobnosti. Obsah zodpovedá obsahu zvyšných kapitol u predchádzajúcich kníh, ale rozloženie jednotlivých učív a aj samotné názvy kapitol sú úplne odlišné: Úvod, I. Základní útvary a vztahy, II. Přímky kolmé, III. Kružnice, IV. Přímky rovnoběžné, V. Trojúhelník, VI. Čtyřúhelníky a mnohoúhelníky, VII. Obsah úhelníku. Na základe vyššie uvedeného sa budem dôkladnejšie zaoberať druhým titulom – Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií.

4. Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií

4.1 *Úvod*

V tejto kapitole autor predstavuje čitateľovi obsah a históriu geometrie, jej základné axiómy a vety (o priamke, rovine, uhle, úsečke), označenia a tiež sa zmieňuje o nástrojoch na rysovanie.

4.2 *I. Souměrnost osová*

Tu autor vysvetľuje pojem osovej súmernosti na príklade preklápania roviny (papiera) okolo danej priamky. Definuje útvary obrátene (inverzne) zhodné. Pri zavádzaní osovej súmernosti vôbec nepoužíva pojem kolmice. Tú definuje až neskôr a to takisto pomocou preklápania. Nájdeme tu aj rozdelenie uhlov a zavedenie pojmu pravouhlý trojuholník. V pripojených úlohách ma zaujala táto:

- *Aký je rozdiel medzi pojmami priamka kolmá a priamka zvislá?*

Pravdepodobne mal Vojtěch skúsenosti so zlým pochopením termínu kolmý zo strany študentov, jeho zamieňaním s pojmom zvislý.

Ďalšia podkapitola je venovaná úsečkám a uhlom. Opäť sa tu stretávame s už známym preklápaním. Tento raz ho autor využíva na určenie osi a stredu úsečky a tiež osi uhla. Nájdeme tu tiež porovnávanie dĺžky úsečiek a veľkosti uhlov, definíciu styčného, doplnkového, vedľajšieho a vrcholového uhla.

Nasledujúca podkapitola má názov Rovnoramenný trojuholník. Tu definuje tento pojem, preklápaním ukazuje jeho súmernosť podľa osi a vyvodzuje z toho dôsledky (rovnosť uhlov pri základni, splynutie niektorých významných priečok) a objasňuje ich význam. Definuje os strany a uhla a vzťah medzi stranami a uhlami vo všeobecnom trojuholníku. Z úloh k cvičeniu ma zaujala jednak úloha, ktorá sa vyskytuje pri viacerých kapitolách tejto knihy:

- *Z ktorých miest našej republiky je vzdušnou čiarou rovnako ďaleko do Prahy aj do Brna? A z ktorých miest je do jedného bližšie než do druhého a naopak?*

A tiež táto úloha:

- *Ak spojíme bod vo vnútri trojuholníka so všetkými jeho vrcholmi, je súčet týchto spojníc väčší než polovica obvodu a menší než celý obvod trojuholníka. Dokážte.*

(V tejto učebnici sa pri niektorých dôkazových úlohách nevyskytuje slovko „dokážte“, je tam len popísaná situácia – napr. predchádzajúca úloha tam je uvedená bez slova dokážte.)

Nasleduje podkapitola o kružniciach, vzájomnej polohe priamky a kružnice a vzdialenosti bodu od kružnice. Potom je tu podkapitola zaoberajúca sa dvoma kružnicami. Hovorí sa tu o vzájomnej polohe dvoch kružníc a o využití kružníc pri zostrojení trojuholníka. Sú tu úlohy na zostrojenie osi úsečky, na delenie uhla, na zostrojenie kružnice vpísanej a opísanej trojuholníku, na zostrojenie dotyčnice ku kružnici daným bodom neležiacim na danej kružnici. Zaujala ma tu poznámka k úlohe na zostrojenie bodu súmerného k danému podľa danej osi:

- *Ako zostrojíme priesečníky danej kružnice s priamkou danou dvoma bodmi iba pomocou kružidla?*

