Pavel Šišma

Problém čtyř barev

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Historie matematiky. II. Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 21. 8. – 24. 8. 1995, Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1997. pp. 169–180.

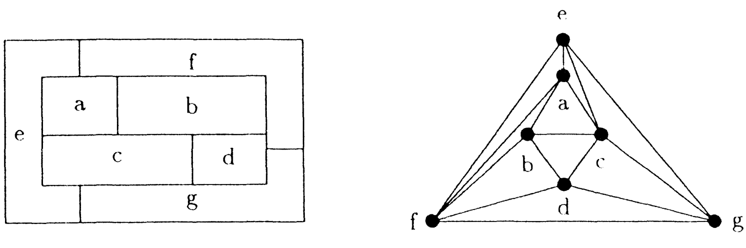
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401043

PROBLÉM ČTYŘ BAREV

PAVEL ŠIŠMA

1. Vznik problému a Kempeho důkaz

Nejvýznamnějším z problémů, které po desetiletí podněcovaly rozvoj teorie grafů, byla následující zdánlivě jednoduchá otázka. Mějme v rovině nebo na kouli znázorněnu zeměpisnou mapu s několika státy. Sousedními státy rozumíme ta dvě území, jež mají společnou hraniční čáru. Mají-li dva státy společné jen izolované body, nepokládáme je tedy za sousední (státy Arizona a Colorado v USA podle této definice nesousedí, protože mají pouze jeden společný bod). Budeme uvažovat jen takové mapy v rovině nebo na kulové ploše, ve které hranici každého státu tvoří jediná jednoduchá uzavřená křivka. Nechť M je libovolná mapa; řekneme, že mapa je obarvitelná pomocí čtyř barev, jestliže každý stát této mapy můžeme obarvit jednou z těchto čtyř barev tak, aby sousední státy nebyly obarveny stejnou barvou. Otázka zní: je možno obarvit libovolnou mapu v rovině či na kulové ploše pomocí čtyř barev? Tento problém nazýváme **problém čtyř barev**. Praxe ukazuje, že čtyři barvy opravdu stačí. Dokázat toto tvrzení se však podařilo až v roce 1976, přestože se o důkaz během více než 100 let pokoušela řada matematiků. Barvení mapy se dá převést na barvení uzlů grafu, který získáme takto: uvnitř každého státu zvolíme libovolný bod a prohlásíme ho za uzel grafu, jehož hrany dostaneme tak, že spojíme dva uzly právě tehdy, když jsou odpovídající státy sousední. Barvení států je pak možno převést na barvení příslušných uzlů, přičemž dva vrcholy, které jsou spojeny hranou, obarvíme různými barvami. Z názoru je zřejmé, že graf odpovídající zeměpisné mapě je rovinný. Na obrázku 1 je znázorněna mapa v rovině a její graf. K obarvení této mapy stačí pouhé tři barvy.



Obr. 1. Příklad mapy a odpovídajícího grafu

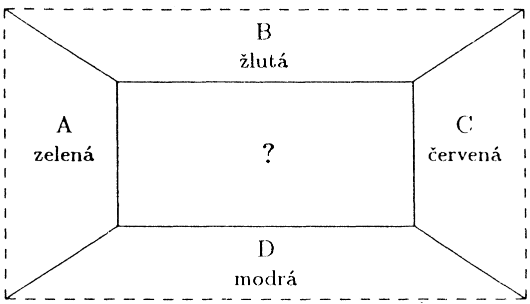
První zmínku o tomto problému nalézáme v dopise Augusta De Morgana adresovaném Williamu Rowanu Hamiltonovi ze dne 23. října 1852. De Morgan seznamuje Hamiltona s otázkou, kterou mu položil jeden z jeho studentů na University College v Londýně. Tento student se jmenoval Frederick Guthrie;

problém nevymyslel on, ale jeho bratr Francis, který byl později profesorem matematiky v Kapském Městě a proslavil se některými objevy v botanice. Oba si všimli, že někdy jsou nutné k obarvení mapy skutečně čtyři barvy. Nenašli případ, kdy čtyři barvy nestačí, ale dokázat, že stačí, se jim nepodařilo. Frederick tedy položil otázku De Morganovi. Ten důkaz také neznal, a proto se obrátil na Hamiltona. Odpověď na svůj dopis dostal už 26. října, kdy Hamilton odpověděl, že se touto otázkou nebude v nejbližší době zabývat.

Problém, který začal De Morgan šířit, se stal brzy součástí matematického folklóru. Už v roce 1860 o důkazu přednášel C. S. Peirce v Harvardu. Je zřejmé, že jeho důkaz nebyl správný, i když jeho znění neznáme. S problémem se seznámil Arthur Cayley. V roce 1879 publikoval článek o této otázce [1]. Z jeho úvah je zřejmé, že se nedomníval, že je důkaz tohoto tvrzení možný. Předpokládal, že pro libovolné přirozené číslo n můžeme sestrojit mapu, na jejíž obarvení potřebujeme n různých barev.

