Jan Čižmár

Geometria na prahu 21. storočia z pohľadu jej päťtisícročného vývoja

In: Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. IV. (Slovak). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. pp. 123–161.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401057

GEOMETRIA NA PRAHU 21. STOROČIA Z POHĽADU JEJ PÄŤTISÍCROČNÉHO VÝVOJA

Ján Čižmár

ÚVOD

Okrúhle výročia obvykle dávajú aj v odborných oblastiach podnet na súvahu histórie, na sumarizáciu výsledkov, na rekapituláciu úspechov a omylov a na zamyslenie sa nad stavom odboru, nad jeho budúcnosťou, nádejami aj obavami, jasnými perspektívami aj hmlistou neistotou a niekedy jednoducho aj nad zmyslom jeho existencie. Z pohľadu súčasníka nepredstavuje vstup do 21. storočia v geometrii nijaký zásadný míľnik, ktorý by bol navyše umocnený prelomom tisícročí. No možno považovať za temer isté, že z odstupu niekoľkých storočí budú naši nasledovníci tento spektakulárny zlom vnímať optikou svojej doby ako výsostne významný fakt, ktorý hlboko zasiahol samy základy spoločenského života, vedu nevynímajúc.

Aké postavenie má v tomto kontexte *geometria* ako jedna z najstarších oblastí matematiky a vedy vôbec, aké otázky navodzuje jej súčasný stav a racionálne posúdenie jej trendov v najbližšej budúcnosti, má šance ako vedná disciplína aj ako vzdelávací predmet na školách všetkých stupňov? Prirodzene, tieto a podobné otázky nie sú izolovaným produktom nápadného dátumu, ktorý – ostatne – vo vlastnom vývine geometrie nie je nijako pozoruhodný, ale sa s dobovou naliehavosťou pravidelne vynárajú pri rôznych príležitostiach a v rôznych súvislostiach a prinášajú odpovede a prognózy navzájom líšiace sa obsahom, šírkou pohľadu a stupňom všeobecnosti. Je temer pravidlom, že čím vzdelanejší, rozhľadenejší a povolanejší je autor hodnotení a predpovedí, tým opatrnejšie, obozretnejšie a vágnejšie sú jeho vyjadrenia smerom do budúcnosti. A naopak, rezolútne, absolútne a neodvolateľne definitívne bývajú úsudky diletantov, u ktorých odvaha a suverénnosť vysoko stoja nad schopnosťami a vedomosťami. K druhu takýchto proroctiev patria vyjadrenia o *smrti* geometrie prinajmenšom v jej syntetickej podobe, reči o potrebe vyradenia klasického kurzu geometrie zo vzdelávacieho programu všeobecnovzdelávacieho školstva a z prípravy budúcich učiteľov matematiky. Tento článok je pokusom ukázať na historickom vývoji geometrie neopodstatnenosť takýchto úsudkov a načrtnúť niekoľko pohľadov na možné trendy používania a rozvíjania geometrie v modernej spoločnosti.

POKUS O PERIODIZÁCIU DEJÍN GEOMETRIE

Ak prijmeme za charakteristiku *historickej etapy* dejín geometrie existenciu písomných záznamov s geometrickou tematikou, majú dejiny geometrie päť tisíc rokov, ako to prezentuje prameň [1]. Ak však uznáme za prejavy geometrického poznania a myslenia archeologické artefakty s výraznými geometrickými prvkami, história, alebo presnejšie – *prehistória* geometrie – sa posunie do podstatne vzdialenejšej hĺbky času – do etapy existencie predchodcov človeka – *hominidov*.

Druhá odchýlka od všeobecne akceptovaného členenia dejín geometrie sa týka obdobia geometrie ako *exaktnej vedy*. Doba formovania geometrie ako modernej vedy od 17. storočia predstavuje oproti predchádzajúcemu obdobiu kvalitatívne vyššiu etapu, ktorej spojitým pokračovaním je aj geometria našej súčasnosti. Napriek duchovnej jednote vývoja v tomto období je však geometria 19. a 20. storočia zreteľne kvalitatívne odlišná od geometrie 17.–18. storočia, ktorá budovala *základy* modernej vedy.

Pri rešpektovaní týchto dvoch nových, mierne pozmenených pohľadov na vývin geometrie možno pripustiť ako korektnú nasledujúcu periodizáciu dejín geometrie:

1. **Prehistória:**
   „geometria" spoločenstiev hominidov a predcivilizačných spoločenstiev druhu *Homo sapiens* (čas pred asi 2 000 000 rokmi – začiatok 3. tisícročia pred n. l.)
2. **Geometria ako súčasť sofistikovanej praxe:**
   geometria v najstarších civilizáciách
   ($\approx$ 3 000 pred n. l. – $\approx$ 600 pred n. l.)
3. **Geometria ako exaktná veda:**
   geometria charakterizovaná dominanciou syntetickej metódy
   ($\approx$ 600 pred n.l.– prvá tretina 17. storočia)
4. **Geometria ako moderná veda:**
   geometria charakterizovaná prevahou analytickej metódy a začleňovaním metód nových moderných disciplín

   A. Budovanie základov (1. polovica 17. storočia – koniec 18. storočia)

   B. Diferenciácia a sústavná modernizácia (od začiatku 19. storočia po súčasnosť)

1. ELEMENTY GEOMETRIE V PREDCIVILIZAČNÝCH SPOLOČENSTVÁCH

Zárodky primitívnych geometrických poznatkov, prejavujúce sa v chápaní geometrického tvaru prírodných predmetov v životnom prostredí a v účelnom využívaní tohto tvaru, sú zjavné už v najstarších hominidných spoločenstvách druhu *Homo habilis* (Človek zručný), ktoré žili od času približne pred 2 000 000 rokmi až do času pred 1 800 000 /1 600 000 rokmi vo východnej Afrike. Hrubé kamenné pracovné nástroje nájdené v 2. polovici 20. storočia na území Tanzánie v Olduvaiskej rokline, ktorá je súčasťou dlhého Východoafrického priekopového zlomu, svedčia o poznaní, vyhľadávaní a zámernom opracúvaní kamenných nálezov na účelný a užitočne použiteľný tvar. Sprvu intuitívne a s postupom času empirické využívanie geometrického tvaru v *oldovanskej industrii* je presvedčivým dokladom prítomnosti geometrického myslenia.

Doba existencie nasledujúceho hominidného druhu *Homo erectus* (Človek vzpriamený) trvala podstatne dlhšie – asi od času pred 1 800 000 / 1 600 000 rokmi do času približne pred 500 000 / 400 000 rokmi. *Acheulská industria* (*acheuléen*) príznačná pre spoločenstvá tohto druhu je charakterizovaná dokonalejším opracúvaním prírodných kamenných materiálov a pestrejšou skladbou vyrábaných špecializovaných pracovných nástrojov. Tieto hominidné spoločenstvá si príležitostne budovali aj improvizované zásteny a primitívne stabilné chatrče, účelom ktorých bola ochrana spoločenstva pred nepriazňou počasia a útokom dravej zveri. Pozostatky najstaršej takejto – doteraz známej – zásteny boli nájdené v Olduvaiskej rokline v Tanzánii a jej vek sa odhaduje na jeden a tri štvrte milióna rokov. Prítomnosť určitej úrovne geometrického myslenia pri budovaní takejto stavby je neodmysliteľná.

Variabilita a technická dokonalosť kamenných, kostených, drevených ai. nástrojov, ktoré zhotovoval archaický *Homo sapiens* (Človek rozumný), žijúci od času asi pred 500 000 / 400 000 rokmi do času pred asi 40 000 rokmi, sú neporovnateľne vyššie než u predchádzajúcich hominidných druhov. V rámci tohto druhu žil a účinkoval aj *Homo neandertalensis* (Človek neandertálsky) v čase asi pred 130 000 rokmi do obdobia pred asi 35 000 / 30 000 rokmi. Novšie archeologicko-antropologické nálezy v Európe poukazujú na pomerne dlhú koexistenciu neandertálskeho človeka s dnešným druhom *Homo sapiens sapiens*, ktorý sa objavuje pred asi 40 000 rokmi.

Umelé výtvory produkované druhom *Homo sapiens sapiens* najmä v období neolitu vykazujú veľkú rozmanitosť pochopenia a aplikácie geometrických tvarov nielen v kategórii existenčne dôležitých predmetov a objektov, ale aj v oblasti činností a výtvorov, ktoré možno zaradiť do vyššej intelektuálnej sféry. Prirodzene, materiálna činnosť s využívaním poznatkov o účelnosti geometrických tvarov bola

a) primárne a prevažujúcim objemom produkcie zameraná na uspokojovanie základných *existenčných potrieb*, ku ktorým patrila výroba pracovných nástrojov, zhotovovanie oblečenia a stavba obydlí (charakteristickými ukážkami sú najmä nálezy zo stredného a severného Ruska a Ukrajiny – Kosťonki, Molodov, Mezirič, Puškari ai.), ale
b) sofistikované zručnosti sa prejavovali v dekoratívnej výzdobe úžitkových predmetov (výzdoba keramiky), v zhotovovaní ozdobných luxusných výrobkov (náhrdelníky, náramky a pod.),
c) veľkou mierou vo vysoko abstrahovanej podobe bolo geometrické videnie sveta prítomné v dielach *umelecko-kultového odrazu* reality a animistického obrazu sveta (drobné plastiky z Dolních Věstonic, maľby, kresby a rytiny z jaskýň južnej a juhozápadnej časti Francúzskeho Stredohoria – Lascaux, Niaux, Chauvet, Cussac, a severného Španielska – Altamira), ako aj v predmetoch rýdzo dekoratívnej povahy (dva kusy červeného okru s abstraktnými geometrickými rytinami zjaskyne Blombos v Južnej Afrike z doby pred asi 77 000 rokmi), a
d) ako nevyhnutná a podstatná zložka sa geometria podieľala na príprave a realizácii *astronomicko-kultových stavieb* predcivilizačných kultúr v Európe (menhiry, rondely – kruhovo-sústredné stavby lengyelskej kultúry na území Rakúska, Česka – Těšetice–Kyjovice, Vochov, Horoměřice a i., juhozápadného Slovenska – Svodín, Žlkovce, Bučany, Horné Otrokovice a ďalšie, Bavorska a východného Nemecka, kromlechy – Stonehenge, stavby typu *henge* – Woodhenge ap.); v týchto stavbách boli stelesnené hlboké empirické astronomické poznatky s vysokou úrovňou geometrickej abstrakcie a jej stavebného uplatnenia.

2. GEOMETRIA V NAJSTARŠÍCH CIVILIZÁCIÁCH

Najstaršie civilizácie sa formovali od prelomu 4. a 3. tisícročia pred n. l. do polovice 3. tisícročia pred n. l. v povodí veľkých riek v priaznivých pôdnych a klimatických podmienkach mierneho a subtropického pásma Afriky a Ázie. Existencia ozbrojenej moci, stojacej nad radovými príslušníkmi spoločenstva a plniacej určité vnútorné a vonkajšie funkcie štátu, a existencia písma ako prostriedku záznamu, evidencie a komunikácie, predstavujú dva najvýraznejšie spoločné rysy týchto kultúr, ktoré pre svoju existenciu a spoľahlivé fungovanie museli organizovať plnenie mnohých úloh materiálnej i duchovnej povahy. Patrilo medzi ne i zhromažďovanie a tradovanie poznatkov prevažne empirickej povahy z mnohých oblastí spoločenskej praxe. Geometria bola súčasťou sofistikovaných poznatkov, ktorých prvoradým účelom bolo mnohostranné utilitárne využitie. Tento základný cieľ poznania spolu s ďalšími podstatnými črtami spoločnosti bol aj silným determinujúcim faktorom hlavných rysov zárodočnej podoby vedy, ako sa utvorila v týchto starovekých kultúrach. Geometria nebola výnimkou: dochované materiály potvrdzujú, že vo všetkých regiónoch – podobne ako v zárodkoch iných vied – jej výraznými črtami boli *empirizmus, prakticizmus, pragmatizmus a dogmatizmus.* Regionálne rozdiely sa vzťahovali viac na formu než na podstatu obsahu.

2.1. Geometria v starovekom Egypte

Najrozsiahlejšie informácie o obsahu geometrie v starovekom Egypte podávajú – rovnako ako v ostatných matematických disciplínach – dva najväčšie a najspoľahlivejšie pramene – Rhindov (Londýnsky) papyrus a Moskovský papyrus. Prezentujú geometriu ako receptár numerických postupov zameraných na výpočet obsahov rovinných útvarov a objemov priestorových telies často sa vyskytujúcich vo vtedajšej praxi dobových odborníkov. Nie všetky návody a výsledky sú matematicky korektné, ale ich aproximatívna hodnota, získaná prinajmenšom v pôvodnom tvare dlhodobou skúsenosťou, bola prakticky a pragmaticky uspokojivá. Geometria bola nerozlučne spojená s geodéziou, ktorej hlavnými úlohami bolo vymeriavanie polí a stavieb, najmä veľkých verejných stavieb úžitkovej a monumentálnej povahy. Nivelácia základní pyramíd a presnosť orientácie ich vodorovných hrán v smere svetových strán, ako aj sklon bočných stien a hrán poskytujú výrečné indície o vysokých teoretických aj praktických geometricko-geodetických zručnostiach starovekých egyptských zememeračov a staviteľov. Takisto bohaté astronomické poznatky, ktoré o. i. boli základom pomerne presného kalendára, mali svoju oporu v značnej dokonalosti geometrických prostriedkov. Staroegyptský kalendár po nepodstatnej reforme v helenistickej ére bol podkladom juliánskeho kalendára, ktorý prežil v Európe a jej kolóniách minimálne do posledných desaťročí 16. storočia.

Hlavné písomné materiály staroegyptskej matematiky, ktorých didaktické určenie je zjavné, niektorými „cvičnými" geometrickými úlohami naznačujú zárodky vyššej úrovne teoretického myslenia a abstrakcie. Tieto stránky geometrie sa do novej kvality rozvinuli v gréckej geometrii, ktorá nepochybne vychádzala z poznatkov zemepisne blízkych starších kultúr.