Zostrojíme bod súmerný k stredu kružnice podľa danej priamky spôsobom uvedeným v predchádzajúcej úlohe (označme dané body A, B a stred danej kružnice S. Z bodu A zostrojime kružnicu s polomerom AS, z bodu B kružnicu s polomerom BS. Hľadaný bod leží v ich priesečníku), a z neho kružnicu s polomerom rovnakým, ako má daná kružnica. Priesečníky tejto a danej kružnice sú hľadanými bodmi. Prečo? Autor popisuje riešenie tejto úlohy, ale zdôvodnenie postupu necháva na čitateľovi.

Touto podkapitolou končí prvá kapitola: Stredová súmernosť. Ešte pridávam pekné úlohy z tejto kapitoly:

- *Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka danej kružnice a jej dvoch dotyčníc.*
- *Vpíšte do kruhového výseku kružnicu (tj. zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka oblúka a oboch polomerov kruhového výseku).*

- *Ak sa tri kružnice so stredmi S_1, S_2, S_3 navzájom po dvoch dotýkajú, pretínajú sa ich tri spoločné dotyčnice, vedené v ich dotykových bodoch, v bode, ktorý je stredom kružnice vpísanej trojuholníku $S_1S_2S_3$.*

4.3 *II. Posouvání*

Posúvanie Vojtěch opäť definuje prakticky: Myslime si rovinu a v nej priamku, oboje dvojmo (dva listy papiera). Ak pohybujeme jednou rovinou tak, aby stále splývala s druhou, a aby jej priamka stále splývala s priamkou pevnej roviny, hovoríme, že rovinu pozdĺž priamky posúvame. Cez posúvanie ďalej autor definuje rovnobežky a pridáva niektoré vety o rovnobežkách a ich iné definície. Tiež sa tu zaoberá uhlami pri rovnobežkách preťatých priečkou a uhlami v trojuholníku. Objavuje sa tu známy dôkaz, že súčet uhlov v trojuholníku je 2R, s využitím rovnobežky s niektorou zo strán vo vrchole, ktorým strana neprechádza.

Samostatnú podkapitolu venuje rovnobežníkom. Zavádza pojem štvoruholníka a jeho uhlopriečky, definuje rovnobežník a jeho zvláštne prípady: kosoštvorec a obdĺžnik, ako rovnobežníky, ktoré majú dve osi súmernosti, a štvorec so štyrmi osami súmernosti. Kosoštvorec nazýva rovnostranným rovnobežníkom, obdĺžnik rovnouhlým, a štvorec ako kombináciu oboch – rovnobežníkom rovnostranným a rovnouhlým zároveň. Ďalšiu podkapitolu autor venuje meraniu úsečiek, ich súčtu, rozdielu, súčinu a podielu. Na koniec tejto kapitoly znova pridávam pekné príklady:

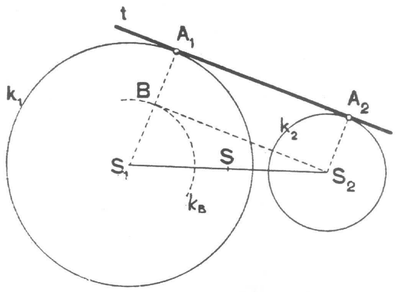
- *Ak majú dve kružnice vonkajší dotyk v bode A a ak vedieme polomery S_1B_1 a S_2B_2, rovnobežné s rovnakou orientáciou, potom uhol $\angle B_1AB_2 = R$; dokážte. Aká je situácia v prípade vnútorného dotyku daných kružníc?*
- *Dokážte, že os vonkajšieho uhla pri vrchole rovnoramenného trojuholníka je rovnobežná so základňou.*
- *Dokážte, že súčet vzdialeností bodu na základni rovnoramenného trojuholníka od jeho ramien je konštantný (čomu je rovný?). Čo v prípade, že zvolíme bod na predĺžení základne?*

