Tomáš Cipra

Pexiderovy práce z pojistné matematiky

In: Jindřich Bečvář (editor): Jan Vilém Pexider (1874–1914). (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 45–50.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401018

PEXIDEROVY PRÁCE Z POJISTNÉ MATEMATIKY

Tomáš Cipra

Jan Vilém Pexider je rovněž autorem tří prací z oblasti pojistné matematiky (práce [P14], [P16], [P17]), jejichž vznik byl patrně ovlivněn jeho působením jako soukromého docenta v Bernu.

Pojišťovnictví se na přelomu 19. a 20. století ve Švýcarsku a Německu úspěšně rozvíjelo jak na komerční, tak na sociální úrovni, a pojistná matematika (či obecněji aktuárská věda) se zde přednášela na řadě vysokých škol. Na druhé straně je ovšem nutné připomenout, že ani Praha nezůstávala pozadu: pojistná matematika se zde poprvé přednášela ve školním roce 1895/96 na České technice (přednášejícím byl profesor Matyáš Lerch, matematik světového jména, který byl v té době zároveň zaměstnán v Zemském pojišťovacím fondu[1])). Je nepochybné, že především pobyt ve Švýcarsku, které již v té době bylo zemí bank a pojišťoven, vzbudil v Pexiderovi zájem o matematiku životního pojištění, která se zde na poměrně vysoké úrovni používala u řady komerčních pojišťoven a penzijních fondů (penzijních kas). Navíc je vidět, že zmíněné Pexiderovy práce jsou poplatné švýcarské a německé škole, neboť se vyznačují formální precizností a detailním rozborem vztahů mezi příslušnými pojistnými veličinami.

Tato preciznost a formálně správný a téměř „encyklopedický“ popis všech vztahů, které jsou v daném kontextu mezi uvažovanými pojistnými veličinami možné, patří k hlavním přednostem Pexiderových prací, které v žádném případě nevybočují z průměru obvyklého v té době a často jen formalizují v podstatě známé vztahy. Přestože tyto práce neobsahují převratné myšlenky, které by posunuly aktuárskou vědu výrazněji vpřed, mohly být ve své době velice užitečné, neboť obsahují formálně správné návody pro řadu situací důležitých při praktických pojistných výpočtech a i v dnešní době si při jejich studiu čtenář uvědomí řadu souvislostí. Takto byly asi tyto práce přijímány i v době svého vzniku; např. Pexiderův současník dr. Oster z Mannheimu ve své recenzi práce [P17] píše: *U této práce si menší pozornost zasluhuje souhrn nových výsledků než přísně logický způsob prezentace*. Navíc zde dr. Oster vytýká Pexiderovi, že se jeho značení někdy odlišuje od mezinárodních konvencí. I zde má recenzent patrně pravdu, neboť II. mezinárodní aktuárský kongres v Londýně v roce 1898 již přijal jistá pravidla aktuárské symboliky, která Pexider sice v zásadě dodržuje, ale někdy také sáhne po „exotických“ symbolech typu ${}_{n\sim T}a_i(x)$ nebo $a^{t[}(x)$.

Doslovný překlad názvu práce [P14] je *Fundamentální vztahy mezi pojistným v pojištění života, v pojištění invalidním a pro případ smrti*. Jestliže ovšem použijeme dnešní terminologii a podíváme se na vlastní obsah článku, pak se jedná o vztahy mezi hodnotami nároků (přesněji počátečními hodnotami nároků) na různé typy důchodového a kapitálového životního pojištění (počáteční hodnota nároků na příslušné pojistné plnění skutečně odpovídá jednorázovému nettopojistnému). Ještě konkrétněji vyjádřeno, Pexider v tomto článku reagoval na vztahy typu „hodnota doživotního důchodu je rovna hodnotě nároků aktivního pojištěnce na aktivní a invalidní důchod“, které se používaly jako aproximativní bez ověření velikosti chyby takové aproximace.