2.2. Geometria v starovekej Mezopotámii

Písomných záznamov na hlinených tabuľkách popísaných klinovým písmom, ktoré vydávajú svedectvo o obsahu a úrovni matematických poznatkov niekoľkých kultúr striedajúcich sa v rozpätí tritisíc rokov na území niektorých dnešných prednovýchodných štátov, je objemom podstatne viac než zo starovekého Egypta. Navyše aj prevažná väčšina ostatných rozlúštených klinopisných textov obsahuje záznamy ekonomickej povahy, v ktorých matematické údaje hrajú významnú rolu.

Geometria v starovekých matematických mezopotámskych textoch sa svojím charakterom neodlišuje príliš od staroegyptskej geometrie. Neporovnateľne väčšie bohatstvo nálezov umožňuje však sledovať väčšiu variabilitu úloh, a pretože ide o záber z dlhšieho časového rozpätia, aj istý historický vývoj tematiky. Mezopotámska geometria je svojou podstatou takisto numerická geometria elementárnych rovinných a priestorových objektov, sledujúca výpočty dĺžok, obsahov rovinných obrazcov a objemov priestorových telies, ale v pokročilejšom období riešiaca aj sofistikovanejšie úlohy, ktoré okrem možného praktického uplatnenia mali pravdepodobne aj cvičné didaktické zameranie.

Výraznejšie sa v mezopotámskej geometrii objavuje aj nábeh na formovanie geometrických zobrazení. Od schematickej *mapy sveta*, ktorej len veľmi váhavo možno prisúdiť prítomnosť pravouhlého premietania, cez topologicky presnejší *plán mesta Nippur* vedie cesta k *plánu polí*, ktorý by aj v modernej geometrii obstál ako metricky korektný pravouhlý priemet objektu.

Geometria bola, samozrejme, organicky prítomná aj v mezopotámskej astronómii, ktorej bohatstvo záznamov o pozorovaniach sa stalo prvým vecným základom zovšeobecnení a systemizácie v gréckej a helenistickej *vedeckej* astronómii. Bez mezopotámskej faktografickej základne by sotva bol možný taký rýchly kvalitatívny pokrok v astronómii novej kultúry.

2.3. Geometria v starovekej Indii a Číne

Vyspelé štátne celky sa na týchto územiach začali formovať v porovnaní s civilizáciami Predného východu približne s poltisícročným časovým posuvom, niekedy v polovici 3. tisícročia pred n. l. Obmedzenosť doterajších informácií o kultúrach na týchto územiach zosilňuje fakt, že nie sú k dispozícii dostatočné relevantné písomné materiály s rozlúšteným obsahom, ktorých informačná hodnota by bola postačujúca na formulovanie podložených záverov. Preto úsudky o obsahu a úrovni matematického, špeciálne geometrického poznania týchto kultúr sa zakladajú len sprostredkovane na presvedčivých poznatkoch o významných výsledkoch materiálnej praxe.

Induská (harappská alebo protoindická) **kultúra** reprezentovaná do 18. storočia pred n. l. najmä vyspelými mestskými aglomeráciami Mohendžo-daro a Harappa sa vyznačovala veľkou koncentráciou obyvateľstva v urbanisticky vynikajúco riešených mestách s vysokou úrovňou komunálnej hygieny, prekvapivou účelnosťou rozľahlých verejných stavieb, ich dokonalým remeselným stvárnením a dôslednou unifikáciou základných prvkov stavebných materiálov. Toto sú hlavné zdroje informácií, na základe ktorých možno oprávnene predpokladať vysoký stupeň geometrického poznania ako nevyhnutnej zložky projektovania, plánovitej kalkulácie a zručnej realizácie stavieb a ostatnej komunálnej vybavenosti. Písomných nálezov na drobných artefaktoch je dosť, avšak ich krátkosť a tematická monotónnosť neumožnili dosiaľ rozlúštenie písma a jazyka.

Druhé obdobie veľkého rozmachu zaznamenala oblasť severnej Indie za panovania dynastie Guptovcov od 4. storočia pred n. l. Vývoj matematiky od tohto času bol napriek častým silným rušivým a deštrukčným faktorom viac-menej kontinuálny a geometria v ňom zaujímala významné postavenie. Do konca prvej polovice 1. tisícročia n. l. mala prevažujúco charakter rituálnej a prakticky utilitárnej zložky v komplexnom odraze univerza formou nábožensko-mytologicko-filozofických spisov.

Prvé štátne útvary na území **starovekej Číny** sa od polovice 3. tisícročia pred n. l. formovali hlavne v povodí Žltej rieky (Chuan-che) a mali výrazne sekulárnejší charakter než časovo súbežne existujúce kultúry v Indii. Tento výrazný rys sa zjavne odráža aj na forme vyjadrenia matematických, špeciálne geometrických poznatkov, ktoré sú podávané neutrálnym racionálnym štýlom. Z roztrúsených a nesystemizovaných poznatkov výrazne praktického zamerania, medzi ktorými napr. figuruje zárodočný tvar Pytagorovej vety z obdobia asi 2 200 rokov pred n.l., vzniklo v posledných storočiach pred n.l. dielo *Matematika v deviatich knihách*, ktoré bolo po niekoľko storočí základným kompendiom praktickej matematiky pre enormne široký okruh používateľov. Geometria sa v ňom podstatne nelíši od prameňov staroegyptských, mezopotámskych a indických, vyniká však dômyselnejšími numerickými postupmi a presnejšími výsledkami, medzi ktorými je pozoruhodná aproximácia čísla π

na šesť desatinných miest z 5. storočia n. l. Táto presnosť bola prekonaná až o 1 000 rokov neskôr v arabskej matematike. Používanie geometrických obrazcov ako konštrukčných a ornamentálnych prvkov v čínskom stavebníctve malo veľké rozšírenie, neviedlo však k nejakému teoretickému záujmu napr. o pravidelné mnohouholníky alebo pravidelné mnohosteny, tým menej k nejakým pokusom o logickú systemizáciu geometrických poznatkov a formovanie samostatnej koncíznej náuky.

3. GRÉCKO-HELENISTICKÁ GEOMETRIA (6. STOROČIE PRED N. L. – 6. STOROČIE)

Vývoj matematiky vo východnom Stredomorí a v priľahlých oblastiach za vyše tisíc rokov ustálil princípy tvorby vedeckých teórií, ktoré sú dodnes aktuálne aj v modernej vede.

3.1. Zrod geometrie ako exaktnej vedy

Začiatky matematiky ako exaktnej vedy sa začali formovať od začiatku 6. storočia pred n. l. na západnom pobreží Malej Ázie a na priľahlých ostrovoch v prostredí mestských štátov gréckych kolónií súbežne s procesom formovania iónskej racionalistickej filozofie, ktorá sa stala spolu s postupne vznikajúcou a rozvíjajúcou sa logikou metodologickou bázou špeciálnych vied, medzi ktorými vynikla matematika časom svojho zrodu i veľkoleposťou svojho rozvoja. Zakladateľ a najvýznamnejší predstaviteľ Milétskej filozofickej školy Táles bol zároveň najslávnejším a najproduktívnejším matematikom svojej doby a podľa prvého historika matematiky Eudema z Rodu (4. storočie pred n. l.) prvým vedcom, ktorý určité elementárnogeometrické tvrdenia dokazoval logickou argumentáciou. Táles, Pytagoras a jeho škola boli prví učenci, ktorí formulovali a logickou dedukciou dokazovali niektoré poznatky planimetrie aj stereometrie, špeciálne napr. konštruovanie a vlastnosti pravidelných mnohouholníkov a niektorých pravidelných mnohostenov. Pytagorovská aritmetika a modelovanie niektorých jej výsledkov pomocou figurálnych čísel anticipovali početné tvrdenia, ktoré moderná matematika dokazuje metódou úplnej indukcie. V tomto období sa už objavili aj formulácie troch klasických problémov antickej matematiky – *trisekcie uhla, kvadratúry kruhu* a *zdvojnásobenia* (objemu) *kocky.* Z pokusov o ich riešenie je najznámejšie riešenie trisekcie uhla grafickou metódou pomocou krivky *kvadratrix*, ktorej autorom bol Hippias z Elidy. Tradícia geometricko-grafických riešení pokračovala niekoľko storočí a nepociťovala sa ako používanie menejhodnotných metód; uprednostnenie a zabsolutizovanie euklidovských konštrukcií pomocou lineára a kružidla je až dielom neskoršej histórie.

Pytagorovský aritmetický filozoficko-mystický obraz sveta, založený na prirodzených číslach a ich pomeroch, utrpel zdrvujúci úder objavom iracionálnych čísel, v geometrickej interpretácii formulovaný ako *nesúmerateľnosť* niektorých dvojíc úsečiek, napr. strany a uhlopriečky štvorca, strany a uhlopriečky pravidelného päťuholníka. Geometrická substitúcia čísel úsečkami (v podstate *dĺžkami* úsečiek) a schopnosť riešenia aritmetických problémov týmto geometrickým modelom kládla už tu základy *geometrickej algebry*, neskoršie vystupujúcej v role (temer) univerzálnej metódy antickej matematiky.

3.2. Rast objemu, prvé teórie, prvé pokusy o systemizáciu (aténske obdobie)

Za prvých približne stopäťdesiat rokov existencie matematiky v starovekom Grécku sa nazhromaždilo množstvo poznatkov, ktoré prevažne vznikali *riešením úloh.* Tak napr. problém zdvojnásobenia kocky previedol Hippokrates z ostrova Chios, ktorý pôsobil v Aténach v druhej polovici 5. storočia pred n. l., na zloženú úmeru s dvoma neznámymi, ktoré boli skonštruovateľné ako geometrické priemery. Túto Hippokratovu modifikáciu klasickej úlohy geometrizoval okolo r. 350 pred n. l. Menaichmos zavedením kužeľosečiek, čím získal grafické riešenie úlohy. Jeho počin mal ďalekosiahly dôsledok: kužeľosečky vstúpili do súboru matematických objektov, zatiaľ síce len ako pomocný grafický prostriedok, ale predsa len ako objekt matematickej povahy.

Hippokratove *mesiačiky* priniesli prekvapivý fakt, že obsah niektorých rovinných útvarov ohraničených kružnicovými oblúkmi sa rovná obsahu určitých mnohouholníkov, ktorých hranicou je uzavretá čiara zložená z úsečiek. Tu sa v zárodku tajila možnosť sformulovať *teoretickú* otázku o všetkých *možných* typoch takých útvarov schopných kvadratúry. Pravda, úplnú odpoveď na otázku nevyslovenú v antike prinieslo až 18. a 20. storočie za použitia podstatne výkonnejších algebrických metód.

Za miniatúrne partikulárne teórie možno považovať niektoré tematicky zjednotené alebo blízke výsledky o metrických vlastnostiach planimetrických objektov (obvodové a stredové uhly v kružnici), alebo výsledky indukované podobnosťou (pomer obsahov kruhov ako pomer štvorcov polomerov) pochádzajúce od Hippokrata. Hippokrates nielenže podstatne prispel k rozšíreniu planimetrických poznatkov, ale podľa Eudema z Rodu aj pomerne úspešne realizoval pokus o systemizáciu vtedajšej sumy poznania v planimetrii zostavením *Základov.* Žiaľ, okrem Eudemovej zmienky niet žiadnych plauzibilných dokladov o Hippokratovom diele.

Obdobie, uprostred ktorého začala v Aténach veľmi vehementne a úspešne rozvíjať svoju činnosť Platónova Akadémia, prinieslo v matematike prácami Teodora a Teaiteta vrcholné úspechy v teórii iracionalít, pravda, vo výrazne geometrickej forme a s obmedzeniami, ktoré vyplývali z povahy konštrukčných prostriedkov. Teaitetov prínos zväčšuje jeho objav posledných dvoch typov pravidelných mnohostenov, ktoré boli pytagorovcom neznáme. Najvýznamnejšími formálno-teoretickými výdobytkami tohto obdobia boli Eudoxom axiomatizovaná *teória proporcií*, zahrňujúca v našom ponímaní teóriu racionálnych čísel a antických iracionalít, a axiomatizácia *metódy exhaustácie*, formulujúca v dobovej podobe teóriu geometrickej miery v rovine a v priestore (obsahy a objemy).

Na sklonku tohto obdobia okolo r. 320 pred n. l. bola grécka aritmetika a algebra temer totálne geometrizovaná a *geometrická algebra* bola temer univerzálnou metódou celej teoretickej matematiky. Princíp homogenity, vyplývajúci z geometrických modelov aritmetických a algebrických veličín a umožňujúci porovnávanie a operovanie len s objektmi toho istého geometrického rozmeru, efektívny a produktívny v antickej matematike, sa na prelome stredoveku a novoveku stal v matematike retardujúcim faktorom rozvoja algebry.

3.3. Geometria v alexandrijskej epoche

Obdobie približne od r. 300 pred n. l. do r. 150 n. l. patrí k najvýznamnejším úsekom matematickej tvorby v grécko-helenistickom svete, k epoche najväčších úspechov a najslávnejších výsledkov matematickej vedy v antickej histórii a k najsvetlejším kapitolám celej histórie svetovej vedy. V alexandrijskej inštitúcii *Museion* pracovali temer všetci významní matematici tej doby a ich diela sústredené v knižnici tejto inštitúcie predstavovali nesmierne bohatstvo poznania, neporovnateľné s čímkoľvek vo vtedajšom svete.

Chýr alexandrijskej školy v danej epoche odštartovali Euklidove *Základy*, bezkonkurenčne najslávnejšie dielo celej histórie svetovej matematiky, ktoré predstavuje historicky prvý *axiomaticko-deduktívny systém celej* vtedajšej *teoretickej* matematiky. Táto praktická realizácia Aristotelovej metodológie vedeckej teórie je revolučným kvalitatívnym krokom vo vývoji vedy (a nielen matematiky) a napriek pochopiteľným dobovým nedostatkom slúži dodnes ako etalón axiomaticko-deduktívnej výstavby teórie.