Dne 17. 7. 1879 bylo v časopise Nature oznámeno, že důkaz podal londýnský advokát Alfred Bray Kempe (bývalý student Cayleyho v Cambridge). Na doporučení Cayleyho byl publikován v American Journal of Mathematics [2]. Důkaz vyvolal velké nadšení a Cayley navrhl autora za člena Royal Society. Kempe zde pak mnoho let zastával funkci pokladníka. Brzy se objevily další důkazy odvozené z Kempeho důkazu a problém se zdál být jasný. Kempe poznal, že pro důkaz je postačující dokázat hypotézu čtyř barev pro tzv. *trivalentní mapy.* Tímto pojmem rozumíme mapu, na které se vždy stýkají právě tři hraniční křivky v jednom bodě. Pokud dokážeme, že pro trivalentní mapy čtyři barvy stačí, pak čtyři barvy stačí k obarvení libovolné mapy. Kempe dokázal, že libovolná trivalentní mapa obsahuje oblast, která sousedí s pěti nebo méně oblastmi. Důkaz hypotézy provedl matematickou indukcí vzhledem k počtu oblastí mapy. Hypotéza samozřejmě platí pro mapu s jednou oblastí. Pokud mapa M_r s r oblastmi je obarvitelná čtyřmi barvami, pak čtyři barvy stačí i pro mapu M_{r+1} s $r+1$ oblastmi. Kempe uvažoval jednotlivé případy map s oblastí sousedící s 2, 3, 4 nebo 5 oblastmi. Jeden z těchto případů musí vždy nastat. Z mapy M_{r+1} obdržel mapu M_r tak, že odstranil jednu hranu uvažované oblasti. Důkaz nečinil potíže pro první dva případy. Pro oblasti se čtyřmi a pěti sousedy použil Kempe metodu řetězců („Kempe chains"), která byla pak ještě mnohokrát použita. Předpokládejme, že máme trivalentní mapu, která má již obarveny všechny oblasti pomocí čtyř barev, kromě jedné, která ještě obarvena není, a že neobarvená oblast sousedí se čtyřmi oblastmi A,B,C a D, které jsou postupně obarveny barvami zelenou, žlutou, červenou a modrou (viz. obr. 2).

Ukážeme, že v takovém případě můžeme obarvení změnit tak, aby čtyři barvy stačily. Soustřeďme pozornost na oblasti A a C, které jsou obarveny zeleně a červeně. Mohou nastat dva případy: buď existuje řetězec A—C, ve kterém se pravidelně střídají oblasti obarvené zelenou a červenou barvou, a nebo takový řetězec neexistuje. Ve druhém případě můžeme zaměnit barvy červenou a zelenou v těch červeno-zelených oblastech, které jsou spojeny s A, aniž by se změnila barva oblasti C. Po této záměně jsou obě oblasti A i C obarveny červeně a na oblast doposud neobarvenou můžeme použít barvu zelenou. Protože máme mapu nakreslenou v rovině nebo na kulové ploše, tak v případě, že existuje zeleno–červený řetězec spojující oblasti A a C, neexistuje žluto–modrý řetězec spojující oblasti B a D. Pak ovšem můžeme předcházející úvahu provést pro oblasti B a D.



Obr. 2. Metoda Kempe chains

Kempe ve své práci upozorňuje na to, že pro jiné plochy nemusí čtyři barvy stačit. Uvádí případ anuloidu, kde je někdy potřeba barev šest. Tímto problémem se však nezabývá. Kempe dále uvádí, že do každé oblasti můžeme umístit bod a ten spojit s body těch oblastí, které sousedí s uvedenou oblastí. Dostaneme graf (Kempe používá označení „linkage") a naše úloha je převedena na barvení uzlů tohoto grafu.

Po Kempeho práci následovaly práce, které potvrzovaly její výsledek a snažily se jej modifikovat. Krátce se na tomto místě můžeme zmínit o pracích Petera Guthrie Taita, které souvisejí s rozklady pravidelných grafů na lineární faktory. Tait správně formuloval ekvivalentní podobu tohoto problému. V práci [3] uvádí (řečeno dnešní grafovou terminologií), že barvení trivalentní mapy pomocí čtyř barev je ekvivalentní k přiřazení tří barev hranám rovinného pravidelného grafu třetího stupně tak, aby se v každém uzlu stýkaly hrany různých barev. Tato Taitova úvaha je správná, ovšem jeho další tvrzení o tom, že tento problém se snadno vyřeší indukcí, vyvolává úsměv. Tento problém je stejně složitý jako původní.