4.4 *III. Otáčení*

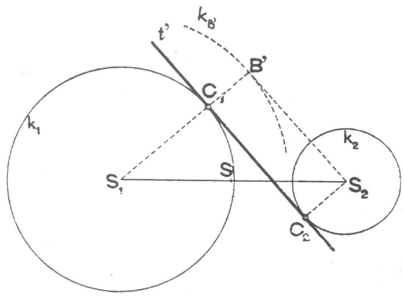
Tento pojem autor opäť definuje pomocou dvojitej roviny, uvádza tu tiež stredovú súmernosť ako zvláštny prípad otáčania (otočenie o uhol priamy). Nájdeme tu podkapitoly venované kružnicovým oblúkom, tetivám, stredovým, obvodovým a úsekovým uhlom. Vetu o stredovom a obvodovom uhle Vojtěch dokazuje len pre najjednoduchší prípad, kedy jedno rameno obvodového uhla prechádza priemerom kružnice, ostatné prípady necháva na čitateľa. Ďalej uvádza Talesovu vetu – obvodové uhly v polkruhu sú pravé. Tiež v tejto kapitole dokazuje, že kružnicové oblúky medzi rovnobežkami sú zhodné, a ďalej túto vetu odporúča využiť pri riešení úloh, napr.

- *Spojiť priamkou dva body ležiace veľmi blízko pri sebe na kružnici.*
- *Zostrojiť dotyčnicu ku kružnici v jej danom bode, ak nie je prístupný stred kružnice.*

Na konci tejto kapitoly hovorí autor o spoločnej dotyčnici dvoch kružníc. Avšak, keďže študenti ešte nepoznajú rovnoľahlosť, zostrojuje ich iným, netradičnejším spôsobom.



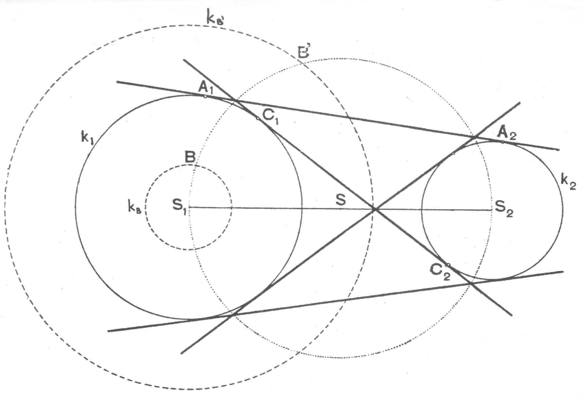
Obr. 2



Obr. 3

Uvádzam rozbor tejto úlohy o spoločnej dotyčnici dvoch kružníc: Majme dve kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$, nech $r_1 > r_2$, a ich spoločnú vonkajšiu dotyčnicu t s dotykovými bodmi A_1, A_2. Polomery S_1A_1, S_2A_2 sú kolmé na t a sú teda rovnobežné (rovnakej orientácie). Zostrojme úsečku S_2B, rovnobežnú s A_1A_2, pre ktorú ďalej platí, že $S_2B = A_1A_2$ a $A_1B = A_2S_2$. Bod B vieme zostrojiť, pretože má od S_1 danú vzdialenosť $BS_1 = r_1 - r_2$ a je vrcholom pravého uhla nad danou úsečkou S_1S_2. Geometrickým miestom bodov prvej vlastnosti je kružnica $k_B(S_1, r_1 - r_2)$ a geometrickým miestom bodov druhej vlastnosti je Talesova kružnica nad priemerom S_1S_2. Bod A je priesečníkom kružnice k_1 a polpriamky $\overrightarrow{S_1B}$. (obr. 2)

Pri konštrukcii môžme postupovať takto: Zo stredu S_1 opíšeme kružnicu s polomerom $r_1 - r_2$, zo stredu S úsečky S_1S_2 narysujeme Talesovu kružnicu s polomerom SS_1. Priesečníkom týchto dvoch kružníc, bodom B, vedieme polpriamku $\overrightarrow{S_1B}$, ktorá pretne kružnicu k_1 v hľadanom bode A_1. Stačí už len vztýčiť kolmicu v tomto bode a dostaneme hľadanú vonkajšiu dotyčnicu k obom kružniciam. (obr. 3)



Obr. 4

Podobným postupom zostrojíme aj vnútornú dotyčnicu daných kružníc.