Tretie storočie pred n. l. je storočím Archimeda, geniálneho teoretika, praktika a aplikátora v oblasti dobových exaktných a „technických" vied. Hoci je Archimedes najznámejší svojimi objavmi a vynálezmi v odboroch mechaniky, hydrostatiky a hydrodynamiky, jeho najhodnotnejšie výkony a výsledky pochádzajú z oblasti geometrie, kde vynikol najmä invenčnou aplikáciou exhaustačnej metódy na výpočet dĺžok čiar, obsahov rovinných útvarov ohraničených sčasti oblúkmi kužeľosečiek a na výpočet objemov priestorových telies ohraničených úplne alebo sčasti kvadratickými plochami alebo ich časťami. Archimedove zásluhy o geometriu sa neohraničujú týmto výpočtom, pretože z jeho dochovaných spisov sú známe početné originálne riešenia nadmerne náročných planimetrických úloh, vrcholné výsledky o polopravidelných mnohostenoch (*archimedovské telesá*) a niektoré ďalšie významné geometrické výsledky.

Tretie storočie prinieslo aj prvú monograficky spracovanú partikulárnu geometrickú teóriu – *teóriu kužeľosečiek* vypracovanú Apolloniom. Kužeľosečky, ktoré boli od čias Menaichma v matematike prítomné ako nástroje grafického riešenia úloh a neskôr v rozličnom kontexte aj ako objekty teoretického výskumu, nevošli do Euklidovej systemizácie celej matematiky ako predmet záujmu rovnocenný s tými objektmi matematiky, ktoré boli zahrnuté ako neopomenuteľné do Euklidových *Základov.* Apolloniova vrcholne exaktná teória, realizovaná značne obmedzenými prostriedkami antickej geometrickej algebry, je skvelou ukážkou uplatnenia Aristotelovej metodológie vedy v špeciálnej oblasti matematiky a vzorom systemizovanej výstavby teórie v monotematickej oblasti vednej disciplíny. Dielo anticipovalo niektoré idey, ktoré sa v plnom rozsahu prejavili a rozvinuli až v modernej európskej matematike od 17. do 20. storočia.

Antická geometria stála aj pri zrode výstavby základnej sústavy pojmov antickej astronómie ako exaktnej vedy. Hipparchos v 2. storočí pred n. l., Menelaos v 1. storočí a Klaudios Ptolemaios v 2. storočí vypracovali solídne základy sférickej geometrie, goniometrie zameranej na priame použitie v astronómii a základy geometrických zobrazovacích metód použiteľných v astronómii a kartografii. Stereografická, gnómonická a ortografická projekcia guľovej plochy boli druhy zobrazenia, ktoré v zobrazovaní povrchu Zeme sú aktuálne dodnes. Významnými aktivitami v tejto oblasti boli v 3. storočí pred n. l. aj Eratostenove geodetické a astronomické merania, ktorými o. i. zistil pomerne presne dĺžku zemského poludníka.

Grécko-helenistická matematika – a špeciálne geometria – bola diametrálne vzdialená od utilitaristického chápania cieľov poznávania príznačného pre predchádzajúce aj niektoré súbežné a historicky nasledujúce civilizácie. Napriek tomu – súdiac podľa úrovne výsledkov „inžinierskych“ činností – aj tento prakticistický druh geometrického poznania a jeho tradovania musel byť v grécko-helenistickej spoločnosti bohato zastúpený a praktizovaný. Písomných prameňov o ňom je pomenej, ale ten najzachovalejší – Herónove spisy o aplikovanej matematike a špeciálne najvýznamnejší geometrický spis *Metrika* – vydáva presvedčivé svedectvo o bohatstve tematiky, rozsahu a dômyselnosti helenistickej aplikovanej matematiky okolo r. 100.

Teoretický prúd grécko-helenistickej geometrie pokračoval po Euklidovi výrazne v intenciách jeho *Základov.* Treba však hneď na začiatku poznamenať, že žiadne z diel jeho nasledovníkov a epigónov nedosiahlo veľkosť, úplnosť závažnosť vzoru. Štandardom prác sa stali *komentáre* Základov, vo väčšine prípadov komentáre len niektorých ich kníh. Provokujúcim miestom Euklidových Základov prakticky hneď od ich vzniku sa stal 5. postulát, ktorého komplikovanosť vzbudzovala domnienku, že výrok je dokázateľný ako veta. Nasledujúca vyše dvetisícročná história pokusov odôkaz tohto postulátu, prípadne o vyjasnenie, resp. upresnenie jeho postavenia v axiomatike, vošla do dejín matematiky pod názvom *teória rovnobežiek.* Už v antike sa touto problematikou zaoberal celý rad matematikov, z ktorých azda najvýznamnejší boli Poseidonios (2. storočie pred n. l.), Klaudios Ptolemaios (2. storočie), Simplikios a Aganis (6. storočie.)

3.4. Obdobie poklesu a koniec antickej geometrie

V posledných storočiach pred zánikom západnej Rímskej ríše zostávala alexandrijská škola ako ustanovizeň na území východnej Rímskej ríše hlavným strediskom vedeckej tvorby v mnohých oblastiach vedy v oblasti južnej Európy a Blízkeho východu. O matematike a špeciálne o geometrii to platí jednoznačne. Nepokojné pomery, nestabilná štátnopolitická aj ekonomická situácia a v neposlednom rade ofenzíva kresťanskej ideológie tvorili nie príliš priaznivý vonkajší rámec existencie vedeckej inštitúcie spätej s históriou a filozofiou odchádzajúcej epochy. Navyše antická veda tohto razenia vyčerpala vnútorné zdroje vlastného pokroku. Úpadok nemal lineárnu tendenciu, vyskytli sa v ňom krátke obdobia, v ktorých vynikajúci jednotlivci posunuli v úzkom koridore hranice poznania, ale ako celok veda tohto obdobia (približne od r. 150 do konca 1. štvrtiny 6. storočia) smerovala vonkajšími okolnosťami i vnútornými prejavmi k zániku.

Okrem diela vynikajúceho algebrika Diofanta, ktorý okolo r. 250 posunul najmä svojou symbolikou hranice starovekej algebry, žiaľ, bez rozvíjania tohto prínosu u nasledovníkov, znamenali v alexandrijskej škole mierne prekonanie úrovne klasického obdobia len práce dvoch významnejších komentárov Euklida – Pappa, ktorý žil v 3.–4. storočí, a Prokla v 5. storočí. Rozsiahle Pappovo dielo anticipovalo niekoľko významných myšlienok novodobej geometrie, najmä geometrie projektívnej, ktorej zrod a najväčší rozvoj spadá do 19. storočia.

V Rímskej ríši bola v storočiach okolo prelomu letopočtu na vysokej úrovni praktická geometria svojimi dôležitými aplikáciami v architektúre (Vitruvius), geodézii (agrimensori = „vymeriavači polí“, Columella, Agrippa) a kartografii (Agrippa). Veľkolepý Caesarov projekt geodetického zamerania a následného kartografického spracovania celého územia Rímskej ríše začali po dvoch desaťročiach od jeho smrti realizovať vojenskí inžinieri a kartografi pod Agrippovým vedením. Práca trvala niekoľko desaťročí a ani sám Agrippa sa jej neúplného konca nedočkal.

4. STREDOVEKÁ GEOMETRIA

Periodizácia dejín vedy v mimoeurópskych centrách má iné kritériá než dejiny v Európe. Časové zadelenie mimoeurópskej vedy podľa európskych kritérií má len pomocný význam pre sledovanie časového paralelizmu vývoja v rozličných častiach sveta.

4.1. Geometria v stredoveku na území Indie

Geometria na území Indie v čase európskeho stredoveku si zachovávala základné charakteristiky, ktorými sa vyznačovala približne do začiatku 7. storočia: bola to spätosť s úlohami a problémami, ktoré boli výrazne praktické alebo v takýchto oblastiach mali pôvod, a bola to nápadná orientácia na numerickú zložku úloh, ktorá často prekryla pôvodom geometrickú problematiku. Pravda, numericko-geometrické výsledky geometrie tohto obdobia nemali už zďaleka príznačný empirický charakter, ale boli podložené silnou logicko-deduktívnou argumentáciou, umocnenou často sofistikovanými numerickými postupmi. Naďalej však zostávala hlavná tematika geometrie ohraničená problémami výpočtu dĺžok, obsahov a objemov základných a primerane komplikovaných odvodených geometrických útvarov. Chýbali v nej

a) témy rýdzo teoretickej povahy, akou bola napr. teória rovnobežiek, a

b) systemizácia príznačná pre grécko-helenistické matematické myslenie.

Zato indická goniometria ako pomocná veda astronómie bola ukážkovou vedeckou subdisciplínou svojej doby. Nielen bohatstvom druhov goniometrických funkcií – poznala funkcie sínus, kosínus a sínusversus – prevyšovala súdobé susedné kultúry, ale dokonalosťou algoritmov na výpočet hodnôt týchto funkcií sa stala vzorom pre zostavovanie astronomicko-goniometrických tabuliek v ázijsko-európskom matematickom regióne.

4.2. Geometria v stredoveku na území Číny

Základné tematické okruhy geometrie v stredovekej matematike na území Číny, ako aj utilitárne zameranie a výrazná preferencia numerických metód sa v tejto oblasti neveľmi líšili od situácie v Indii. Silnejšími pozitívne pôsobiacimi faktormi boli štátna ingerencia centralizovaného štátu v organizácii vedeckej práce a vo výchove špičkových vzdelancov potrebných najmä v oblasti štátnej správy. Vypracovaná rigidita efektívnych schém ako súčastí numerických algoritmov na jednej strane uľahčovala numerické výpočty, na druhej strane zužovala priestor tvorivého hľadania nových metód. Napriek tomu dôsledná metodickosť dospela k výsledkom a metódam, ktoré moderná matematika objavila v numerickej analýze a numerickej algebre až v 19. storočí.

Vyššia úroveň teoretického myslenia v čínskej matematike v porovnaní s indickou našla svoj odraz v riešení geometrických úloh pokročilejšími metódami numerickej matematiky; napr. objemy určitých špekulatívne komplikovaných geometrických objektov sa riešili pomocou čiastočných súčtov radov.

4.3. Geometria v stredovekých islamských krajinách (8.–16. storočie)

Na rozsiahlych územiach Ázie, Afriky a Európy sa v 8.–16. storočí v ideologickom prostredí islamu a prevažne v arabskom jazyku v početných vedeckých centrách utvárala matematika, ktorá absorbovala a v nebývalej miere rozvinula najhodnotnejšie výsledky a najvyspelejšie prakticisticko-numerické tradície starovekej orientálnej, predovšetkým indickej matematiky, a teoreticko-deduktívnu líniu grécko-helenistickej matematiky, prezentujúcej najmä v geometrickej forme vrcholné vedecké bohatstvo dovtedajšieho historického vývoja svetovej matematiky. Cieľavedomosť a intenzita, s akou arabsko-islamská matematika preberala všetky dostupné hodnotné diela matematiky vtedajšieho sveta bez ohľadu na ich ideologický pôvod, vytvorili mocnú bázu, z ktorej matematika islamských krajín odštartovala svoju cestu k bezkonkurenčnému vedúcemu postaveniu v histórii stredovekej svetovej matematiky.

Prakticistická geometria, vychádzajúca najmä z klasických indických prameňov a doplnená herónovskou líniou praktickej antickej geometrie, prekonala už v prvých dielach svojich čelných predstaviteľov v 9. a 10. storočí (bratia banu-Músá, Abu 'l-Wafá) utilitárnu ohraničenosť predlôh a vyššou teoretickou úrovňou a používaním logickej argumentácie udala tón ďalšej tvorby v tomto odvetví geometrie.

Arabsko-islamská geometria najmä prácami ibn al-Hajthama – Alhazena (10.–11. storočie) úspešne rozvinula aj Archimedove invenčné postupy v aplikácii infinitezimálnych metód exhaustačnej metódy na riešenie obdobných úloh o obsahoch a objemoch v oblasti kužeľosečiek a kvadratických plôch.

Osobitne pozoruhodný pokrok zaznamenala v prácach arabských učencov *teória rovnobežiek*. V priebehu 7 – 8 storočí vzniklo v arabsko-islamskej geometrii vyše 50 komentárov Euklidových *Základov*, z ktorých vrcholné prekonávajú úroveň najznámejších antických komentárov. Komentovaniu Euklida sa venovali absolútne špičky arabskej matematiky: al-Džauharí (9. storočie), Thábit ibn Qurra (9. storočie), an-Najrizí – Anaritius (9.–10. storočie), ibn al-Hajtham, Omar Chajjám (11.–12. storočie), Nasír ad-Dín at-Túsí (13. storočie). V ich prácach sa objavili mnohé náznaky neeuklidovskej geometrie, ktoré sa s časovým posuvom niekoľkých storočí objavili nezávisle v európskej matematike; napr. ibn al-Hajtham študoval štvoruholník, ktorý ako významný objekt vedúci k neeuklidovským úvahám sledoval v 18. storočí J. H. Lambert. Analogická je situácia so štvoruholníkom, ktorému venoval pozornosť Omar Chajjám a o šesť storočí neskôr G. Saccheri. Na anticipáciu výrokov neeuklidovskej geometrie sú osobitne bohaté komentáre O. Chajjáma a at-Túsího, v ktorých je zjavné rozkolísanie euklidovskej axiomatiky a oživenie niektorých nerozvinutých Aristotelových ideí neeuklidovskej povahy.

V arabskej geometrii sa po prvý raz v histórii v traktáte at-Túsího konštituuje goniometria ako samostatná matematická disciplína nezávislá od astronómie, v rámci ktorej bola dovtedy goniometria len pomocnou disciplínou.