Jako zajímavost si na tomto místě můžeme uvést příklady toho, že Kempeho důkaz byl přijímán jako fakt. Vyřešení problému inspirovalo C. L. Dodgsona (nematematické veřejnosti je znám jako Lewis Carroll, autor Alenky v říši divů a Alenky za zrcadlem) k vytvoření hry, při které jeden z hráčů kreslí mapu a druhý ji barví za pomoci čtyř barev. V roce 1886 vypsal ředitel jedné anglické chlapecké školy soutěž pro své žáky v tom, kdo podá lepší důkaz problému čtyř barev. Požadovaný důkaz neměl mít rozsah větší než jednu stranu textu a jednu stranu obrazové přílohy.

2. Práce P. J. Heawooda a L. W. J. Hefftera

Na chybu, které se Kempe dopustil, upozornil jako první v roce 1890 Percy John Heawood. Ve své práci [4] ukázal, že Kempeho úvaha neplatí v případě, kdy jedinou neobarvenou oblast trivalentní mapy obklopuje pět oblastí, na které již byly použity všechny čtyři barvy. Výsledek jeho práce na zasedání London Mathematical Society oznámil samotný Kempe, který přiznal svou chybu a uvedl, že ji nedokáže napravit. Jestliže Kempeho důkaz vyvolal nadšení, pak Heawoodova práce zůstávala dlouhou dobu bez odezvy. Když v roce 1896 objevil chybu v Kempeho důkazu C. de la Vallée Poussin, ukázalo se, že o Heawoodově práci vůbec nevěděl [5].

Heawoodova práce je významná z několika důvodů. Autor v ní dokázal, že k obarvení libovolné mapy stačí pět barev. Dlouhou dobu šlo o jediný definitivní výsledek. Důležitější ovšem je, že systematicky začíná zkoumat barvení map na různých plochách. Doplníme-li kulovou plochu p uchy, dostaneme jednoduchý model orientované plochy rodu p, kterou budeme označovat S_p. Kulovou plochu tedy označíme S_0 a anuloid S_1. Pro danou mapu M na ploše S_p symbolem $\chi(M)$ označíme *chromatické číslo mapy* M. Tímto pojmem rozumíme nejmenší počet barev, které jsou třeba k obarvení mapy M. Heawood ukázal, že horní hranice tohoto číslo závisí pouze na ploše S_p.

Jestliže S_p je plocha a libovolná mapa na této ploše je obarvitelná n barvami a existují mapy, které se nedají obarvit $n-1$ barvami, řekneme, že plocha S_p má chromatické číslo n (zapíšeme $\chi(S_p) = n$).

Heawood ukázal mapu na anuloidu, k jejímuž obarvení je zapotřebí sedm barev. Dokázal, že těchto sedm barev stačí k obarvení libovolné mapy na anuloidu (tedy $\chi(S_1) = 7$).

Heawood odvodil následující nerovnost pro chromatické číslo $\chi(S_p)$ orientované plochy rodu $p \geq 1$:

$$\chi(S_p) \leq \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]. \tag{1}$$

Symbolem $[x]$ je označena celá část čísla x. Heawood se domníval, že dokázal ve vztahu rovnost:

$$\chi(S_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]. \tag{2}$$

Jak však v roce 1891 ukázal Heffter [6], byla dokázána jen nerovnost. Heffter si uvědomil, že pro každou plochu musíme najít mapu, která potřebuje k obarvení $\left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]$ barev. Heawoodovi se to podařilo pouze pro anuloid. Heffter tento problém řešil tak, že se rozhodl konstruovat mapy, kde každá oblast sousedí s každou. Takovou mapu nazýváme *systém sousedících oblastí.*

Tato myšlenka nebyla nová. Již v roce 1840 řešil stejný problém A. F. Möbius. Jeho přítel z univerzity v Lipsku, profesor filologie Weiske, mu položil otázku, zda je možné, aby umírající král rozdělil své království na pět částí mezi své syny tak, aby každá část sousedila se všemi ostatními. Vyloučen byl případ, kdy dvě oblasti měly jen společný bod. Šlo tedy o sestrojení systému pěti sousedících oblastí v rovině. Snadno se ukáže použitím Eulerova vztahu, že takový systém neexistuje. Heffter se o tomto problému dozvěděl z článku R. Baltzera [7]. Dlouhou dobu se tradovalo, že Möbius byl první, kdo formuloval problém čtyř barev. Již F. Klein si povšiml jisté podobnosti Möbiova problému s problémem čtyř barev. Pokud bychom mohli sestrojit systém pěti sousedících oblastí, pak potřebujeme k jejich obarvení pět barev. Pokud ovšem takový systém neexistuje, nedokazuje to, že čtyři barvy stačí.

Heffter uvažoval duální formulaci problému sousedících oblastí. Zde byl inspirován Kempem. Hledal systém bodů na ploše S_p, které jsou spojeny každý s každým tak, aby se spojující hrany neprotínaly. Tento systém nazýval *systém sousedících bodů*; v grafové terminologii dnes hovoříme o úplných grafech, které se dají zobrazit na ploše S_p tak, aby jedinými společnými body hran byly uzly grafu. V pozdější literatuře byl někdy tento problém označován jako *problém nití* (název pochází od D. Hilberta a S. Cohn-Vossena) a jeho historie je velmi podrobně popsána v knize [8]. Jde pouze o to, že místo hran uvažujeme nitě.