Symbolicky zapisoval Pexider např. předchozí vztah jako

$$a_i(x) = a(x) - a_a(x)\,, \tag{1}$$

kde $a(x)$ je hodnota nároků x-letého muže na jednotkový předlhůtní doživotní důchod

$$a(x) = \sum_x^{\omega} D(\cdot)/D(x)$$

(přitom $D(x) = l(x)v^x$),
$a_a(x)$ je hodnota nároků x-letého aktivního muže na jednotkový předlhůtní aktivní důchod

$$a_a(x) = \sum_x^{\omega} D_a(\cdot)/D_a(x)$$

(přitom $D_a(x) = l_a(x)v^x$),
$a_i(x)$ je hodnota nároků x-letého aktivního muže na jednotkový předlhůtní invalidní důchod

$$a_i(x) = \sum_x^{\omega} D_{ai}(\cdot + 1)a_u(x+1)/D_a(x)$$

(přitom $D_{ai}(x)$ je diskontovaný počet mužů, kteří přešli z aktivního do invalidního stavu ve věku x),
$a_u(x)$ je hodnota nároků x-letého invalidního muže na jednotkový předlhůtní invalidní důchod (písmeno u je z německého (Erwerbs)Unfähigkeit)

$$a_u(x) = \sum_x^{\omega} D_u(\cdot)/D_u(x)$$

(přitom $D_u(x) = l_u(x)v^x$).
V předchozích zápisech se snadno rozpozná dnes používaná symbolika s dekrementními řády rovněž označovanými l a komutačními čísly rovněž označovanými D (viz např. T. Cipra: *Matematické metody demografie a pojištění*, SNTL, Praha 1990).

Na základě netriviálních úprav formálního charakteru Pexider nahradil aproximaci (1) přesným vztahem

$$a_i(x) = a(x) - a_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(a(x) - a_u(x))\,, \tag{1'}$$

který pak také odůvodnil úvahami heuristického charakteru.

Podobně Pexider postupoval v případě aproximace

$$A_i(x) = A(x) - A_a(x)\,, \tag{2}$$

kde $A(x)$ je hodnota nároků x-letého muže na jednotkovou částku v pojištění pro případ smrti

$$A(x) = \sum_x^{\omega} C(\cdot)/D(x)$$

(přitom $C(x) = d(x)v^x$, i když toto komutační číslo je dnes běžněji definováno jako $C(x) = d(x)v^{x+1}$);
$A_a(x)$ je hodnota nároků x-letého aktivního muže na jednotkovou částku v pojištění pro případ smrti

$$A_a(x) = \sum_x^{\omega} C_a(\cdot)/D_a(x)$$

(přitom $C_a(x) = d_a(x)v^x$);
$A_i(x)$ je hodnota nároků x-letého aktivního muže na jednotkovou částku v pojištění pro případ smrti s výplatou zaručenou jen při předcházející invaliditě

$$A_i(x) = \sum_x^{\omega} D_{ai}(\cdot + 1)A_u(x+1)/D_a(x)$$

(přitom $D_{ai}(x)$ je popsáno výše);
$A_u(x)$ je hodnota nároků x-letého invalidního muže na jednotkovou částku v pojištění pro případ smrti

$$A_u(x) = \sum_x^{\omega} C_i(\cdot)/D_i(x)$$

(přitom $C_i(x) = d_i(x)v^x$).

Na základě analogických úprav jako v předchozím důchodovém případě dospěl Pexider i v případě kapitálového životního pojištění k přesnému vztahu

$$A_i(x) = A(x) - A_a(x) + \frac{l_i(x)}{l_a(x)}(A(x) - A_u(x))\,. \tag{2'}$$

Použitelnost aproximací (1), resp. (2) vzhledem k přesným vztahům (1′), resp. (2′) Pexider posuzoval numericky pomocí dvou úmrtnostních tabulek používaných v té době v některých penzijních fondech v Německu a Švýcarsku a výsledky znázorňoval také graficky. Je nutné ocenit výpočetní úsilí, které si v té době takové numerické studie bezpochyby vyžádaly. Pexider se tak řadí k výpočetně zdatným aktuárům, kteří jen s pomocí mechanických kalkulátorů byli schopni s vysokým stupněm přesnosti provádět výpočty, které ani dnes nelze označit za jednoduché.