Objektívnym handicapom stredovekej európskej matematiky bola skutočnosť, že intenzívna konjunkturálna vlna prekladov významných diel arabsko-islamskej matematiky v 12.–13. storočí nemohla zachytiť najvyspelejšie diela tejto proveniencie, osobitne práce O. Chajjáma, at-Túsího a ešte neskoršie dielo al-Kášího.

4.4. Geometria v stredovekej Európe

Zánik Západorímskej ríše, rušné udalosti sprevádzajúce mohutné etnické pohyby na území západnej, strednej a juhovýchodnej Európy, známe pod súhrnným označením *sťahovanie národov*, rozpad rodového zriadenia, nestabilita prvých drobných štátnych útvarov, vznikajúcich na tomto území v prvých storočiach druhej polovice prvého tisícročia, a začiatky formujúcej sa feudálnej spoločnosti, znamenali pre väčšiu časť Európy markantný ústup z úrovne techniky, kultúry a vzdelanosti dosiahnutej pod rímskym panstvom. Prostredie ranofeudálnej spoločnosti, ktorá sa začala utvárať na ideologickej báze kresťanstva za rozširovania latinčiny ako zjednocujúceho komunikačného prostriedku, prinášalo málo materiálnych a duchovných stimulov pre používanie známych výsledkov vedy, tým menej pre jej rozvoj. Ohraničené ekonomické a administratívne potreby raného feudalizmu stačilo uspokojiť minimum elementárnych aritmetických a geometrických poznatkov sprostredkovaných v kláštorných školách z písomných prameňov posledného obdobia Západorímskej ríše a z útlych originálnych príručiek nevysokej úrovne, ďaleko zaostávajúcich za vedeckou úrovňou posledných storočí helenistickej matematiky. Potreba zložitejších a sofistikovanejších vedomostí z geometrie sa vynorila s rozvojom románskeho staviteľstva od 11. storočia a značne vzrastala s nástupom a rozmachom gotickej cirkevnej i svetskej architektúry v nasledujúcich storočiach. Rastúce nároky na obsah, objem i úroveň praktických aritmetických i geometrických vedomostí pomáhali saturovať od 11. storočia aj katedrálne a mestské školy.

Duchovné prostredie Byzantskej ríše, ktorá bola dedičkou a kontinuálnou pokračovateľkou Východorímskej ríše, nebolo príliš priaznivé pre tvorivú originálnu vedeckú tvorbu. V priebehu niekoľkých storočí sa síce objavilo zopár samostatných diel vychádzajúcich z grécko-helenistickej matematiky a reagujúcich v neveľkej miere aj na novšie arabské a sprostredkované indické pramene, ale celková úroveň týchto prác zaostávala za vedeckou a štylistickou hodnotou predlôh. Pravdaže, praktická geometria uplatňujúca sa v geodézii, kartografii a najmä v architektúre zaznamenala prenikavé úspechy realizáciou unikátnych monumentálnych cirkevných i sekulárnych stavieb, akými boli napr. chrám sv. Sofie a hipodróm v Konštantinopole.

Nevídané oživenie a rádovo vyšší kvantitatívny rast matematickej tvorby priniesla kampaň prekladov z arabskej a v menšej miere aj z gréckej a hebrejskej matematickej literatúry v 12.–13. storočí v Španielsku, južnom Francúzsku a na Sicílii. Preklady kľúčových diel významných arabských autorov spolu s dôležitými dielami európskej antickej matematiky pretlmočenými do latinčiny predstavovali špičkový štandard matematického poznania sprístupnený západoeurópskym vzdelancom a stráviteľný len v značne obmedzenej miere vo vrcholnom univerzitnom prostredí. Z tohto prostredia a spomedzi vrcholnej cirkevnej hierarchie pochádzali aj prví autori replík (Iordanus Nemorarius, Thomas Bradwardinus, Nicole Oresme ai.) a samostatných diel, ktoré boli na dlhé desaťročia predmetom štúdia na univerzitách. Práce v mnohom ohľade poplatné scholastickej filozofii mohli pri absencii plauzibilného matematického aparátu len veľmi nedokonale a prevažne špekulatívnym spôsobom formulovať určité idey, ktoré anticipovali metódy a výsledky oveľa neskoršieho vývoja matematiky v období formovania jej modernej podoby. K takým ideám patrí zárodok koncepcie štvorrozmerného priestoru v Oresmovom *Traktáte o formách.*

Nové silné impulzy vývoja prinieslo geometrii obdobie renesancie, v ktorom sa európska matematika v priebehu 16. storočia dostala znovu na čelo svetového vývoja. Jedným z najvýraznejších javov pokroku v geometrii bolo v 15. storočí v Regiomontanovom podaní oddelenie goniometrie ako samostatnej disciplíny od astronómie; historický proces, ku ktorému pred Regiomontanom výdatne prispel Peuerbach, mal v 16. storočí významných pokračovateľov, ku ktorým patrili napr. Kopernik a Rhaeticus. Zjavné pokroky zaznamenali geometrické metódy zobrazovania priestoru a zemského povrchu: v kartografii k exaktnosti zobrazovania značnou mierou prispel v 16. storočí Mercator a v rýdzo geometrickom ohľade už od 13. storočia intenzívne pracovala na exaktnom formovaní metód lineárnej perspektívy celá plejáda výtvarných umelcov a vedcov. Tento proces zameraný primárne na potreby umeleckého zobrazovania priniesol nemálo hodnotných výsledkov v poznávaní a rozširovaní vlastností euklidovského priestoru a dospel v nejednom prípade na prah revízie ustáleného chápania základných pojmov.

5. EURÓPSKA GEOMETRIA V 17.–18. STOROČÍ

5.1. Analytická geometria Descarta a Fermata

Zverejnenie analytickej metódy v geometrii v prvej polovici 17. storočia Descartom a sprístupnenie Fermatových výsledkov v tej istej oblasti približne v tom istom čase sa retrospektívne ukazuje ako jeden z revolucionizujúcich krokov, ktorými matematika 17. storočia vykročila k formovaniu svojej modernej podoby. Aritmetizácia a algebrizácia geometrických objektov a postupov nebola len procesom obráteným k antickej geometrizácii algebry, ale aj otvárala nedozerné možnosti uplatnenia v tých oblastiach matematiky, kde používanie geometrických modelov malo dôležitú metodologickú funkciu. *Sústava súradníc*, zavedená v úvodnom štádiu len v akejsi neúplnej podobe a používaná na vyjadrovanie geometrických útvarov, sa v relatívne krátkom čase vykryštalizovala na mocný nástroj rodiacej sa matematickej analýzy, v ktorej *graf funkcie* sa osvedčil ako účinný prostriedok zachytenia závislosti veličín a modelovania lokálnych vlastností a procesov. Nevyhnutné doplnenie a spresnenie základných prvkov kardinálneho pojmu *sústava súradníc* v Newtonovej verzii načrtlo v jeho klasifikácii kriviek tretieho stupňa široké možnosti aplikácie v rôznych oblastiach matematiky.

5.2. Zárodky projektívnej geometrie

Súbežne s rozvojom *analytickej* geometrie prebiehali aj v *syntetickej* geometrii euklidovského priestoru výskumy, ktorými sa čoraz silnejšie potvrdzovala potreba určitých korekcií a doplnení teórie tohto priestoru. Určitá neúplnosť tohto priestoru sa prejavovala pri pokusoch vybudovať exaktné základy zobrazovacích metód založených na stredovom premietaní, na ktorom boli založené všetky metódy lineárnej perspektívy, postupne konštituované už od 13. storočia. V 17. storočí hlavný podiel pokroku v tejto oblasti pripadá na G. Desarga, ktorého úvahy o rozšírenom euklidovskom priestore, o vlastnostiach jeho lineárnych útvarov, o zobrazeniach a transformáciách týchto útvarov, o vytváraní kužeľosečiek a ich transformáciách predbehli dobu o vyše pol druha storočia. Neobvyklosť Desargových úvah a výsledkov, absencia použiteľnej terminológie a symboliky a v neposlednom rade zložitosť a nejasnosť jeho výkladu vyvolali v súčasníkoch prevažne negatívny postoj k jeho publikáciám. Nepatrný počet stúpencov a propagátorov jeho diela nebol schopný vyvolať priaznivý obrat v očiach širšej verejnosti.

Hodnotné výsledky o kužeľosečkách založené na polarite odvodil z polarity vzhľadom na kružnicu pomocou stredového premietania F. de la Hire. Ani jeho dielo sa nestretlo u súčasníkov s náležitým pochopením.

Krátka esej o kužeľosečkách od B. Pascala mala za cieľ skôr popularizáciu, než šírenie pôvodných vedeckých výsledkov. Napriek tomu veta o väzbe šestice bodov jednoduchej kužeľosečky, neskôr pomenovaná po Pascalovi, patrí do základného fondu projektívnej teórie kužeľosečiek.

Na vznik ucelenej teórie projektívnej geometrie neboli ešte v 17. storočí vytvorené objektívne podmienky, ktorých vážnu zložku v 19. storočí predstavovali potreby deskriptívnej geometrie.

5.3. Geometrická tematika v matematickej analýze

Začiatky matematickej analýzy sú tesne späté s geometrickým znázorňovaním jej objektov a vzťahov medzi nimi. To isté sa vzťahuje aj na riešenie problémov fyziky, špeciálne mechaniky metódami a prostriedkami matematickej analýzy. Pomocná funkcia geometrickej zložky riešenia vyústila často do formulácie samostatnej geometrickej úlohy, v ktorej sa predmetom štúdia stala rovinná algebrická alebo transcendentná krivka, ktorej zaujímavé lokálne vlastnosti sa skúmali a zisťovali aparátom matematickej analýzy. Takto sa diferenciálna geometria kriviek a neskôr aj plôch rodila a tvorila v lone matematickej analýzy a jej poprednými tvorcami boli špičkové osobnosti celej matematiky a špeciálne jej dominantnej disciplíny – matematickej analýzy (Jakob a Johann Bernoulliovci, L. Euler ai.).

Rázne kroky ku konštituovaniu sa v rangu samostatnej matematickej disciplíny urobila diferenciálna geometria prácami A. C. Clairauta a najmä G. Mongea, ktorého vysoko hodnotené práce o aplikáciách matematickej analýzy v geometrii kriviek a plôch sa všeobecne považujú za dátum osamostatnenia diferenciálnej geometrie.

5.4. Aplikácie geometrie

V 18. storočí sa v geometrii udiala závažná udalosť, ktorá retrospektívne nastolila v novom svetle otázku vzťahu matematickej teórie a jej aplikácie. Problém nebol principiálne nový, lebo už niekoľko storočí bola na rozhraní geometrie a výtvarného umenia aktuálna úloha výstavby exaktnej teórie lineárnej perspektívy ako umelecko-technickej aplikácie abstraktnej teórie priestoru – stereometrie. Čoraz bližší posuv obsahom aj formou k exaktnej matematickej teórii dodával teórii lineárnej perspektívy stále výraznejšie charakter matematickej teórie, ktorý bol tým zreteľnejší, čím renomovanejší matematik túto tematiku spracúval. V druhej polovici 18. storočia to bol práve prvotriedny matematik J. H. Lambert, ktorého *Freye Perspective* dovŕšila formovanie tejto tematiky na rýdzo matematickú teóriu. Naďalej však išlo o aplikáciu teoretických matematických partií *v parciálnej oblasti* uplatnenia a nie o použitie v ucelenej tematicky uzavretej oblasti *vedy*. Blízko sa k takémuto druhu aplikácie dostal A.-F. Frézier, ale matematická zložka jeho koncepcie sa strácala v nadmernom objeme technických problémov.

Vyvážený pomer teoretického matematického aparátu a súboru geometrických objektov, ktoré boli špecifickým predmetom aplikácie, demonštroval svojou *Deskriptívnou geometriou* G. Monge. Jeho dielo je aplikáciou teoretickej syntetickej geometrie na základné aj komplikovanejšie objekty tejto oblasti obohatenej o pohľady a výsledky novších odvetví geometrie, čím vznikla nová disciplína, ktorá je na jednej strane aplikáciou matematickej teórie, na druhej strane je sama novou teoretickou disciplínou, ktorá spolu s niektorými ďalšími vednými oblasťami (matematická analýza, algebra, fyzika) tvorí teoretický základ vzdelávania inžinierov.

Nevídaný rozvoj deskriptívnej geometrie v 19. storočí spolu so vznikom a intenzívnym vývojom v pridružených odvetviach geometrie, z ktorých charakterom a syntetickými metódami bola k deskriptívnej geometrii najbližšie *projektívna geometria*, je eklatantným príkladom pozoruhodného fenoménu, keď aplikovaná disciplína sa sama stáva teoretickým odborom vrcholnej rýdzosti.

5.5. Teória rovnobežiek

18. storočie výrazne pomklo *teóriu rovnobežiek* ako tematicky vyhranenú časť elementárnej (syntetickej) geometrie k psychologicky neočakávanému rozuzleniu. V prácach G. Saccheriho, J. H. Lamberta a niekoľkých ďalších autorov sa nazhromaždil dostatok materiálu, ktorý navodzoval silné tendencie k formulácii výrokov neeuklidovskej povahy v problematike rovnobežiek. Inventarizácia historických výsledkov o zdanlivých dôkazoch 5. Euklidovho postulátu a o potenciálnych výrokoch protirečiacich euklidovskej geometrii v práci G. S. Klügela doviedla problematiku na prah formulácie *neeuklidovskej axiómy* o rovnobežkách. Do podobnej situácie sa v ojedinelých prípadoch dostávali aj sami autori výskumného bádania, no závery sa vždy končili nelogickou argumentáciou zamietajúcou neeuklidovskú formuláciu. Chýbal rozhodný krok, ktorý by bol prelomil bariéru tradície a hľadal logické dôsledky negácie euklidovskej axiómy.