Heffterův první krok spočíval v tom, že pro pevný počet sousedících bodů hledal nejmenší rod plochy, na které jde tento systém sestrojit. Označíme-li toto číslo p_n, pak lze ukázat, že pro $n \geq 3$ platí vztah:

$$p_n \geq k(n) = \left\{ \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\}. \tag{3}$$

Symbolem $\{x\}$ je zde označeno nejmenší celé číslo, které není menší než x.

Heffter dokázal vztah (3) pro všechna $n \leq 12$ a pro velmi speciální posloupnost $n = 19, 31, 55, 67, 139, 175, 199, \ldots$. Jedná se o čísla n tvaru $n = 12s + 7$, taková, že číslo $q = 4s + 3$ je prvočíslem a řád prvku 2 v multiplikativní grupě celých čísel mod q je roven $q - 1$ nebo $(q-1)/2$. V roce 1952 Gerhard Ringel dokázal vztah (3) pro $n = 13$ a v roce 1954 pro všechna $n \equiv 5 \pmod{12}$. V roce 1961 pro $n \equiv 3, 7, 10 \pmod{12}$. Pro $n \equiv 4 \pmod{12}$ vztah dokázal v roce 1963 W. Gustin.

V roce 1963 C. M. Terry, L. R. Welch a J. W. T. Youngs vyřešili případ $n \equiv 0 \pmod{12}$. V letech 1963–65 W. Gustin a J. W. T. Youngs dokázali vztah (3) pro $n \equiv 1, 9 \pmod{12}$. J. W. T. Youngs v roce 1966 vyřešil případ 6. Na podzim roku 1967 G. Ringel a J. W. T. Youngs spojili své síly na univerzitě v Santa Cruz a dokázali zbývající případy pro $n \equiv 2, 8, 11 \pmod{12}$.

V následující tabulce jsou uvedena chromatická čísla $\chi(S_p)$ pro několik prvních hodnot p. Pro $p = 0$ byl vztah (2) dokázán až v roce 1976.

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\chi(S_p)$	4	7	8	9	10	11	12	12	13	13	14	15	15	16	16	16

Kromě dvoustranných ploch brzy matematiky začaly zajímat i plochy jednostranné. Také na nich je možno konstruovat mapy a ty obarvovat různými barvami. Označme M_q Möbiův list rodu q. V roce 1910 H. Tietze ukázal [9], že chromatické číslo Möbiova listu M_1 je 6. Pokusil se i o nalezení chromatického čísla plochy M_2, ale to se mu nepodařilo. V roce 1934 určil Philip Franklin $\chi(M_2) = 6$ [10]. V roce 1954 odvodil G. Ringel [11] obecný vztah:

$$\chi(M_q) = \left[\frac{7 + \sqrt{1 + 24q}}{2}\right] \quad \text{pro } q \neq 2. \tag{4}$$

Vztah (4) byl pro některé speciální hodnoty dokázán již dříve, jak ukazuje následující tabulka:

$q = 1$	Tietze H.	1910
$q = 2$	Franklin P.	1934
$q = 3, 4, 6$	Kagno I. N.	1935
$q = 5$	Coxeter H. S. M.	1943
$q = 7$	Bose R. C.	1943

Obtížný Ringelův důkaz zjednodušil v roce 1967 J. W. T. Youngs, který užil při důkazu grafy toků.

3. Práce amerických matematiků

Jak jsme již uvedli, první alternativní formu problému čtyř barev ukázal již Tait. Se druhou přišel v roce 1898 Heawood. Jeho práce [12] začíná zjištěním, že pokud je počet hran každé oblasti trivalentní mapy dělitelný 3, pak tuto mapu můžeme obarvit pomocí čtyř barev. Tento výsledek pak zobecnil následujícím způsobem. Předpokládejme, že každému vrcholu trivalentní mapy můžeme přiřadit hodnoty $+1, -1$ takovým způsobem, že součet ohodnocení vrcholů každé oblasti je dělitelný třemi, pak mapa je obarvitelná čtyřmi barvami. Toto tvrzení platí i obráceně. Důkaz jeho tvrzení vychází z Taitovy ekvivalence problému. Problém je možno formulovat takto: označme uzly trivalentní mapy $v_1, v_2, \cdots, v_n$, pak máme systém kongruencí, které odpovídají jednotlivým oblastem mapy, tvaru

$$x_i + x_j + \cdots + x_k \equiv 0 \pmod 3. \tag{5}$$

Každá neznámá nabývá hodnot $+1, -1$, a x_i je obsaženo v kongruenci právě tehdy, když v_i leží na hranici odpovídající oblasti. Protože mapa je trivalentní, je každá neznámá obsažena právě ve třech kongruencích. Problém čtyř barev je tedy ekvivalentní problému, zda pro každou trivalentní mapu má odpovídající systém kongruencí řešení.