(rozbor – obr. 3, konštrukcia – obr. 4) Nech C_1, C_2 sú dotykové body, potom polomery S_1C_1, S_2C_2 sú rovnobežné, ale opačnej orientácie. Namiesto kružnice s polomerom $r_1 - r_2$ zostrojíme kružnicu $k_{B'}(S_1, r_1 + r_2)$. Ďalej postupujeme podľa postupu konštrukcie vonkajšej dotyčnice. A na záver tejto kapitoly opäť uvádzam niekoľko príkladov:

- *Dané sú dve ľubovolné čiary (2 priamky, 2 kružnice, priamka a kružnica, ...) a bod medzi nimi ležiaci. Zostrojte priamku prechádzajúcu týmto bodom tak, aby úsečky na nej ohraničené daným bodom a čiarami boli rovnako dlhé.*
- *Zostrojte rovnoramenný trojuholník, ak je daný jeho vrchol a uhol pri tomto vrchole, tak, aby konce jeho základne ležali na dvoch daných čiarach (priamkach, kružniciach, ...).*
- *Narysujte do danej kružnice tetivu danej dĺžky, rovnobežnú s danou priamkou, alebo zvierajúcu s ňou daný uhol.*
- *Ktoré uhly vyjadrené v stupňoch celým číslom (od 0^o do 180^o) vieme zostrojiť presne pravítkom a kružidlom?*
- *Nájdite priamku, ktorá má od daných dvoch bodov dané vzdialenosti.*

4.5 *IV. Pohyby vůbec*

Prvá podkapitola je venovaná zhodnosti trojuholníkov. Všetky vety o zhodnosti trojuholníkov sú dokazované cez „pohyby“, teda posúvanie, otáčanie, osovú súmernosť. Autor ukazuje ich využitie v dôkazových a konštrukčných úlohách. Napríklad tu nájdeme takúto úlohu:

- *Dokážte, že je možné zostrojiť dotyčnicu k danej kružnici týmto spôsobom: Daná je kružnica $k(S, r)$ a bod A, ktorý na nej neleží. Zostrojíme kružnicu $l(S, SA)$ a v priesečníku B tejto kružnice s polpriamkou $\overrightarrow{SA}$ vztýčime kolmicu na SA. Kolmica pretne kružnicu l v bode C a CS pretne kružnicu k v bode D, ktorý je dotykovým bodom hľadanej dotyčnice.*

Autor uvádza nasledovný dôkaz: Trojuholníky $\triangle DAS$ a $\triangle BCS$ sú zhodné podľa vety *sus*, preto pre tieto uhly platí: $\angle ADS = \angle CBS = R$.

V ďalšej časti Vojtěch svoju pozornosť upriamuje na dôležité body v trojuholníku (priesečníky osí uhlov a strán, ortocentrum a ťažisko). Podáva tu dôkazy, že jednotlivé priečky sa pretínajú v jednom (dôležitom) bode, a tiež pekne dokazuje vlastnosť ťažiska (delí každú z ťažníc v pomere 2 : 1). Zaujala ma tu jeho poznámka o ortocentre, že ak máme daný trojuholník $\triangle ABC$ a jeho ortocentrum V, tak vo všetkých trojuholníkoch týchto ABC, ABV, ACV, BCV tvorených tromi z týchto bodov A, B, C, V platí, že každý z týchto štyroch bodov je ortocentrom trojuholníka, ktorého vrcholy tvoria zvyšné tri body.