6. GEOMETRIA V 19. STOROČÍ

19. storočie prinieslo v matematike rozsiahle zmeny, ktoré v niektorých oblastiach viedli k podstatnej premene štruktúry subdisciplín, v iných oblastiach napriek zdanlivému zachovaniu formy sa odohrali závažné, niekedy priam podstatné úpravy. Najmä v geometrii výrazne pokročila diferenciácia, ktorá mala za následok vznik celého radu nových geometrických disciplín.

6.1. Vznik a vývoj projektívnej geometrie

Etablovanie deskriptívnej geometrie ako samostatnej geometrickej disciplíny malo za následok otvorenie širokého priestoru na formovanie teoretickej bázy rôznych zobrazovacích metód, ktoré sa v predchádzajúcich storočiach otvorene či latentne pripravovali riešením konkrétnych úloh v aplikovanej, prevažne technickej praxi. Jedným z predmetov základného teoretického významu sa stala *projektívna geometria*, ktorej rozptýlené výsledky začali markantnou mierou pribúdať v prvých desaťročiach 19. storočia. Podmienky na systematickú vedeckú prácu sa začali utvárať až po napoleonských vojnách a jedným z prvých úspešných prejavov novej komplexnej vedeckej koncepcie bola publikácia ucelenej príručky projektívnej geometrie rozšíreného euklidovského priestoru od J.-V. Ponceleta. Rozšírený euklidovský priestor zostal na niekoľko desaťročí *jediným modelom* projektívneho priestoru, v ktorom syntetickými prostriedkami výdatne rozširovali obzory projektívnej geometrie vrcholní predstavitelia tohto predmetu v prvej polovici 19. storočia – J. Steiner a M. Chasles.

O zavedenie analytických metód do projektívnej geometrie sa najväčšou mierou zaslúžili A. F. Möbius a J. Plücker. Möbiove *barycentrické súradnice* otvorili bránu do projektívnej geometrie *homogénnym projektívnym súradniciam*, ktorých efektívne použitie a teoretické zovšeobecnenie na odlišnú koncepciu výstavby projektívneho priestoru majstrovsky predviedol Plücker.

Syntetický model projektívnej geometrie definitívne oslobodil od závislosti od metriky zavedením *dvojpomeru* na báze *harmonického dvojpomeru* Ch. von Staudt. Posledný z týchto pojmov zohral rozhodujúcu úlohu v zavádzaní homogénnej projektívnej sústavy súradníc do syntetického modelu.

V posledných troch desaťročiach 19. storočia sa projektívna geometria – prevažne vo svojej syntetickej podobe – stala pod názvom *novšia geometria* nezastupiteľnou súčasťou vzdelávania v deskriptívnej geometrii na popredných polytechnických inštitútoch v strednej a západnej Európe.

6.2. Vznik a vývoj neeuklidovských geometrií

Temer súbežne s oficiálnym zrodom projektívnej geometrie sa okolo r. 1830 objavili prvé publikácie N. I. Lobačevského a J. Bolyaia, prinášajúce ucelený systematický výklad hyperbolickej elementárnej geometrie. Aktuálne poznámky C. F. Gaussa, ktorými vo svojej súkromnej korešpondencii najmä v druhom desaťročí 19. storočia glosoval partikulárne neeuklidovské výsledky niektorých amatérov, naznačovali možnosti logického prielomu v teórii rovnobežiek, nikdy však u Gaussa neprerástli do tvorby uceleného systému geometrie odlišnej od euklidovskej. Zásluhy Lobačevského a Bolyia, ako aj priorita objavu Lobačevského sú nespochybniteľné, Gaussovi prislúcha uznanie za miernu *„ostýchavú“* podporu novej geometrie a jej tvorcov.

Nevšímavosť a nepochopenie väčšiny matematickej obce a stupídne útoky nekvalifikovaných obskurantných laikov sprevádzali neeuklidovskú geometriu až po vstup na vedeckú scénu novej matematickej generácie, ktorá plne chápala zmysel a význam novej teórie a bola schopná do jej rozvoja zapojiť aj nové matematické výsledky a metódy, ktoré medzičasom priniesol vývoj v iných matematických disciplínach. V takejto činnosti tkvie prínos B. Riemanna, E. Beltramiho, A. Cayleyho, F. Kleina a ďalších, v ktorých interpretácii a rozvinutí sa neeuklidovská geometria udomácnila v matematike ako plnohodnotná matematická disciplína. Navyše u F. Kleina jeho záujem o neeuklidovkú geometriu bol aj jedným z dôležitých faktorov, ktoré stimulovali jeho novú koncepciu geometrických priestorov s príslušnými grupami transformácií.

Retrospektívne sa filozofický a metodologický význam neeuklidovskej geometrie ukázal oveľa podstatnejší a ďalekosiahlejší. Keď turbulentný pohyb v matematike a v matematickej logike na prelome 19. a 20. storočia nastolil explicitne problém *povahy* matematických objektov a historicko-epistemologický prístup odhalil ich *ideálny* charakter a idea axiomatizácie teórie sa stala všeobecne akceptovateľnou (a akceptovanou), bolo zjavné, že tento mnohostranný proces kryštalizácie problému základov matematiky odštartovala latentne svojím vstupom na historickú scénu matematiky práve neeuklidovská geometria ako teória, ktorá síce skryto, ale v podstate veľmi briskne odmietla tézu o empirickom pôvode matematických pojmov.

6.3. Vývoj diferenciálnej geometrie

V diferenciálnej geometrii 19. storočie znamená dovŕšenie klasického obdobia, v ktorom teória rovinných kriviek v euklidovskej rovine a teória priestorových kriviek a plôch v trojrozmernom euklidovskom priestore študované metódami matematickej analýzy dospeli k uzavretiu hlavných okruhov problematiky. Výsledky F. Mindinga, J. F. Freneta, J. A. Serreta, K. M. Petersona, D. Codazziho a mnohých ďalších autorov predstavujú klasickú tematiku, ktorá v zmodernizovanej podobe tvorí obsah základného vysokoškolského kurzu diferenciálnej geometrie v dnešnej súčasnosti. 70. roky priniesli aktivity S. Lieho, ktorý čerstvo konštituovanú teóriu grúp aplikoval v podobe *spojitých grúp* ako modernizačný faktor v diferenciálnej geometrii. Diferenciálna geometria si v priebehu celého storočia udržiavala status progresívnej geometrickej disciplíny, ktorej napredovanie spoluvytváralo pokrok matematiky. Tento charakter si zachovala aj v nasledujúcom storočí, kde jej pokrok bol jedným z dominantných znakov vývinu geometrie.

6.4. Vývoj deskriptívnej geometrie

Z geometrických disciplín v 19. storočí šírkou tematiky a objemom publikácií najpozoruhodnejší rozvoj zaznamenala deskriptívna geometria. Jej vývoj v tomto storočí je azda najpresvedčivejším príkladom stimulácie rozvoja vedeckej disciplíny potrebami spoločenskej materiálnej praxe. Priemyselná revolúcia a prudký rozvoj strojovej výroby v niektorých krajinách západnej a strednej Európy vyžadovali nielen enormný nárast počtu pracovných síl zapojených priamo do výrobného procesu, ale azda ešte vo väčšej miere boli závislé od zvýšenia počtu kvalifikovaných technických kádrov s rýchlo postupujúcou a prehlbujúcou sa špecializáciou. Úloha výchovyl týchto kádrov pripadla polytechnickým inštitútom, ktoré podľa vzoru *École polytechnique* vznikali v nevídanom počte v administratívnych a priemyselných centrách kontinentálnej Európy veľmi často na báze existujúcich technických učilíšť strednej úrovne. Štátna podpora polytechnických inštitútov bola jedným z faktorov, ktoré priaznivo ovplyvňovali personálnu skladbu učiteľského zboru a technické vybavenie týchto škôl a nemalou mierou prispeli k tomu, že sa polytechnické inštitúty po začiatočných ťažkostiach a hľadaní pomerne rýchlo pretvorili na ohniská teoretickej i aplikovanej vedy a šíritele technického pokroku. Deskriptívna geometria zohrávala v tomto procese významnú úlohu. V štvrtom decéniu 19. storočia sa situácia s vyučovaním deskriptívnej geometrie na prvých polytechnických inštitútoch v Rakúsku, Čechách a Nemecku stabilizovala do tej miery, že deskriptívna geometria sa stala jedným z kľúčových predmetov teoretickej prípravy inžinierov a boli zriadené ústavy deskriptívnej geometrie so systemizovanými miestami profesorov na funkciu prednostov týchto ústavov. Prvé vedecké osobnosti rozvíjajúce deskriptívnu geometriu ako *teoretickú geometrickú disciplínu* vzišli z radov inžinierov – absolventov popredných inštitútov vo Viedni, Grazi, Zürichu, Prahe, Karlsruhe, Brne a v niektorých ďalších mestách Nemecka a Rakúska–Uhorska. Plejádu týchto osobností otvára J. Hönig, ktorý po štvorročnom intermezze na Baníckej a lesníckej akadémii v Banskej Štiavnici zakotvil r. 1843 na polytechnike vo Viedni, aby v priebehu dvadsiatich siedmich rokov svojej činnej služby sa stal duchovným otcom prvej silnej generácie teoretikov deskriptívnej geometrie, do ktorej patrili R. Němčík (Niemtschik), R. Staudigl, R. Skuherský a niektorí ďalší viedenskí absolventi. Spolu s významnými predstaviteľmi deskriptívnej geometrie iných regiónov, akými boli napr. K. Pohlke, W. Fiedler, E. Koutný, K. Pelz, G. A. V. Peschka a i. vybudovali teoretické základy všetkých hlavných zobrazovacích metód deskriptívnej geometrie a ukázali ich použitie na zobrazovanie kriviek a plôch tak teoretického, ako aj aplikovaného technického významu. Ich dielo v oblasti základov aj aplikácií bohato rozvíjali nasledujúce generácie, z ktorých vynikli Ch. Wiener, J. Sobotka, E. Müller a mnohí ďalší, ktorí do základov deskriptívnej geometrie vnášali teoretické spresnenia, medzičasom nazhromaždené v syntetickej euklidovskej geometrii a v projektívnej geometrii. Pozitívne stimulovanie a ovplyvňovanie deskriptívnej a projektívnej geometrie je jeden z najcharakteristickejších rysov vývoja geometrie v týchto oblastiach v druhej polovici 19. storočia.

Ešte jeden fenomén vo vývoji deskriptívnej geometrie nemožno prehliadnuť: najväčší rozvoj v 19. storočí nezaznamenala táto disciplína v krajine svojho zrodu – vo Francúzsku, ale v krajinách strednej Európy, osobitne v Rakúsku-Uhorsku, kde predchádzajúci vývoj v geometrii nenasvedčoval, že práve tento región by sa mal stať zástavníkom novej disciplíny v takej miere, ktorá dala podnet európskym odborníkom – ako cituje ich mienku taliansky matematik a historik matematiky a deskriptívnej geometrie G. Loria – označiť Rakúsko-Uhorsko – predovšetkým zásluhou rakúskej časti monarchie – za *krajinu deskriptívnej geometrie.* Neprehliadnuteľnú rolu v tomto dianí zohrala aj *česká geometrická škola* a špecifickým spôsobom v konštituovaní deskriptívnej geometrie ako plnokrvnej matematickej disciplíny vynikli nemeckí autori zo *sudetských oblastí* Čiech a Moravy.

6.5. Vznik a vývoj n-rozmernej geometrie

Niektoré náznaky zárodkov n-rozmernej geometrie v staršej histórii (ako napr. u N. Oresma v 14. storočí alebo u M. Stifela v 16. storočí) svojou náhodilosťou a izolovanosťou nemali šancu prerásť v ucelenú systematickú teóriu n-rozmerného priestoru. Metódy a prostriedky matematickej analýzy a algebry v 19. storočí poskytovali už dostatočne výkonný aparát, pomocou ktorého bolo možné budovať teóriu n-rozmerného metrického priestoru a jeho objektov, ako to naznačila geometrická interpretácia kvadratickej formy n premenných u C. G. J. Jacobiho. Napriek týmto možnostiam, ktoré utvárali priaznivé podmienky na konštituovanie n-rozmernej geometrie v univerzitnom prostredí, prvá systematická teória n-rozmerného priestoru vyšla z pera stredoškolského profesora H. G. Grassmanna, a to r. 1844 v značne nezrozumiteľnej forme prestúpenej úsilím prostriedkami filozofie podložiť matematickú podstatu objektov n-rozmernej geometrie a r. 1862 už korektným matematickým spôsobom, blízkym axiomatickej metóde, podávajúca ucelenú teóriu *lineárnej extenzie.* (Pochopiteľným nedostatkom Grassmannovej teórie bola neobratná terminológia, ktorá bola – okrem iných momentov – vážnou prekážkou rýchleho a všeobecného rozšírenia jeho knižných publikácií medzi európskymi matematikmi 19. storočia.) Fundamentálna práca B. Riemanna z r. 1854, v ktorej o. i. zaviedol pojem n-rozmernej variety s metrikou, bola taktiež príliš predčasná na hlbšie pochopenie a rozpracovanie súčasníkmi.

V pravom geometrickom duchu opísal štruktúru podpriestorov i metrických objektov n-rozmerného metrického priestoru r. 1859 L. Schläfli. Napriek nie príliš vhodnej terminológii a skutočnosti, že rozsiahla práca bola publikovaná len časopisecky, zohral tento Schläfliho článok významnú úlohu v šírení idey a metód n-rozmerného priestoru v európskej matematickej komunite. Terminológiu n-rozmernej metrickej geometrie zmodernizoval a uviedol do stavu blízkeho dnešnej norme C. Jordan r. 1872. K zvýšeniu prehľadnosti štruktúry n-rozmerného priestoru prispela aj axiomatizácia n-rozmerného vektorového priestoru, ktorej autorom bol G. Peano, hoci tesná existenčná súvislosť vektorového a geometrického priestoru, ako ju dnes prezentuje obvyklá definícia n-rozmerného afinného priestoru, je zjavná až z axiomatizácie afinného priestoru od H. Weyla z r. 1918.