Heawood věnoval této otázce hodně času a energie. Publikoval několik článků až do roku 1950, kdy mu bylo již téměř 90 let.

Po roce 1912, kdy publikoval svou první práci Oswald Veblen [13], nastává ve Spojených státech období zvýšeného zájmu o problém čtyř barev. Již dříve se zde problémem zabývali Peirce, Story (redigoval článek ve kterém Kempe podal svůj „důkaz“) a Sylvester. Dvě práce o tomto problému publikoval Paul Wernicke [14, 15]. Veblenův zájem o topologii a jeho znalost nových algebraických metod objevených Poincarém jej přivedly k řešení problému, který odolával snažení mnoha matematiků již více než 50 let. Jeho práce z roku 1912 se zabývá otázkami finitní geometrie a matic incidence nad konečným tělesem. V závěru ukazuje, že jeho formulace problému je jisté zobecnění systému Heawoodových kongruencí. V téže době byl na Princeton University Veblenovým kolegou George David Birkhoff. Jeho práce [16] vyšla ve stejném ročníku Annals of Mathematics jako Veblenova práce. Birkhoff přináší do problému nové ideje. Pro dané přirozené číslo λ a danou mapu M zavedl číslo $P(\lambda)$, které označuje počet způsobů, kterými můžeme mapu M obarvit, je-li k dispozici λ barev. Birkhoff ukázal, že funkce $P(\lambda)$ je vždy polynom v λ. Poměrně komplikovaně odvodil vztah pro výpočet koeficientů těchto polynomů. Nechť mapa M obsahuje n oblastí. Symbolem (i, k) označme počet způsobů, jak je možno vytvořit z mapy M mapu o i oblastech pomocí k splynutí dvou oblastí tak, že odstraníme všechny jejich společné hranice. Pak platí:

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (i, k). \tag{6}$$

Birkhoffova druhá práce o barvení map [17] nesla název *The reducibility of map's.* V této práci autor revidoval dosavadní výsledky mnoha autorů a zformoval systematickou metodu dalšího zkoumání, která pak ovlivnila vývoj v dalších desetiletích a vedla nakonec k vyřešení problému. Základní myšlenka spočívá v tom, že pokud existují mapy, které vyžadují k obarvení pět barev, pak mezi nimi existují mapy, které mají nejmenší počet oblastí. Takové mapy nazveme *ireducibilní.* Jde o to, hledat stále další a další omezující podmínky pro takové mapy, až ireducibilní mapu sestrojíme, nebo dokážeme, že neexistuje. Birkhoff začal tím, že ukázal, že ireducibilní mapa musí být trivalentní a nemůže obsahovat oblast ohraničenou méně než pěti hranami. První výsledky v tomto směru přinesl Wernicke [15] již v roce 1904, když ukázal, že ireducibilní mapa musí obsahovat buď dva sousedící pětiúhelníky, nebo pětiúhelník sousedící s šestiúhelníkem.

Birkhoff dále aplikoval metodu Kempeho řetězců na „prstenec“ oblastí R, který obepíná mapu M_1 a je obklopen mapou M_2. Ukázal, že ireducibilní mapa nemůže obsahovat prstenec tvořený čtyřmi nebo pěti oblastmi. Kromě toho odvodil ještě celou řadu dalších výsledků.

V roce 1922 Philip Franklin ukázal, že hypotéza čtyř barev platí pro všechny mapy, které mají nejvýše 25 oblastí. Podobně jako Birkhoff ukazuje, které konfigurace oblastí nemohou v ireducibilní mapě nastat. Podobnou cestou se vydali i další matematici. Jejich výsledky ukazuje následující tabulka:

1922	P. Franklin	25
1926 – 27	N. Reynolds	27
1938	P. Franklin	31
1940	C. E. Winn	35
1970	O. Ore, J. Stemple	39
1970	A. Doněc, W. Stromquist	44
do 1974	J. Mayer	51, 71, 95

Problémem se zabývali i nematematici, jak svědčí výsledky J. Mayera, který působil jako profesor francouzské literatury na univerzitě v Montpellier. Jeho poslední výsledek přišel v době, kdy se blížil okamžik vyřešení problému čtyř barev.

Na konci 20. let se Birkhoff vrátil k problému čtyř barev a pod jeho vedením na něm začal pracovat i Hassler Whitney. Jejich práce významně ovlivnila rozvoj teorie grafů. Birkhoff ve své práci [18] dokázal, že pro všechny mapy s $n \geq 3$ oblastmi platí vztah

$$P(\lambda) \geq \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^{n-3}, \tag{7}$$

kde λ je libovolné přirozené číslo různé od 4. Kdyby tento vztah platil i pro $\lambda = 4$, byl by dokázán problém čtyř barev.