Ďalej sa autor venuje štvoruholníkom, najmä lichobežníku, a mnohouholníkom, obvzlášť pravidelným. Definuje štvoruholník (a mnohouholník) tetivový a dotyčnicový. Nemalú pozornosť však venuje aj meraniu obsahov rôznych uholníkov (obdĺžnika, rovnobežníka, trojuholníka, lichobežníka a mnohouholníka dotyčnicového aj všeobecného). Obsah rovnobežníka počíta tak, že daný rovnobežník prevedie na rovnoplochý obdĺžnik. Trojuholník zasa považuje za polovicu rovnobežníka, a teda odtiaľ odvodí aj vzorec na výpočet jeho obsahu. Obsah trojuholníka počíta aj pomocou polomeru vpísanej kružnice a polovičného obvodu trojuholníka. Tento vzorec potom využíva na výpočet obsahu dotyčnicového mnohouholníka. Obsah všeobecného mnohouholníka počíta tak, že ho priečkami rozdelí na trojuholníky, lichobežníky a obdĺžniky. Posledné strany tejto kapitoly sú zamerané na pohyby útvarov. Opäť sa tu hovorí o zhodných zobrazeniach, ale teraz sa netýkajú len samotných bodov a priamok, ale aj rôznych uholníkov. A na koniec znova pripájam zaujímavé príklady:

- *Dokážte správnosť tohto riešenia, ako rozpóliť daný uhol: Na jedno rameno nanesieme od vrcholu uhla dve úsečky, na druhé rameno dve úsečky s nimi zhodné a ich koncové body spojíme do kríža. Priesečník týchto spojníc leží na osi daného uhla.*
- *Zostrojte trojuholník, ak je dané: v_c, γ, u_γ, kde u_γ je úsečka osi uhla γ patriaca trojuholníku.*
- *Zostrojte trojuholník, ak sú dané päty jeho výšok.*
- *Do daného štvorca vpíšte štvorec, ak je daná dĺžka jeho strany (aby jeho vrcholy ležali postupne na stranách daného štvorca. Kedy má táto úloha jedno, dve, žiadne riešenie? Rozšírte úlohu pre iné uholníky.*
- *Obsah lichobežníka sa rovná súčinu jednej z nerovnobežných strán a jej vzdialenosti od stredu druhej. Dokážte.*
- *Spojnice bodu vo vnútri rovnobežníka s jeho vrcholmi delia rovnobežník na štyri trojuholníky tak, že súčty obsahov dvoch nesusedných si sú rovné.*
- *Súčet vzdialeností ľubovolného bodu vo vnútri mnohouholníka so stranami rovnakej dĺžky od jeho strán je konštantný. Dokážte. (Spojte tento bod s vrcholmi mnohouholníka a hľadajte jeho obsah.)*

4.6 *V. Homothetičnost a podobnost*

Na začiatku tejto kapitoly sa autor zaoberá úmernosťou úsečiek (zväzok priamok preťatých rovnobežnými priamkami) a túto potom využíva pri riešení úloh. Zaujala ma táto:

- *Danú úsečku AB možno rozpóliť iba pomocou pravítka a k nej danej rovnobežky. (Ako možno zostrojiť dvojnásobok danej úsečky iba pomocou pravítka, ak je daná priamka k nej rovnobežná?)*

Vojtěch ukazuje riešenie prvej úlohy a druhú necháva nevyriešenú pre čitateľa: Ak spojíme bod S, ležiaci mimo pás rovnobežiek, s bodmi A, B priamkami, pretnú danú rovnobežku v bodoch A', B'. Priamky AB' a $A'B$ sa pretnú v bode S' a spojnica SS' pretína úsečku AB v bode C, ktorý je jej stredom (a úsečku $A'B'$ v jej strede C'). Lebo vo zväzku priamok so stredom S platí $AC : A'C' = CB : C'B'$, teda $AC : CB = A'C' : C'B'$, a vo zväzku so stredom S' platí $AC : B'C' = CB : C'A'$, teda $A'C' : C'B' = CB : AC$. Porovnaním oboch úmerností dostaneme $AC : CB = CB : AC$, teda $AC^2 = CB^2$, z čoho vyplýva rovnosť $AC = CB$.