Pexiderův konečný závěr byl správný a je plně v duchu závěrů, které se běžně přijímají dnes: aproximace (1), resp. (2) nelze doporučit pro praktické použití, neboť jejich chyba je veliká vzhledem k absolutním hodnotám částek, o které se zde jedná. Pro představu uveďme jeden z příkladů, které Pexider ve své práci prezentoval. Použil zde úmrtnostní tabulky penzijního fondu švýcarských železničních zaměstnanců (podle těchto tabulek je např. $l_{21} = 99072$ a $l_{22} = 98188$, takže pravděpodobnost úmrtí 21-letého muže před dožitím věku 22 let je $q_{21} = 8,923‰$, což je mnohonásobně vyšší úmrtnost než $q_{21} = 1,195‰$ platná pro muže v České republice v roce 1994). Podle Pexiderových výsledků, pokud by penzijní fond používal aproximaci (1) místo přesného vztahu (1′), pak v případě invalidního důchodu ve výši 1000 švýcarských franků ročně by od 50-letého aktivního muže jednorázově vybral o 198,60 franků méně (jednorázové nettopojistné by bylo o 5,4% nižší) a od 60-letého aktivního muže dokonce o 438,10 franků méně (jednorázové nettopojistné by bylo o 11,5% nižší).

Patrně až během recenzního řízení se Pexider dozvěděl, že nebyl jediný, kdo se danou problematikou zabýval. Ch. Moser, profesor university v Bernu, který byl současně ředitelem tamějšího penzijního ústavu (Direktor des eidgenössischen Versicherungsamtes in Bern), ho taktně upozornil, že ve své práci *Untersuchungen und Materialien zur Beurteilung der sechs Entwürfe für eine Hülfskasse des Personals der eidgenössischen Verwaltungen* (za povšimnutí také stojí použitá švýcarská němčina) odvodil obecnější formuli, než je vztah (1′). Moserova formule totiž navíc uvažuje možnost reaktivizace z invalidního stavu zpět do aktivního stavu. Pexider na tento fakt omluvně reagoval v dodatku, který ke svému článku připojil.

V práci [P16] se Pexider (stále ještě během svého působení v Bernu) zabýval jiným problémem, který je důležitý z hlediska praktického pojišťovnictví, totiž področním úročením.

Při inkasování pojistného a naopak při výplatách důchodů se většinou nejedná o roční platby, ale o tzv. področní platby prováděné m krát ročně, např. čtvrtletně ($m = 4$), měsíčně ($m = 12$) apod.

Jestliže např. $a(x)$ značí jako v předchozí práci počáteční hodnotu nároků na jednotkový předlhůtní doživotní důchod pro x-letého pojištěnce vyplácený ročně (v jednotkové výši vždy na počátku roku), pak odpovídající področní důchod $a^{(m)}(x)$ je vyplácen m krát ročně (ve výši $\frac{1}{m}$ vždy na počátku každé m-tiny roku).

V Pexiderově době již byl poměrně běžně znám přesný vztah mezi $a^{(m)}(x)$ a $a(x)$ tvaru

$$a^{(m)}(x) = \alpha a(x) + \beta \,, \tag{3}$$

kde

$$\alpha = \frac{1}{m^2} \sum_{k=0}^{m-1} (m + ik) \cdot v^{k/m} \,, \tag{4}$$

$$\beta = -\frac{1}{vm^2}\sum_{k=0}^{m-1} k \cdot v^{k/m} \tag{5}$$

(i je roční úroková míra a $v = 1/(1+i)$ je odpovídající diskontní faktor).

K problémům však docházelo při praktické aplikaci těchto vztahů, které pro běžný bankovní a pojišťovací provoz byly příliš složité. Na druhé straně běžně používaná van Geerova aproximace

$$a^{(m)}(x) \sim a(x) - \frac{m-1}{2m} \tag{6}$$

byla dle názoru mnohých aktuárů příliš hrubá.