Whitney ve svých pracích nehovoří o problému barvení map, ale převádí jej do řeči teorie grafů. Kromě Kempeho zmínky se touto problematikou do roku 1930 v podstatě nikdo nezabýval. Whitney užil označení $M(\lambda)$ pro počet způsobů obarvení daného grafu, je-li k dispozici λ barev. V případě že jde o graf, který odpovídá mapě, je funkce $M(\lambda)$ polynom proměnné λ, který dnes nazýváme *chromatický polynom grafu*. Pomocí principu exkluze a inkluze odvodil Whitney vztah pro koeficienty tohoto polynomu [19]. Whitney problému čtyř barev věnoval i další práce. Uveďme zde například práci [20], kde ukázal, že duální graf k rovinné trivalentní mapě musí být hamiltonovský.

V roce 1934 se ke studiu chromatických polynomů Birkhoff vrátil a zabýval se otázkou ohraničení jejich kořenů. Doufal, že jejich studiem je možno problém čtyř barev vyřešit.

I v dalším období bylo problému věnováno hodně pozornosti. Třebaže práce stále nevedly k jeho vyřešení, bylo při nich objeveno několik významných výsledků a výrazně stimulovaly rozvoj teorie grafů. Například v roce 1941 dokázal R. L. Brooks, že souvislý graf bez smyček a násobných hran (obyčejný graf), který není ani úplný ani kružnice s lichým počtem uzlů, lze obarvit pomocí p barev, kde p je maximální stupeň uzlu v grafu [21]. Podobné tvrzení pro barvení hran odvodil v roce 1965 V. G. Vizing [22]. V roce 1950 zavedl

G. A. Dirac pojem barevně kritického grafu jako grafu, jehož každý vlastní podgraf má menší uzlové chromatické číslo než samotný graf. Tento pojem tedy umožňuje soustředit se při řešení problému čtyř barev pouze na barevně kritické grafy.

Důležitý výsledek publikoval v roce 1958 H. C. Grötzsch, když ukázal, že každý obyčejný rovinný graf bez kružnic délky tři může být obarven pomocí tří barev.

4. Vyřešení problému

V této části si ve stručnosti naznačíme, jakým způsobem byl problém čtyř barev v roce 1976 vyřešen. K tomu potřebujeme zavést několik pojmů. Souvislý rovinný graf nazýváme *konfigurací*, jestliže jsou všechny jeho vnitřní stěny trojúhelníkové. Konfiguraci nazýváme *triangulací*, jestliže je i její vnější stěna trojúhelníková. Příkladem triangulace je tedy graf na obrázku 1. Triangulaci nazveme *jednoduchou*, pokud nemá dvojúhelníky, uzly stupně ≤ 4, ani trojúhelníky netvořící hranici žádné stěny. Z Eulerova vzorce pro rovinné grafy snadno odvodíme, že každá jednoduchá triangulace má alespoň 12 uzlů pátého stupně.

Jak již víme, pro řešení problému čtyř barev má smysl uvažovat jen trivalentní mapy. Těm odpovídá rovinný graf, který je konfigurací. Ukáže se, že pro důkaz hypotézy čtyř barev stačí zkoumat jen jednoduché triangulace. Ireducibilní mapě v našem novém označení odpovídá ireducibilní jednoduchá triangulace, tedy jednoduchá triangulace, jejíž uzly není možno obarvit pomocí čtyř barev a ze všech jednoduchých triangulací s touto vlastností má nejmenší počet uzlů. Hypotéza čtyř barev je pak pravdivá, jestliže neexistuje ireducibilní jednoduchá triangulace.

Pokud v triangulaci zvolíme nějaký n–úhelník a vynecháme všechny jeho uzly a hrany ležící vně tohoto n–úhelníka (ponecháme pouze jejich uzly ležící na n–úhelníku), vznikne konfigurace. Číslo n nazveme řádem této konfigurace.

Důležitou roli mají konfigurace, které nejsou izomorfní s žádným podgrafem ireducibilního grafu. Ty nazveme reducibilní konfigurace. Víme, že tyto konfigurace hledali již Birkhoff, Wernicke a Franklin. Jejich počet neustále rostl a ukazovalo se, že je třeba nějaký systém jejich klasifikace. Nejpřirozenějším způsobem se ukázalo jejich roztřídění podle řádu. Zřejmě každá konfigurace, která obsahuje jako podgraf reducibilní konfiguraci, je reducibilní, proto se ukazuje výhodné zkoumat pouze tzv. minimální reducibilní konfigurace (které už nemají jako podgraf reducibilní konfiguraci). Úsilím mnoha matematiků se podařilo do poloviny 70. let najít všechny reducibilní konfigurace řádu menšího než 12.