K vypracovaniu algebrických metód analytickej geometrie prispel A. Cayley. Jeho kvantiky (= polynomické formy) pre prípad $n = 2$ interpretoval F. Klein ako definujúce formy metrík v projektívnej rovine.

6.6. Vznik a vývoj algebrickej geometrie

Početné čiastkové výsledky o algebrických krivkách a plochách sa objavovali v rôznych matematických disciplínach už v 17. a 18. storočí. Príkladom takých výsledkov sú Newtonova metrická klasifikácia rovinných kriviek 3. stupňa, Eulerova klasifikácia kriviek 4. stupňa, algebrické výsledky É. Bézouta interpretované dnes ako vety n-rozmerného projektívneho priestoru, a v 19. storočí závažné výsledky J. Plückera a O. Hesseho o invariantoch algebrických kriviek v projektívnej rovine a i. Chýbala však systematická teória základov n-rozmerného projektívneho priestoru nad poľom reálnych alebo komplexných čísel, hoci niektoré úvahy, konštrukcie a výsledky M. Noethera a L. Cremonu existenciu takých priestorov predpokladali a vyžadovali. Práve práce L. Cremonu o biracionálnych transformáciách boli mocným stimulom, ktorý *v talianskej škole* algebrickej geometrie viedol k vypracovaniu bohatej teórie n-rozmerných projektívnych priestorov nad poľom reálnych čísel a nad poľom komplexných čísel, transformácií týchto priestorov, lineárnych podpriestorov a ďalších význačných podmnožín týchto priestorov atď. Výsledky tejto školy, reprezentované dielami F. Severiho, C. Segreho, E. Bertiniho, F. Enriquesa a ďalších, boli do polovice dvadsiatych rokov 20. storočia bez väčších námietok prijímané ako solídny základ algebrickej geometrie, vychádzajúcej z pokrokov matematickej analýzy – špeciálne nad poľom komplexných čísel – a algebry, najmä lineárnej, v posledných desaťročiach 19. storočia.

7 GEOMETRIA V 20. STOROČÍ

7.1. Prestavba základov geometrie, elementárna geometria, neeuklidovské geometrie

Zvýšený záujem o spresnenie logických základov syntetickej geometrie v prvých 2-3 desaťročiach 20. storočia bol spôsobený súbehom niekoľkých závažných faktorov. Zakotvenie neeuklidovskej geometrie ako plnohodnotnej geometrickej disciplíny v sústave geometrických odborov v sedemdesiatych rokoch 19. storočia bolo podnetom k revízii euklidovskej axiomatiky a systematiky a silným stimulom úsilia prebudovať celú koncepciu euklidovskej geometrie na báze dobovej úrovne exaktnosti. Názorným a úspešným výrazom tejto snahy bola axiomatika M. Pascha z r. 1882, rešpektujúca Euklidovu akceptáciu potenciálneho nekonečna a jeho aplikáciu v budovaní základných pojmov elementárnej geometrie. Pasch ešte nemal k dispozícii *logické prostriedky*, ktoré priniesol pokrok matematickej logiky v posledných dvoch desaťročiach 19. storočia a o ktoré sa mohol oprieť D. Hilbert pri koncipovaní svojich *Základov geometrie* (Grundlagen der Geometrie, 1899). Tretím faktorom pozitívne ovplyvňujúcim prestavbu základov geometrie bola *teória množín* G. Cantora, ktorá u Hilberta zohrala úlohy silnej zložky metodologickej bázy novej koncepcie elementárnej geometrie. A najvýznamnejším faktorom, ktorý rozhodujúcim spôsobom a dlhodobo ovplyvňoval obsah a formu nových axiomatizovaných systémov elementárnej geometrie, boli *filozoficko-metodologické koncepcie* výstavby matematických teórií formované v prvých desaťročiach 20. storočia. Z nich sa v elementárnej geometrii najviac presadil Hilbertov *formalizmus*, ktorý v spojení s Cantorovou teóriou nekonečných množín tvoril metodologickú bázu prevažnej väčšiny diel prezentujúcich axiomatiku elementárnej geometrie syntetickou metódou. Pokusy budovať axiomatiku geometrie na báze *konštruktivizmu*, akým je napr. axiomatika A. D. Alexandrova zo sedemdesiatych rokov 20. storočia, sú zriedkavé a dokumentujú vážne technické a didaktické problémy pri realizácii tejto koncepcie.

Axiomatizácia neeuklidovských geometrií sa s istým časovým posuvom uberala podobnými cestami ako v euklidovskej geometrii a v druhej polovici storočia sa axiomatiky oboch geometrií objavovali spravidla paralelne v tých istých knižných publikáciách. V posledných desaťročiach 20. storočia sa značne rozrástol počet publikácií s tematikou analytických metód a aplikačných problémov v neeuklidovských rovinách a priestoroch (napr. tematika plnení a pokrytí).

Početných skeptikov, považujúcich syntetickú geometriu za uzavretú disciplínu podobnú mŕtvym jazykom, je poučné upozorniť na fakt, že nejedna popredná svetová vedecká osobnosť geometrie sa na sklonku svojej vedeckej kariéry vracia k syntetickej geometrii ako k hlbokým zdrojom a koreňom geometrického poznania. Okrem spomenutého A. D. Alexandrova stačí za všetkých novších autorov uviesť špičkového severoamerického odborníka v algebrickej geometrii R. Hartshorna s jeho monografiou *Geometria: Euklides a po ňom* (Geometry: Euclid and beyond, 2000).

7.2. Analytická geometria; projektívna geometria

Analytická geometria v klasickom ponímaní odvodenom od Descarta a Fermata dospela na začiatku 20. storočia k opisu štruktúry n-rozmerného euklidovského priestoru v monografickej realizácii značne vzdialenej od možnosti zavedenia do bežného vysokoškolského kurzu. Z novších algebrických štruktúr a metód prenikla významnejšie do analytickej geometrie len teória vektorových priestorov, aj to vo väčšom rozsahu až v druhej polovici 20. storočia, keď sa táto teória stala bázou zavedenia n-rozmerných afinných priestorov, z ktorých sa potom špecializáciou pomocou zavedenia skalárneho a vektorového násobenia vektorov prechádza k metrickým priestorom a špeciálne k priestorom euklidovským. Didaktická transpozícia tejto tematiky sa vo vysokoškolskej výučbe začala všeobecne realizovať v šesťdesiatych rokoch 20. storočia. Doteraz sa vo vysokoškolskom kurze analytickej geometrie nedospelo k dôslednému vybudovaniu základného reťazca geometrických priestorov a príslušných grúp transformácií začínajúc n-rozmerným projektívnym priestorom s grupou kolineácií pokračovaním cez afinný priestor s grupou afinít a ekviformný priestor s grupou podobnostných transformácií po metrický priestor s grupou zhodnostných transformácií.

Projektívna geometria sa v strednej Európe od začiatku 20. storočia postupne zbavovala tesného súžitia s deskriptívnou geometriou a od tretieho–štvrtého desaťročia sa intenzívne venovala skúmaniu svojich základov, analýze rôznych možných axiomatík, štúdiu rôznych druhov projektívnych priestorov, špeciálne rovín, a výskumu súvislostí druhov projektívnych priestorov s bázovými algebrickými štruktúrami. Mnohé z týchto výsledkov, známe už v tridsiatych-štyridsiatych rokoch 20. storočia, sa vo výučbe objavili – aj to nezriedka len okrajovo – až v sedemdesiatych rokoch. Syntetická projektívna geometria, ktorá v medzivojnovom období tvorila v Česko-Slovensku súčasť povinnej vysokoškolskej prípravy stredoškolských učiteľov matematiky, zmizla v období po 2. svetovej vojne z učebných plánov tohto štúdia úplne.

Ako súčasť širšej geometrickej prípravy zažila projektívna geometria v svojej analytickej podobe určitú renesanciu v čase nástupu počítačovej geometrie a počítačovej grafiky, keď sa v počítačových programoch ukázalo veľmi výhodným používanie homogénnych súradníc, charakteristických pre projektívny priestor. Sprvu rýdzo utilitárne a teoreticky nie príliš korektné používanie týchto súradníc prerástlo do seriózneho záujmu o tematiku a vypracovanie teoreticky veľmi hodnotných knižných príručiek projektívnej geometrie. Ostatne, takáto zmena v postoji k teórii a v úrovni ovládania teórie sa týka nielen projektívnej geometrie, ale aj niektorých ďalších disciplín modernej geometrie a matematiky vôbec; prinajmenšom to platí o diferenciálnej a algebrickej geometrii, topológii, v nevyhnutnom rozsahu aj o deskriptívnej geometrii a niektorých ďalších oblastiach.

7.3. Diferenciálna geometria; diferencovateľné variety; riemannovská geometria

Vývoj diferenciálnej geometrie v 20. storočí pokračoval z veľmi solídnej a širokej základne, ktorú táto disciplína dosiahla v 19. storočí. Veľa publikovaných prác sa zaoberalo štúdiom konkrétnych objektov – kriviek a plôch – známymi štandardnými metódami. Časť výskumnej činnosti bola zameraná na zovšeobecnenie významných rovinných a priestorových objektov do n-rozmerného reálneho euklidovského priestoru. Pokrok disciplíny však spočíval vo vypracúvaní a aplikácii nových účinných metód, ktorými bolo možné získať nové a hlbšie výsledky o známych objektoch, resp. o nových triedach objektov. Zavedenie vektorového a tenzorového počtu do metód výskumu objektov nebolo len jednoduchým zdokonalením technického aparátu, ale umožňovalo hlbšie, všeobecnejšie a prehľadnejšie vystihnutie známych i novodefinovaných tried objektov, ktorých ambientný priestor nezostával ohraničený euklidovskou metrikou, ale sa rozširoval výberom početných iných metrík, ba menil sa aj na priestor afinný a projektívny. Nové oblasti výskumu sa otvárali vypracovaním jemnejších metód sledovania lokálnych vlastností; významnou metódou tohto druhu bola napr. *metóda pohyblivej súradnicovej bázy* zavedená É. Cartanom. Sféra objektov skúmania sa enormne rozšírila prechodom od reálnych ambientných priestorov k priestorom nad poľom komplexných čísel, čím pribudlo do technickej výbavy diferenciálnej geometrie rozsiahle bohatstvo metód funkcií n komplexných premenných. Veľké šance nových prístupov otváral aj pokrok v teórii systémov parciálnych diferenciálnych rovníc, v ktorej geometrická interpretácia odhaľovala nové súvislosti medzi touto klasickou oblasťou matematickej analýzy a diferenciálnou geometriou. Obojstranne užitočným a plodným zdrojom pokroku je trvalo aj vzťah diferenciálnej geometrie a modernej algebry, matematickej analýzy komplexných premenných a adaptácie jej metód v teórii diferencovateľných variet a v riemannovskej geometrii. – Všeobecne, zbližovanie a prelínanie viacerých disciplín z rôznych odborov matematiky je príznačným rysom vývoja matematiky najmä v druhej polovici 20. storočia, fenoménom veľmi produktívnym v získavaní nových závažných poznatkov a metód.

7.4. Algebrická geometria; algebrické variety; teória schém

Pozoruhodným vývojom prešla v 20. storočí algebrická geometria. Klasický štýl talianskej školy opierajúci sa o lineárnu algebru a algebru polynómov sa ešte na začiatku dvadsiatych rokov zdal dominantný a na dlhú dobu budúcnosti perspektívny. B. L. van der Waerden v sérii článkov *K algebrickej geometrii I – XVII* (Zur algebraischen Geometrie) v druhej polovici dvadsiatych rokov ukázal, ako sú pojmy, metódy a výsledky nemeckej školy komutatívnej algebry sústredenej okolo Emmy Noetherovej vhodnou základňou, na ktorej možno reformulovať celý systém základov klasickej algebrickej geometrie a pozdvihnúť ho na vyšší stupeň abstrakcie. Celý proces prestavby, na ktorom hlavný podiel mali van der Waerden a O. Zariski, trval okolo dvadsať rokov a bol zavŕšený monografiou A. Weila *Základy algebrickej geometrie* (Foundations of algebraic geometry, 1946). Táto nová *ideálová* koncepcia algebrickej geometrie ešte nestihla pozbierať všetky plody svojich načrtnutých programov, keď sa v prácach A. Weila, J.-P. Serra a A. Grothendiecka objavili zreteľné kontúry prieniku novokonštituujúcich sa matematických disciplín (homologická algebra, teória zväzkov) do základov algebrickej geometrie. Komplexné uplatnenie našli tieto nové odbory v grandióznom mnohozväzkovom diele A. Grothendiecka *Základy algebrickej geometrie* (Éléments de la géométrie algèbrique, 1960–1967), v ktorom sú celé základy algebrickej geometrie metodologicky prebudované pomocou najnovšej komutatívnej algebry, teórie kategórií, algebrickej topológie a teórie zväzkov. Dielo ojedinelé rozsahom, šírkou koncepcie, hĺbkou pojmov a záberom tematiky bolo zrejme jedným z dôvodov, ktoré viedli D. Mumforda nazvať v sedemdesiatych rokoch 20. storočia algebrickú geometriu disciplínou 21. storočia, ktorú by bolo možné prednášať sto semestrov.

Nové prenikavé úspechy zaznamenala v nasledujúcich desaťročiach algebrická geometria v spojení s algebrickou teóriou čísel.