Pexider se v práci [P16] snažil o takové zpřesnění aproximace (6), které by bylo přijatelné z výpočetního hlediska. Na základě metod, které jsou z pohledu dnešní matematické analýzy považovány za elementární (Taylorův rozvoj apod.), Pexider navrhl aproximace pro α

$$\alpha \sim 1 + \frac{i^2}{12}\cdot\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) , \tag{4$'$}$$

či přesněji

$$\alpha \sim 1 + \frac{i^2}{12}\cdot(1-i)\cdot\left(1 - \frac{1}{m^2}\right) + \frac{i^3}{6m^3} , \tag{4$''$}$$

a pro β

$$\beta \sim -\frac{m-1}{2m}\cdot\left(1 + \frac{i}{3}\cdot\frac{m+1}{m}\right) , \tag{5$'$}$$

či přesněji

$$\beta \sim -\frac{m-1}{2m}\left(1 + \frac{i}{3}\cdot\left(1-\frac{i}{4}\right)\cdot\frac{m+1}{m}\right) . \tag{5$''$}$$

Navíc Pexider ještě odvodil limitní vztahy pro $m \to \infty$ odpovídající tzv. spojitému úročení. Např. tímto limitním přechodem v přesných vzorcích (4) a (5) se získá

$$\alpha(\infty) = v\left(\frac{i}{j}\right)^2 , \quad \beta(\infty) = -\frac{i-j}{j^2} ,$$

kde $j = \log(1+i)$ je tzv. intenzita úročení.

Na závěr článku uvedl Pexider tabulky pro numerické hodnoty koeficientů α a β pro různé přesnosti aproximací a pro různé roční úrokové míry i. Pro představu např. pro aproximace ($4''$) a ($5''$) a úrokovou míru $i = 4\%$ je

m	α	β
2	1,0000973	-0,254950
4	1,0001202	-0,381187
6	1,0001249	-0,423083
12	1,0001271	-0,464887
24	1,0001278	-0,485754
52	1,0001279	-0,496983
∞	1,0001280	-0,506600

(až na nepatrné výjimky jsou všechny hodnoty tabelované Pexiderem správné při porovnání s dnešními počítačovými výpočty prováděnými s vysokou přesností).

Výsledky tohoto článku v době jeho publikování byly pro oblast praxe nepochybně velice užitečné.

Práce [P17] je velice rozsáhlý článek (33 stran). Ve shodě s recenzí dr. Ostera (viz výše) je možno konstatovat, že práce obsahuje velice obsáhlý a logicky utříděný přehled vztahů z oblasti invalidního pojištění (včetně jejich odvození), které byly v té době již známé, ale nebyly zatím patrně v tak ucelené formě v jednom článku publikovány. Je nutné zdůraznit, že všechny uvedené vztahy přes jejich formální složitost jsou z dnešního pohledu správné.

Pokud bychom se na závěr na základě uvedených tří prací pokusili charakterizovat Pexiderův přínos pro oblast pojistné matematiky, lze shrnout, že

- Pexiderovy práce určitě nepředstavují v této oblasti průlom, který by posunul aktuárskou vědu výrazněji vpřed; spíše se jedná o standardní úroveň prací publikovaných v té době;
- Pexider bezpochyby velmi solidně ovládal pojistnou matematiku na tehdejší úrovni, jeho texty jsou do detailu promyšlené, mají logické uspořádání a neobsahují žádné chyby; navíc musel být určitě velmi zručným počtářem;
- Pexider určitě znal aktuárskou problematiku i z její praktické stránky, neboť reagoval na potřeby praxe a naopak pro praxi musely být jeho práce bez nadsázky užitečné.

Poznámka

[1]) Poznamenejme pro zajímavost, že Matyáš Lerch napsal článek *Slabiny pojišťovací theorie* (Přehled, týdenník věnovaný veřejným otázkám 6(1907–08), č. 34 z 15. 5. 1908, str. 569–570, a č. 35 z 22. 5. 1908, str. 588–590).
Kriticky reagoval Josef Beneš v příspěvku stejného jména (Přehled 6(1907–08), č. 37, 621–622).
Matyáš Lerch pak publikoval další příspěvek, *Slabiny pojišťovací theorie II* (Přehled 6(1907–08), č. 41 z 3. 7. 1908, str. 692 , a č. 51 z 11. 9. 1908, str. 861–862), ve kterém také odpovídá na Benešovu kritiku.