Pomocou vyššie spomenutej úmernosti úsečiek autor zavádza pojem homotetických (rovnoľahlých) útvarov. Definuje tiež útvary podobné, ako tie, ktoré sa „pohybom“ dajú previesť na útvary homotetické. V ďalších podkapitolách sa venuje podobnosti trojuholníkov a iných útvarov, ktorú odvodzuje práve od podobnosti trojuholníkov. Vojtěch uvádza vety o podobnosti trojuholníkov (*uu, sus, sss, Ssu*) aj s dôkazmi robenými pomocou úmernosti úsečiek a odvodzuje pomer obsahov podobných útvarov. Nájdeme tu aj rovnoľahlosť kružníc, nájdenie stredov rovnoľahlosti dvoch kružníc a ich využitie pri rysovaní spoločnej dotyčnice dvoch kružníc (porovnanie s predošlým postupom ich zostrojenia). Autor ukazuje, ako možno riešiť konštrukčné úlohy pomocou rovnoľahlosti (napr. vpísať štvorec do kruhového výseku).

Nasledujúca podkapitola je venovaná pravouhlému trojuholníku. Na začiatku sú uvedené a s využitím podobnosti aj dokázané Euklidove vety o odvesnách a výške (aj keď ich tak autor nenazýva). Tieto sú potom ďalej využité pri jednom z dôkazov Pytagorovej vety. Autor ich tu uvádza niekoľko a zopár len naznačuje, ako úlohy na precvičenie pre čitateľa. Využitie Pytagorovej vety je tu demonštrované na príkladoch. Práve pomocou nej je tu odvodený Herónov vzorec na výpočet obsahu trojuholníka, ak poznáme len jeho strany. Na základe tohto vzorca vyjadruje pomocou strán trojuholníka polomer vpísanej kružnice, a na základe vzorca a podobnosti polomer opísanej kružnice. Nájdeme tu dokonca aj Ptolemaiovu vetu: V tetivovom štvoruholníku sa rovná súčin uhlopriečok súčtu súčinov protiľahlých strán, teda $ef = ac+bd$. Jej dôkaz je urobený s využitím podobnosti trojuholníkov.

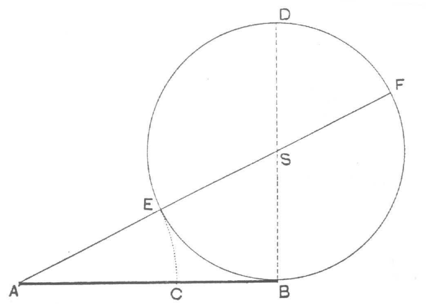
Ďalej tu nájdeme podkapitolu venovanú mocnosti bodu ku kružnici. Autor uvádza dôkaz pre vonkajšie body kružnice, kým overenie platnosti vety pre body vnútorné necháva na dokázanie čitateľovi. A hneď podáva aj príklad na jej využitie. Je to jedna z Apollóniových úloh (BBk):

- *Zostrojiť kružnicu dotýkajúcu sa danej kružnice a prechádzajúcu danými dvoma bodmi.*

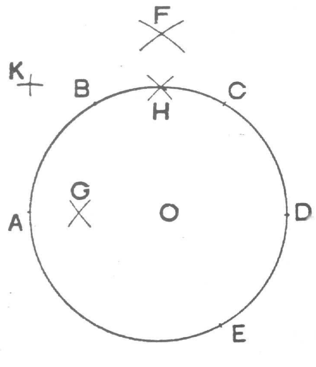
Za mocnosťou bodu ku kružnici nasleduje definícia chordály a jej zostrojenie pomocou rovnako dlhých dotyčníc (teda s využitím mocnosti bodu ku kružnici). Tiež Vojtěch ukazuje, ako sa to dá urobiť jednoduchším spôsobom – pomocou tretej kružnice. Predtým je však dokázaná veta, že chordály troch kružníc sa pretínajú v jednom bode. Ďalej nasleduje úloha o zlatom reze:

- *Rozdeľte danú úsečku na dve časti tak, aby väčšia z nich bola strednou úmerou menšej a celej úsečky.*

Teda ak máme danú úsečku AB, hľadaný bod je C $(AC > CB)$, potom má platiť, že $AB : AC = AC : CB$. Na konštrukciu zlatého rezu Vojtěch využíva mocnosť bodu ku kružnici: V bode B vztýčime kolmicu BD na úsečku AB rovnakej dĺžky ako AB. Nad BD, ako priemerom, zostrojíme kružnicu. Z bodu A vedieme sečnicu prechádzajúcu stredom kružnice, ktorú pretína v dvoch bodoch E a F. Úsečka AE zodovedá dĺžke väčšej časti danej úsečky AB, ktorá vyhovuje úlohe, teda je zhodná s AC (obr. 5). Pretože z mocnosti bodu A ku kružnici vyplýva, že $AB : AF = AE : AB$, z čoho po úprave dostaneme $AB : (AF - AB) = AE : (AB - AE)$, teda $AB : AC = AC : CB$. Ďalej tu nájdeme iné znenie predchádzajúcej úlohy ($a : x = x : (a - x)$), z ktorého je potom zlatý rez vypočítaný ako: $a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Z priloženej historickej poznámky sa čitateľ môže dozvedieť, že zlatý rez poznali už Pytagorejci, no jeho názov vznikol až v 19. st. asi podľa Keplerovho názvu „sectio divina" (rez božský). Autor uvádza a dokazuje aká je spojitosť medzi zlatým rezom a stranou pravidelného desaťuholníka a päťuholníka. Ak označíme stranu pravidelného desaťuholníka a_{10} a stranu pravidelného päťuholníka a_5 a polomer ich opísanej kružnice r, potom platí: $a_{10} = r\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $a_5 = 4r^2 - \frac{r^2}{a_{10}} = r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Nájdeme tu tiež návod na zostrojenie strany pravidelného pätnásťuholníka, a tiež ako zostrojiť pravidelný desaťuholník iba pomocou kružidla. Nech A, B, C, D, E sú po sebe idúce vrcholy pravidelného šesťuholníka na kružnici so stredom O. Z bodov A a D opíšme kružnicové oblúky s polomerom AC ($= BD$), ktoré sa pretnú v bode F, ďalej z bodov C a E oblúky s polomerom OF, ktoré sa pretnú v bode G. Nuž a $OG = a_{10}$. Odtiaľ vieme dostat a_5, a mimochodom $OF = a_4$ (obr. 6). Dôkaz autor neuvádza, necháva ho na čitateľa. Taliansky geometer Lorenzo Mascheroni (1750–1800), ako sa dozvedáme z poznámky, vo svojom spise, vydanom krátko pred r. 1800, zostrojil iba pomocou kružidla pravidelné mnohouholníky dovtedy zostrojované pravítkom a kružidlom, a navyše ukázal, že všetky úlohy riešiteľné pravítkom a kružidlom je možné riešiť len pomocou kružidla.



Obr. 5



Obr. 6

Ďalšia podkapitola je venovaná konštrukcii algebraických výrazov a využitiu algebry pri konštrukčných úlohách. Posledná podkapitola má názov: Obvod a obsah kruhu a jeho častí. Autor približne určuje π, ako limitu pomerov obvodov pravidelných n-uholníkov vpísaných a opísaných kružnici ku polomeru danej kružnice, pre rastúce n s presnostou na štyri desatinné miesta. Spomína aj ako určovali π v minulosti a na koľko desatinných miest sa ho do tej doby podarilo zrátať. Odvodzuje obvod a obsah kruhu, dĺžku kružnicového oblúka a obsah kruhového výseku a medzikružia. Zaujímavými príkladmi zakončujem aj túto kapitolu:

- *Dokážte, že uhlopriečky lichobežníka sa delia svojim priesečníkom v pomere základní.*
- *Zostrojte trojuholník, ak sú dané jeho tri výšky.*
- *Vpíšte do daného trojuholníka štvorec tak, aby mal jednu stranu na základni trojuholníka a zvyšné dva vrcholy ležali postupne na zvyšných stranách trojuholníka.*
- *Pravouhlý rovnoramenný trojuholník má základňu dĺžky a, určte obsah štvorca doňho vpísaného, ktorý stojí: a) na ramene, b) na základni daného trojuholníka.*
- *Dokážte, že vo všeobecnom trojuholníku sa štvorec jednej strany rovná súčtu štvorcov ostatných dvoch strán, zmenšenému, alebo zväčšenému o dvojnásobný súčin jednej strany a priemetu druhej strany na ňu, podľa toho, či leží táto strana oproti ostrému alebo tupému uhlu. Teda, že platí nasledovný vzorec:* $a^2 = b^2 + c^2 \mp 2cc_2$.
- *Dokážte, že v pravidelnom päťuholníku sa uhlopriečky pretínajú v pomere zlatého rezu.*
- *Vypočítajte dĺžku uhlopriečok pravidelného desaťuholníka, ak je daný polomer opísanej kružnice.*
- *Zostrojte* $x = (abcd)^{\frac{1}{4}}$.
- *Nad preponou a odvesnami pravouhlého trojuholníka zostrojme polkružnice na tú stranu, kde leží trojuholník. Dokážte, že súčet obsahov dvoch mesiačikovitých plôch takto vzniknutých (Hippokratových mesiačikov) sa rovná obsahu daného trojuholníka.*
- *Za aký čas opíše koniec minútovej ručičky na hodinách dráhu rovnú jej dĺžke?*

Celá kniha je zakončená súborom štyridsiatich úloh na opakovanie, kde nájdeme úlohy týkajúce sa každej kapitoly.

Skutočnosť, že autori učebníc pre vyššie triedy stredných škôl – Bydžovský aritmetiky a algebry a Vojtěch geometrie – píšu učebnicu pre 4. triedu nižšej strednej školy, pramenila z osnovami pedpísaného požiadavku, vykonať v 4. triede zhrnutie a systematizáciu prebraného učiva. (Potůček 1993) Myslím, že Vojtěchovi sa to aj skutočne podarilo.

LITERATÚRA

[1] Balada F., *Zemřel PhDr. Jan Vojtěch*, Matematika ve škole **3** (1952/53), 189.

[2] Čupr K., *Prof. dr. Jan Vojtěch pětašedesátníkem*, Lidové noviny (5. 8. 1944).

[3] Drábek K., *Sto let od narození prof. PhDr. Jana Vojtěcha*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie **24** (1979), 223–225.

[4] Kuzmin M. N., *Vývoj školství a vzdělání v Československu*, Praha, 1981, str. 241.

[5] Potůček J., *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945, I. díl: Vznik a vývoj jednotlivých typů škol a jejich osnov matematiky*, Plzeň, 1992, str. 55.

[6] ———, *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945, II. Díl*, 1993, str. 49.

[7] Vojtěch J., *Geometrie pro IV. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, Praha, 1910, str. 142.

[8] ———, *Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních*, Praha, 1924, 5. vydanie upravené, str. 262.

[9] ———, *Geometrie pro IV. třídu škol středních*, Praha, 1934, 6. prepracované vydanie upravené, str. 88.

[10] ———, Vlastný životopis do roku 1939, pripravený pre článok k jeho 60-tym narodeninám, ktorý však nevyšiel.

[11] ———, *Má vzpomínka na brněnskou reálku, Památník vydaný na oslavu pětadvacetiletého trvání II. státní československé reálky v Brně*, Brno, 1932, str. 65–66.

[12] Vyčichlo F., *Šedesát let prof. dr. Jana Vojtěcha*, Lidové noviny (5. 8. 1939).

[13] ———, *Sedmdesát let prof. dr. Jana Vojtěcha*, Lidové noviny (5. 8. 1949).

[14] ———, *Prof. dr. Jan Vojtěch zemřel*, Časopis pro pěstování matematiky **78** (1953), 283–286.