7.5. Topologické, algebrickotopologické a kategoriálne metódy v geometrii

Prestavba základov algebrickej geometrie v podaní A. Grothendiecka v šesťdesiatych rokoch 20. storočia je excelentným príkladom syntézy najnovších matematických disciplín v role metód výstavby iného matematického odboru. Ešte skôr než v algebrickej geometrii začal tento proces prebiehať v diferenciálnej geometrii, kde sa v postavení metódy začali uplatňovať prostriedky všeobecnej topológie, diferenciálnej a algebrickej topológie, matematickej analýzy v komplexnej oblasti a teórie kategórií. V diferenciálnej geometrii tento proces nadobudol objemnejšie a spektakulárnejšie rozmery hlavne zásluhou väčšieho počtu špičkových osobností, ktoré sa tvorbe tejto novej diferenciálnej geometrie venovali. Pozitívnu úlohu v orientácii niektorých pracovníkov a určitých vedeckých centier na novú koncepciu diferencovateľných variet iste zohrávala aj tradícia, ktorá v porovnaní algebrickej a diferenciálnej geometrie vysoko prevažovala v prospech diferenciálnej geometrie. (To bol aj prípad Česko-Slovenska, špeciálne skupín v Prahe a v Brne.)

Špičková vedecká práca v diferenciálnej a algebrickej geometrii je nemysliteľná bez suverénneho tvorivého ovládania tých moderných disciplín dnešnej matematiky, ktoré väčšinou vznikli okolo polovice 20. storočia a naplno sa rozvinuli v jeho druhej polovici. Navyše predpokladá na vrcholnej úrovni ovládanie špecifickej tematiky odboru so všetkými nuansami metód, ktorými sa dosahujú špičkové výkony. Dosiahnutie tejto úrovne je sotva možné bez dlhšieho študijného pobytu v popredných vedeckých centrách u vedúcich vedeckých osobností.

7.6. Aplikácie geometrie

Potreba a užitočnosť geometrie v početných technických a prírodovedných odboroch stojí mimo akejkoľvek diskusie. Bez použitia náležitých geometrických pojmov, výsledkov, vlastností a metód by teoretická výstavba a primeraná prax v takých odboroch, akými sú strojárenstvo, stavebníctvo, geodézia, geológia, geografia, špeciálne kartografia, fotogrametria, kinematika, geometrická optika, astronómia a mnohé ďalšie, nebola úplná, ba v niektorých prípadoch celkom nemožná. Často sa však význam slova *aplikácia* chápe sploštene a jednostranne ako použitie výsledkov, metód a prostriedkov jedného odboru na uspokojovanie potrieb a riešenia úloh iného odboru. Pritom značne rozdielne sú nielen rozsah a intenzita používania aplikovaného odboru v oblasti aplikácie, ale často veľmi odlišné sú postavenie a funkcia, ktoré predmet aplikácie v aplikačnej disciplíne zastáva. Oblasť aplikácie sama o sebe môže byť výsostne teoretickou disciplínou, v ktorej status používaných objektov aplikovanej disciplíny je identický so statusom homonymných objektov v aplikovanej oblasti. Príkladom takejto relácie je vzťah elementárnej (syntetickej) geometrie ako teoretickej bázy k deskriptívnej geometrii ako oblasti aplikácie: status základných pojmov geometrie, ktorými sú všetky primitívne aj definované pojmy axiomatickej výstavby geometrie zostáva ten istý pri začlenení do výstavby štruktúry deskriptívnej geometrie. Tento úkaz je obvyklý pri aplikácii matematickej disciplíny v inom matematickom odbore, aj to nie vždy; napr. reprezentácia reálneho čísla v zmysle definície teoretickej aritmetiky je v teórii aproximácií v numerickej matematike vždy číslo racionálne. Aplikácia matematickej disciplíny v technickom odbore, tým viac v tzv. *matematizácii* bežných situácií reálneho života pracuje s *abstrakciami* reálnych objektov, ktoré predstavujú status objektov matematiky *v predvedeckom štádiu* jej vývoja. Už Euklides vo svojich (nedokonale) axiomatizovaných *Základoch* narába s matematickými objektmi ako *ideálnymi* prvkami matematicko-logickej štruktúry a tie isté atribúty majú aj relácie medzi nimi a operácie s nimi. Že sa táto ich povaha explicitne vyjasnila až na začiatku 20. storočia, nemení nič na podstate vedeckej skutočnosti.

V aplikáciách geometrie ide neraz o aplikovanie viacstupňové, sprostredkované. Napr. v technickej kartografii sú bezprostredne aplikovanými disciplínami deskriptívna geometria a matematická kartografia, ktoré sú už samy ako teoretické disciplíny aplikáciami syntetickej geometrie. Efektivita a korektnosť sprostredkovanej aplikácie závisí v nemalej miere od exaktnosti prvej aplikácie, ktorá by ako základná podmienka mala byť stále preverovaná. Nevyhnutnou podmienkou životaschopnosti a produktívnosti používania matematickej disciplíny ako oblasti metód a prostriedkov je sledovanie a využívanie *pokroku* tejto disciplíny. Realizácia tejto požiadavky má spravidla charakter generačného skoku a závisí v značnej miere od rozhľadu a agility popredných osobností oblasti aplikácie; silne pozitívnym a želateľným faktorom je úzka a intenzívna medzirezortná spolupráca. Mala by byť stabilnou konštantou a nie náhodilým javom vedeckej práce.

7.7. Aritmetická algebrická geometria; diofantovská geometria a jej vrcholné úspechy

Metodologická prestavba algebrickej geometrie v šesťdesiatych rokoch zastala prirodzeným vývojom pred nevyriešenými problémami algebrickej teórie čísel, ktorá bola druhou životnou záujmovou oblasťou popredných predstaviteľov algebrickej geometrie. Geometrická interpretácia diofantovskej problematiky teórie čísel s nevyriešenými problémami a početnými hypotézami sa ukázala ako veľmi atraktívna tematika pre široko vzdelanú a technicky veľmi zdatnú mladú generáciu zavčasu podchytenú čelnými predstaviteľmi oboch odborov – algebrickej geometrie a algebrickej teórie čísel. Z tejto šťastnej konštelácie mnohých faktorov aj z celkovej zmenenej historickej situácie v organizácii vedeckej práce v matematike (a nielen v nej) rezultovali výsledky, ktoré renomovaní posudzovatelia označili za hviezdne úspechy príslušných desaťročí. R. 1974 Grothendieckov odchovanec Pierre Deligne dokázal tri Weilove hypotézy z algebrickej teórie čísel a r. 1983 Gerd Faltings dokázal Mordellovu hypotézu o konečnosti počtu racionálnych koreňov istých typov diofantovských rovníc. Oba výsledky boli podľa zásluhy ocenené Fieldsovou medailou.

Azda najspektakulárnejším výsledkom algebrickej geometrie v poslednom desaťročí 20. storočia je úspešný dôkaz Veľkej Fermatovej vety (= hypotézy) z r. 1994, ktorého podstatnú časť vypracoval Andrew Wiles a v poslednej fáze k prekonaniu záverečných ťažkostí a omylov výdatne prispel Wilesov žiak Robert Taylor. Zdĺhavý a komplikovaný dôkaz, k zjednodušeniu poslednej časti ktorého prispel G. Faltings ako odborník požiadaný o kontrolu správnosti dôkazu, využíva široké spektrum najnovších výsledkov a sofistikovaných metód algebrickej geometrie, dosiahnutých a vyvinutých v posledných desaťročiach 20. storočia. Ako správne poznamenal Wiles, dôkaz zdarne realizovaný technickými prostriedkami konca 20. storočia je nemysliteľné úspešne zavŕšiť technikou 19. storočia, tým menej prostriedkami 17. storočia, ktoré mal kdispozícii Fermat. Toto zhodnotenie historických možností zároveň racionálne vysvetľuje už od čias Fermata všeobecne uznávané presvedčenie, že Fermatova poznámka o jeho úspešnom dôkaze tvrdenia na okraji prekladu Diofantovej *Aritmetiky* bola omylom alebo mystifikáciou.

8. PERSPEKTÍVY GEOMETRIE NA PRAHU 21. STOROČIA

Nediferencované úvahy o perspektívach geometrie na začiatku 21. storočia by zmiešavali niekoľko tematických okruhov a vniesli by málo svetla do súboru problémov, ktoré sa týkajú značne, ba podstatne rozdielnych stránok vývoja. Prvý okruh sa týka perspektív vývoja geometrie ako vedeckej disciplíny v sústave matematických vied. Druhý okruh sa zaoberá problematikou sprostredkovania historicky dosiahnutého stupňa vývoja geometrie v sústave všeobecného vzdelávania a v inštitúciách špecializovaného odborného vzdelávania vrátane vysokého. A nakoniec v treťom okruhu tém sa posudzujú možnosti geometrie ako aplikačnej disciplíny, t. j. možnosti uplatnenia rôznych častí geometrie v tradičných i nových odboroch a zároveň sa nastoľujú aj otázky prípravy odborníkov na úspešnú realizáciu v týchto typoch aplikácie.

8.1. Perspektívne oblasti geometrie ako vedeckej disciplíny

Pokus o jasné a rezolútne prognózy na najbližšie roky i racionálne dohľadný horizont v ktorejkoľvek oblasti geometrie by v svetle historických skúseností popieral základné princípy vedeckej prognostiky. Za všetky spektakulárne omyly tohto druhu stačí uviesť víziu van der Waerdena o dlhodobej vrcholnej dominancii ideálovej metódy v algebrickej geometrii na svetovom matematickom kongrese v Amsterdame r. 1954, teda v čase, keď pod hladkou hladinou pokojného vývinu veľmi intenzívne prúdili príznaky blízkych turbulencií historického významu. (Prirodzene, nebyť šťastnej súhry niekoľkých priaznivých okolností, zrod novej globálnej koncepcie by sa bol mohol posunúť o 10–15 rokov.)

Racionálne prognózy môžu mať vždy (alebo temer vždy) len stochastický charakter. (Jeden malý dôkaz pre toto tvrdenie by mohla poskytnúť časť štúdie Prognostického ústavu SAV z polovice osemdesiatych rokov 20. storočia, týkajúca sa algebrickej geometrie; prirodzene, vo vzťahu k prognózam svetovej vedy ide o prípad po všetkých stránkach absolútne zanedbateľný.) Z takéhoto pohľadu možno s veľkou pravdepodobnosťou očakávať, že smer čelného pokroku vo vývoji vedeckej geometrie budú v blízkej budúcnosti naďalej udávať niektoré subdisciplíny algebrickej a diferenciálnej geometrie, konkrétne asi *aritmetická algebrická geometria* a *teória diferencovateľných variet.* Pravda, so zaradením týchto disciplín, t. j. algebrickej geometrie a diferenciálnej geometrie, do systému matematických disciplín sú už dlhší čas vážne problémy, lebo nad motiváciou, historickým pôvodom kľúčových objektov a terminológiou týchto disciplín – všetko faktorov, ktoré sú výsostne geometrické – vysoko prevyšuje spektrum metód a prostriedkov, ktoré sú súčasťou špičkovej teórie mnohých moderných disciplín dnešnej matematiky. To sú azda dôvody, ktoré už dlhé roky vedú k zaraďovaniu algebrickej geometrie do bloku nie geometrických, ale algebrických disciplín, a k postaveniu diferenciálnej geometrie ako *veľmi* samostatnej disciplíny, voľne priradenej ku geometrii.

Trvalo aktuálnym problémom vedy je stanovenie *objektívnych kritérií* posudzovania hodnoty výsledkov vedeckej tvorby, a to najmä tej jej časti, ktorá zjavne nemá v danom odbore špičkovú úroveň. Formálne kritériá, zamerané jednostranne na umiestnenie produkcie v hierarchizovanej škále periodík a neperiodických publikácií, privádzané čoraz viac k absurdnej byrokratickej dokonalosti a uplatňované hlavne ako nástroj posudzovania pracovníkov osobitne pri kvalifikačných konaniach, ignorujú v značnej miere obsahovú hodnotu a informačný prínos tvorby a pôsobia silne demotivačne. Subjektivistické predstavy a tlaky niektorých osôb a kruhov by z okruhu pozornosti a pozitívneho hodnotenia vyraďovali podstatnú časť predkladaných výsledkov, bez ktorých by niektoré ďalšie oblasti mohli byť ochudobnené o závažné objekty a témy. Napr. deskriptívnogeometrické spracovanie mnohých klasických tried kriviek a plôch, spravidla podporované a doplnené analytickými metódami, má veľmi často priame alebo sprostredkované použitie v nejakej aplikačnej tematike (technickej, biologickej, medicínskej a i.) počítačovej geometrie a počítačovej grafiky. Z hľadiska teoretickej hodnoty je výsledok obvykle len spracovaním konkrétneho prípadu známymi metódami a prostriedkami, z hľadiska možných aplikácií ide o použiteľný cenný prínos. Prístup, v ktorom pri hodnotení diela okrem rýdzo odbornej stránky sa uplatňuje aj aspekt spoločenského prínosu v najširšom chápaní, je obvyklý aj pri evidovaní odbornej produkcie poprednými referatívnymi časopismi. Základným ukazovateľom pozitívnej hodnoty článku či referátu môže byť – s obvyklým recenzným posúdením – jeho akceptovateľnosť v programe bežného vedecko-odborného podujatia (konferencia, sympózium, škola ap.), ktoré dnes má spravidla vo väčšine prípadov medzinárodný charakter. A pri úvahách o životnosti či historickej uzavretosti a prekonanosti niektorých odborov nech je základnou orientáciou postoj významných referatívnych inštitúcií. S poukázaním naň treba považovať za nemiestne a mylné rezolútne vyjadrenia o konci a neživotnosti syntetickej, projektívnej, deskriptívnej, klasickej diferenciálnej a algebrickej geometrie a iných geometrických disciplín, ktoré svoj najväčší rozkvet zaznamenali pred 20. storočím.