Pro další úvahy musíme definovat ještě jeden nový pojem. Mějme dvě množiny grafů M_1 a M_2, řekneme, že množina M_1 je *nevyhnutelná* (unavoidable) vzhledem k množině M_2, když každý graf z M_2 má alespoň jeden podgraf izomorfní s některým grafem z M_1. Budeme zkoumat množiny nevyhnutelné vzhledem k množině všech ireducibilních jednoduchých triangulací, které budeme stručně nazývat nevyhnutelné množiny. Hypotéza čtyř barev je pak správná, když existuje nevyhnutelná množina reducibilních konfigurací.

Jakým způsobem rozhodneme, že daná konfigurace je reducibilní? Metody důkazu reducibility jsou založeny na metodě Kempeho řetězců a na nahrazení konfigurace konfigurací s menším počtem uzlů (tzv. reducérem). Existuje celá řada redukcí, které užívají různých reducérů.

Řešení problému čtyř barev v pracích Appela a Hakena [23, 24, 25] používá terminologii z teorie elektrických sítí. Každému uzlu ireducibilní jednoduché triangulace se přiřadí reálné číslo, tzv. náboj uzlu, tak, aby jen uzly stupně 5 měly kladný náboj, ale aby i celkový součet všech nábojů uzlů byl kladný. Pak se uskuteční vybíjení, při kterém se přesouvají náboje z vrcholů stupně 5 na uzly vyšších stupňů tak, aby se neměnil celkový součet nábojů. Většinou není těžké zjistit všechny možnosti pro okolí vrcholů, které po vybíjení zůstanou s kladným nábojem, a sestavit katalog těchto konfigurací s kladným nábojem některého uzlu. Vybíjení je možno definovat tak, aby každá z těchto konfigurací byla reducibilní. Ty však nemohou v ireducibilní triangulaci existovat, a tak by mělo dojít k vybití. To však není možné, neboť součet nábojů je konstantní. Tento spor dokazuje, že nemůže existovat ireducibilní jednoduchá triangulace, a tedy hypotéza o čtyřech barvách je správná.

Jde vlastně stále o sestrojení nevyhnutelné množiny reducibilních konfigurací. S touto myšlenkou přišel již H. Heesch v roce 1969, kterému se tuto množinu nepodařilo najít. Appel s Hakenem sestrojili nevyhnutelnou množinu reducibilních konfigurací, která měla nejprve 1936 prvků. Postupně se tento počet podařilo snížit až na 1405. Další podstatné snížení se již očekávat nedá. Pro prověřování reducibility konfigurací si stanovili zásadu, že všechny konfigurace z nevyhnutelné množiny mají řád menší než 14. Při kontrole konfigurací s řádem menším než 10 vycházeli z již dříve sestavených tabulek (později publikované v [26]). Reducibilitu ostatních konfigurací prověřovali na počítačích IBM. Příslušné programy vytvořili ve spolupráci s J. Kochem. Výpočty spotřebovaly asi 1200 hodin strojového času. Příprava metod, programu a samotná práce s počítačem trvaly čtyři roky.

Na závěr připomeňme význam tohoto problému pro matematiku. Přivedl k teorii grafů celou řadu významných matematiků (Birkhoff, Veblen, Whitney) a při jeho řešení byla zavedena celá řada nových grafových pojmů (rovinný graf, duální graf, chromatický polynom ap.). Problém čtyř barev se nakonec stal první velkou větou, dokázanou pomocí počítače, bez možnosti přímého ověření jinými matematiky.

Historii problému čtyř barev byla již v minulosti věnovaná značná pozornost v literatuře. Uveďme zde například knihu [27], která pojednává o vývoji teorie grafů v letech 1736 až 1936. Velké množství historických poznámek k tomuto problému může český čtenář nalézt ve známé Sedláčkově knize [28]. J. Bosák v roce 1979 publikoval článek [29], ve kterém informoval o vyřešení problému Appelem a Hakenem.

Dodatek

V době, kdy byl připravován tento příspěvek, se podařilo skupině amerických matematiků výrazně zjednodušit Appelův a Hakenův důkaz problému čtyř barev. Svoje výsledky zveřejnili prostřednictvím sítě Internet nejširší veřejnosti. Autorovi není známo, zda byl tento nový výsledek publikován v odborných časopisech a jak byl přijat odborníky.

Důkaz, který v roce 1976 provedli Appel a Haken, nebyl matematickou veřejností plně akceptován. Jsou pro to dva důvody: (i) část jejich důkazu vyžaduje použití počítače; (ii) část, kterou lze ověřit „ručně“, je tak složitá, že je to prakticky nemožné.