8.2. Perspektívy geometrie ako vyučovacieho predmetu na všetkých stupňoch školskej sústavy

V mnohých súvislostiach sa neraz vedú diskusie o mieste, obsahu a rozsahu geometrického vzdelávania v programe vyučovania matematiky na základných a stredných školách a v príslušných odboroch vysokoškolského štúdia. Nie vždy sa diskutujúce strany dokážu zjednotiť na predmete diskusie. V šesťdesiatych a sedemdesiatych rokoch 20. storočia v rámci tzv. modernizácie obsahu matematiky a jej vyučovania na základných a stredných školách niektorí vedeckí a didaktickí pracovníci presadzovali vyradenie syntetickej geometrie z obsahu vyučovania matematiky a jej úplné nahradenie korelujúcimi štruktúrami aritmetiky, algebry a matematickej analýzy. Výsledkom realizácie takýchto programov boli formálne vedomosti bez vniknutia do povahy matematických objektov a ich štruktúr, bez schopnosti primeranej aplikácie v reálnych situáciách a bez všeobecnovzdelávacej a výchovnej hodnoty, ktoré vždy vyučovanie geometrie prinášalo. Okrem toho takýto spôsob náhrady geometrie ignoruje poznanie historického vývoja matematiky, v ktorom súslednosť vzniku a rozvoja jednotlivých disciplín a metód odzrkadľovala prirodzenú postupnosť stupňujúcich sa abstrakcií a logických prostriedkov. V tomto procese stála geometria spolu s elementárnymi poznatkami aritmetiky na samom začiatku formovania matematiky ako špecifickej disciplíny ľudského poznávania. A syntetická geometrria bola kľúčovou zložkou premeny matematiky z empiricko-pragmatickej oblasti na vedeckú disciplínu v zmysle, na ktorého podstate sa od čias antiky žiadna prevratná zmena neudiala.

Ak predbežne ponecháme stranou otázku priamej aplikability syntetickej geometrie na riešenie bežných praktických situácií (v zmysle matematizácie reálnych situácií), všeobecnovzdelávacia a výchovná funkcia vyučovania syntetickej geometrie v programe 1. a 2. stupňa základnej školy je zrejmá bez akýchkoľvek pochybností. Geometria *zdanlivo* s prijateľnou mierou abstrakcie sprístupňuje priestor, v ktorom žijeme, pomenúva predmety a vzťahy, ktoré sú žiakom známe alebo stávajú sa samozrejmými pri jednoduchom oboznámení sa s nimi, a to všetko sa deje jazykom, ktorého *odborná úroveň* sa temer neodlišuje od prirodzeného jazyka, a polohové vzťahy v systéme geometrie sa pri prvom výskyte vo vzdelávaní zdajú identické s reálnymi vzťahmi, ktoré sú ako samozrejmé známe všetkým (alebo temer všetkým) žiakom. V žiakoch sa takto postupne veľmi nenásilne, didakticky (temer) bezproblémovo a prirodzenou cestou utvára predstava, že geometria je *abstraktným odrazom* reálneho ambientného priestoru, ktorý je jednou „zložkou“ prírody. Postupné osvojovanie geometrickej miery geometrických objektov, v ktorom ako neoddeliteľná súčasť vystupujú fyzikálne jednotky (na čo všetci odborníci didaktiky elementárnej a sekundárnej školy, no najmä fyzici, kladú osobitý dôraz), toto presvedčenie len posilňuje, a ďalším utvrdzujúcim faktorom je široká aplikabilita týchto výsledkov a prostriedkov. Blízkosť *prvotných* geometrických abstrakcií k objektom reálneho sveta a blízkosť geometrických termínov k prirodzenému jazyku sú dva faktory, ktoré na jednej strane uľahčujú poznávanie a osvojovanie geometrie, no na druhej strane napomáhajú vytváraniu predstavy, že geometria je svojou prapodstatou empirická a geometrická teória priestoru je adekvátnym, *pravdivým poznaním reálneho priestoru.* Na 2. stupni základnej školy, na ktorom obsah geometrie v svojom teoretickom ponímaní v podstate zostáva ohraničený na planimetriu, je málo možností a príležitostí odpútať sa od takéhoto pohľadu na geometriu a naznačiť pochybnosti o správnosti takej koncepcie.

Na strednej všeobecnovzdelávacej škole v tematickom celku *Stereometria* sa naskytuje jedna zo zriedkavých príležitostí v stredoškolskej matematike oboznámiť žiakov s podstatou a spôsobom tvorby matematických teórií a ukázať na príklade budovania stereometrie elementárne kroky tvorby teórie v konkrétnej oblasti. Prirodzene, systematická výstavba stereometrie axiomaticko-deduktívnou metódou na strednej škole je viac túžobným želaním než reálnou možnosťou.

Pri akejkoľvek metóde vyučovania syntetickej koncepcie stereometrie na strednej škole sa pri *zobrazovaní* geometrických objektov nemožno vyhnúť zásadnému problému logickej povahy. Akákoľvek metóda zobrazovania je svojou podstatou deskriptívnogeometrickou metódou, ktorá na svoje logické odôvodnenie potrebuje mať k dispozícii základný systém stereometrie – a tento systém sa *didakticky* utvára za pomoci zobrazovania stereometrických objektov. Možno síce s využitím známych spôsobov zobrazovania objektov v planimetrii sformulovať niekoľko pravidiel zobrazovania priestorových objektov – a v podstate axiomaticky zaviesť obrazy stereometrických objektov planimetrickými prostriedkami – ale aj táto cesta je didakticky problematická a zo strany žiakov môže byť sotva prijímaná s náležitým porozumením a vniknutím do podstaty problému. Všeobecne tristný obraz stavu vyučovania stereometrie korunuje fakt, že drvivá väčšina stredoškolských učiteľov matematiky – a, žiaľ, dnes zaiste aj vysokoškolských učiteľov – sa pred kreslením obrázkov priestorových útvarov nezamýšľa nad riešením tohto problému, nijakým spôsobom ho nerieši, ba dokonca nemá ani vedomosť o jeho existencii.

Stredoškolské učebnice stereometrie a následne podľa nich aj didaktická prax vo vyučovaní stereometrie na stredných školách sa už temer pol druha storočia zmietajú medzi dvoma krajnosťami, z ktorých niektorá nadobúda prevahu podľa subjektivistických východísk autorov alebo autorských kolektívov: na jednom okraji sa nachádza dôsledná logická exaktnosť s prepiatou formálnou presnosťou budovania štruktúry, na druhom okraji chaotický pragmatizmus s nahromadením pojmov a vzťahov medzi nimi bez náznaku upozornenia na logické pozadie tematiky a štruktúrne vzťahy. Svoju negatívnu úlohu, prehlbujúcu tento neblahý vzťah, zohráva aj upadajúca prax výskumu, ktorá už dávno stratila zo zreteľa hlavné a podstatné problémy a potáca sa v bludisku svojich efemérnych pseudoproblémov. A ak sa niekde predsa len objavia zásadné výsledky seriózneho výskumu, autormi učebníc zostávajú nepoznané alebo bohorovne ignorované. Budúcnosť stereometrie na stredných školách závisí v mnohom aj od nápravy týchto nedostatkov, v prvom rade od ochoty a schopnosti naplánovať seriózny koncepčný výskum, zabezpečiť jeho úspešnú realizáciu a záväznú akceptáciu podložených výsledkov vo všetkých zložkách didaktickej praxe. Nebolo by väčšieho nešťastia vo výučbe školskej stereometrie, než keby sme dospeli k stavu panujúcemu v školstve početných susedov a iných popredných, najmä ekonomicky rozvinutých krajín, v ktorom syntetická metóda v stereometrii totálne zmizla z učebných osnov a učebníc strednej školy a nahradila ju okyptená, analytickou metódou prezentovaná „stereometria". Nulovú použiteľnosť tejto metódy v reálnych situáciách praxe bez námahy zdokumentuje každý priemerne vzdelaný a skúsený učiteľ.

V našom prostredí na stredných školách s problematikou stereometrie v značnej miere súvisí aj komplex otázok spojených s výučbou deskriptívnej geometrie. Analýza situácie týkajúcej sa stredoškolskej problematiky deskriptívnej geometrie by vyžadovala podstatne väčší priestor, než poskytuje téma tohto článku. Iste nemožno pochybovať o tom, že časy rozkvetu deskriptívnej geometrie ako vyučovacieho predmetu na reálkach patria nenávratnej minulosti. Ale totálne zamedziť na stredných školách budúcim vysokoškolským študentom niektorých technických odborov prístup k nejakej forme *propedeutiky* deskriptívnej geometrie je politika krátkozraká a zhubná, ktorej následky bude znášať nielen školstvo, ale celá spoločnosť.

8.3. Perspektívy geometrie ako aplikačnej disciplíny

Za určitú elementárnu úroveň aplikovania geometrie možno považovať použitie geometrických metód a výsledkov v reálnych situáciách každodenného života, v ktorých sú výskyt a pôsobenie geometrie tak samozrejmé, že uvedomenie si jej prítomnosti obvykle ani nenastáva. (Analogické prípady sa veľmi často vyskytujú aj pri používaní metód, výsledkov a prostriedkov iných častí elementárnej matematiky, napr. pri dennom používaní prirodzených, celých a desatinných čísel v rôznych situáciách.) K podvedomému použitiu geometrie sa uchyľujú ľudia rôznej úrovne vzdelania a rozličných profesií, keď riešenie mnohých úloh teoretickej, cvičnej i praktickej povahy začínajú geometrickým náčrtom. Geometria tu vstupuje do procesu riešenia ako metóda a prostriedok *prvého prístupu* k riešeniu úlohy. V početných oblastiach matematiky a v mnohých technických odboroch sú skôr v menšine prípady, kde sa riešenie úlohy takto nezačína.

Fakty a úvahy uvedené v odseku 7.6 o aplikáciách geometrie v iných vedeckých a technických disciplínach v 20. storočí zostávajú aktuálne aj na (nielen) najbližší čas 21. storočia, ba predpoklad o rozširovaní oblastí aplikability geometrie v 21. storočí je celkom reálny, lebo so vzrastom vzdelanostnej úrovne obyvateľstva rastie aj intelektuálny potenciál, schopný objavovať nové aspekty vedy a jej uplatnenia. Napr. na báze metód a prostriedkov mechaniky a geometrie možno geometricko-graficky modelovať niektoré vzťahy a situácie faktorovej analýzy známe v ekonomike, energetike, bankovníctve a početných ďalších odvetviach, didaktickú prax nevynímajúc. Pravda, geometricko–grafický model poskytuje len prvý orientačný obraz situácie, ktorej dôležité detaily musia byť získané obvykle sofistikovanými numerickými a ďalšími špecifickými metódami.

Možno očakávať pokračujúce a rozširujúce sa použitie metód a výsledkov najnovších odvetví geometrie v iných disciplínach teoretickej vedy, podobné tomu, aké sa objavilo koncom 20. storočia v teoretickej fyzike. Niektoré oblasti geografie, astronómie, geológie, biológie a možno aj ďalších prírodných vied sú na takýto vstup geometrie zrelé. A geometria môže čerpať v týchto oblastiach nové podnety pre svoje ďalšie teoretické hľadania. Proces neustálej diferenciácie a syntézy vedy bude s veľkou pravdepodobnosťou ďalej stierať striktné hranice medzi niekdajšími izolovanými základnými vedeckými disciplínami.

V základných rysoch možno odhadnúť aj časovo blízke zmeny v charaktere deskriptívnej geometrie ako teoretickej oblasti aplikácie geometrie. Odhad zmeny by mal byť zároveň programom jej premeny na modernú disciplínu zrastenú s geometrickými oblasťami založenými na súčasných a budúcich technických prostriedkoch informačno-komunikačných technológií – počítačovou geometriou a počítačovou grafikou. Nenahraditeľnou a nezastupiteľnou úlohou deskriptívnej geometrie v klasickom ponímaní zostáva jej síce zúžené, ale technickými prostriedkami nerealizovateľné poslanie: dosiahnuť u vysokoškolských študentov niektorých technických odborov utvorenie a upevnenie aspoň minima logicko-obsahových deskriptívnogeometrických vedomostí a vypestovať v nich základy *tvorivého používania* získaných vedomostí, zručností a návykov. Tvorba kompetencií zostáva želateľným programom pre talenty a povinným programom pre študentov učiteľstva deskriptívnej geometrie.

– o –

Na prahu 21. storočia má geometria pred sebou veľké úlohy a početné rozsiahle náročné programy. Jej doterajší historický vývoj, v ktorom sa vždy dokázala s náročnosťou a zložitosťou situácie úspešne vyrovnať, oprávňuje k historickému optimizmu, že perspektívy dnešného a blízkeho budúceho vývoja budú rovnako jasné ako v dobách rozkvetu.

Literatúra

[1] Scriba C. J. – Schreiber, P., *5 000 Jahre Geometrie (Geschichte, Kulturen, Menschen),* monografia, Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 2005. ISBN 3-540-22471-8, (2. vydanie)

[2] Malinovi, Jaroslav a Renata, *Dvacet nejvýznamnějších archeologických objevů dvacátého století*, monografia, Svoboda, Praha, 1991, ISBN 80-205-0058-8

[3] Bourgignon, J. P., *A Basis for a New Relationship between Mathematics and Society.* In: *Mathematics unlimited – 2001 and beyond.* Springer, Berlin – Heidelberg – New York, 2001. ISBN 3-540-670 99-8, pp. 171–188

[4] Čižmár, J., *Postavenie geometrie vo vysokoškolskej príprave učiteľov matematiky (Geometria ako prvá aproximácia riešenia matematického problému).* In: Zborník *Efektívnosť výučby matematiky na vysokých školách.* Katedra matematiky PEF VŠP v Nitre. Vysoká škola poľnohospodárska, Nitra 1994, ss. 3–10

[5] Čižmár, J., Perspektívy geometrie na začiatku 21. storočia, ***G*** – *Slovenský časopis pre geometriu a grafiku*, roč. 2 (2005), čís. 4. ISSN 1336-524X, ss. 5–14

[6] Čižmár, J., *Geometria: súčasnosť a perspektívy,* Acta Mathematica 9, Fakulta prírodných vied UKF Nitra, 2006. ISBN 80-8094-036-3, ss. 27–38

[7] Sharygin, L. F., *Mathematical Education and Society (An Outlook from Russia into Russia)*, In: *The Teaching of Mathematics,* 2002, Vol. V, 2; pp. 71–80

Ján Čižmár
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
e-mail: jan.cizmar@fmph.uniba.sk