Autoři nového důkazu se v roce 1993 chtěli přesvědčit o správnosti postupu Appela a Hakena, ale brzy se rozhodli, že vytvoří důkaz vlastní. Přitom vycházeli ze stejných myšlenek, na kterých je založen původní důkaz. Jejich množina nevyhnutelných reducibilních konfigurací obsahuje „pouhých“ 633 konfigurací. Také počet různých vybíjecích procedur se jim podařilo výrazně snížit (32 oproti více než 300 u původního důkazu).

K provedení první části nového důkazu je opět třeba počítače. Výpočet byl proveden na pracovní stanici Sun Sparc 20 během 3 hodin. Ověření platnosti druhé části je možno provést bez použití počítače během několika měsíců. Ověření na počítači trvá asi 20 minut.

Podrobnosti důkazu, ověřovací programy a samozřejmě nevyhnutelnou množinu reducibilních konfigurací můžeme najít a získat na anonymním FTP serveru ftp.math.gatech.edu/pub/users/thomas/fcdir/. Pro první informaci je vhodné použít článek [30].

LITERATURA

1. Cayley, A., *On the colouring of maps*, Proc. Roy. Geog. Soc. (New Ser.) **1** (1879), 259–261.
2. Kempe, A. B., *On the geographical problem of the four colours*, American Journal of Mathematics **2** (1879), 193–200.
3. Tait, P. G., *Remarks on the previous communication [by Guthrie]*, Proc. Roy. Soc. Edinb. **10** (1878–80), 729.
4. Heawood, P. J., *Map-colour theorem*, Quarterly Jurnal of Pure and Applied Mathematics **24** (1890), 332–338.
5. de la Vallée Poussin, C., *Problème des quatre couleurs—deuxième réponse*, Interméd. Math. **3** (1896), 179–180.
6. Heffter, L. W. J., *Über das Problem der Nachbargebiete*, Mathematische Annalen **38** (1891), 477–508.
7. Baltzer, R., *Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske*, Ber. K. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig Math.-Phys. **37** (1885), 1–6.
8. Ringel, G., *Map color theorem*, 1. vyd., Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
9. Tietze, H., *Einige Bemerkungen über das Problem des Kartenfärbens auf einseitige Flächen*, Jahresber. Deut. Math.-Ver. **19** (1910), 155–159.
10. Franklin, P., *A six-color problem*, J. Math. Phys. **13** (1934), 363–369.

11. Ringel, G., *Bestimmung der maximalzahl der Nachbargebiete auf nicht orientierbaren Flächen*, Mathematische Annalen **127** (1954), 181–214.
12. Heawood, P. J., *On the four-colour map theorem*, Quarterly Jurnal of Pure and Applied Mathematics **29** (1898), 270–285.
13. Veblen, O., *An application of modular equations in Analysis Situs*, Annals of Mathematics **(2) 14** (1912–13), 86–94.
14. Wernicke, P., *On the solution of the map color problem*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1897–98), 5.
15. Wernicke, P., *Über den kartographischen Vierfarbensatz*, Mathematische Annalen **58** (1904), 413–426.
16. Birkhoff, G. D., *A determinant formula for the number of ways of coloring a map*, Annals of Mathematics **(2) 14** (1912–13), 42–46.
17. Birkhoff, G. D., *The reducibility of maps*, American Journal of Mathematics **35** (1913), 115–128.
18. Birkhoff, G. D., *On the number of ways of colouring a map*, Proceedings of the Edinbourgh Mathematical Society **(2) 2** (1930), 83–91.
19. Whitney, H., *A logical expansion in mathematics*, Bull. Amer. Math. Soc. **38** (1932), 572–579.
20. Whitney, H., *A theorem on graphs*, Annals of Mathematics **(2) 32** (1931), 378–390.
21. Brooks, R. L., *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **37** (1941), 194–197.
22. Vizing, V. G., *The chromatic class of a multigraph*, Cybernetics **1** (1965), 32–41.
23. Appel, K. — Haken, W., *Every planar map is four colorable*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 711–712.
24. Appel, K. — Haken, W., *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging*, Illinois J. Math. **84** (1977), 429–490.
25. Appel, K. — Haken, W. — Koch, J., *Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility*, Illinois J. Math. **84** (1977), 491–567.
26. Allaire, F. — Swart, E. R., *A systematic approach to the determination of reducible configurations in the four-color conjecture*, J. Combinatorial Theory Ser. B **25** (1978), 339–362.
27. Biggs, N. L. — Lloyd, E. K. — Wilson, R. J., *Graph Theory 1736–1936*, 1. vyd., Clarendon Press, Oxford, 1976.
28. Sedláček, J., *Úvod do teorie grafů*, 3. vyd., Academia, Praha, 1981.
29. Bosák, J., *Ako bol vyriešený problém štyroch farieb*, Pokroky mat. fyz. astr. **24** (1979), 181–201.
30. Robertson, N. — Sanders, D. P. — Seymour, P. — Thomas, R., *A new proof of the four-colour theorem*, ftp://ftp.math.gatech.edu/pub/users/thomas/fcdir/npfc.ps.