Marta Pémová
Sférická geometria a pravidelné mnohosteny

In: Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. IV. (Slovak). Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. pp. 173–180.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401059

SFÉRICKÁ GEOMETRIA A PRAVIDELNÉ MNOHOSTENY

Marta Pémová[1]

Z histórie pravidelných mnohostenov

Najstaršími archeologickými nálezmi, ktorých tvar pripomína pravidelné mnohosteny, sú guľovité predmety s vrypmi v tvare pravidelných sférických mnohouholníkov. Tieto nálezy pochádzajú zo Škótska z obdobia približne 3000 rokov p. n. l. a ich pôvod a určenie nie sú známe. (obr. 1.)

Obr. 1

V matematike najstarších civilizácií predného východu a južnej a východnej Ázie pravidelné mnohosteny nestáli v popredí ani praktického, tým menej teoretického záujmu. Ihlanovitý tvar pyramíd v starovekom Egypte bol viac výsledkom praktických skúseností so statikou stavieb než teoretických odôvodnení. Nálezy úžitkových, dekoračných alebo rituálnych predmetov v tvare pravidelných mnohostenov v iných starovekých civilizáciách, napr. u Etruskov, len potvrdzujú fakt, že poznanie a schopnosť výroby niektorých typov pravidelných mnohostenov boli súčasťou praktických zručností bez hlbšieho záujmu o metrické vzťahy medzi niektorými prvkami týchto telies.

Teória pravidelných mnohostenov ako abstraktných *matematických* objektov sa po prvý raz stala predmetom vedeckého záujmu v antickom Grécku od začiatku 6. storočia pred n. l. na samom úsvite konštituovania exaktnej vedy. Podľa viacerých neúplných prameňov pytagorovci poznali tri typy pravidelných mnohostenov – štvorsten, kocku a dvanásťsten. V Grécku vzniklo aj súhrnné pomenovanie týchto telies – polyeder

[1]Práca vznikla za podpory grantu VEGA č. 1/3024/06.

(poly – mnoho, eder – hrana) a pomenovania jednotlivých typov – tetraeder, hexaeder, dodekaeder, neskôr oktaeder a ikosaeder, ktoré označovali vždy *pravidelné mnohosteny.*

U Teaiteta ($\approx$ 417–369 pred n. l.), Platónovho žiaka a završiteľa antickej teórie iracionalít, sa už vyskytuje všetkých päť typov pravidelných mnohostenov. Nie sú známi objavitelia ani čas objavu posledných dvoch typov, ktoré boli pytagorovcom neznáme.

Pre pytagorovcov a Platóna mali pravidelné mnohosteny dvojaký význam: jednak boli výrazom dokonalosti matematiky, jednak boli abstraktným „zhmotnením" určitých dokonalých ideí vyskytujúcich sa v podstate sveta. Pytagorovci zaradili (im známe) pravidelné mnohosteny do svojich kozmogonických predstáv ako symboly nebeských telies, u Platóna boli symbolmi hlavných živlov tvoriacich základ sveta. Pytagorovská koncepcia kozmogónie prežívala miestami až do novoveku, vyskytuje sa napríklad aj u Johannesa Keplera v 16.–17. storočí.

Značnú pozornosť pútali pravidelné mnohosteny a s nimi súvisiace metrické vzťahy ich prvkov v renesančnej matematike, prostredníctvom ktorej sa dostali aj do renesančného umenia, najmä maliarstva (*zlatý rez*).

Kombinatorické vzťahy a duálne vlastnosti pravidelných mnohostenov boli predmetom živej pozornosti u najvýznamnejších matematikov 18. a 19. storočia (L. Euler, A. L. Cauchy, H. Poincaré). Najspektakulárnejším výsledkom ich skúmaní je Eulerova veta stanovujúca závislosť medzi počtami vrcholov, stien a hrán mnohostenov rodu 0.

19. storočie vnieslo do problematiky pravidelných mnohostenov niekoľko nových tém, z ktorých osobitnú pozornosť si zasluhuje rozšírenie na n–rozmerný metrický priestor (L. Schläfli) a výskum grúp zhodnostných zobrazení, v ktorých sú jednotlivé pravidelné mnohosteny invariantné. (Tieto grupy sú chybne nazývané grupami symetrií týchto telies.)

Pravidelné mnohosteny našli mnohoraké a časté uplatnenie aj v modernom výtvarnom umení (M. C. Escher, S. Dali a i.).

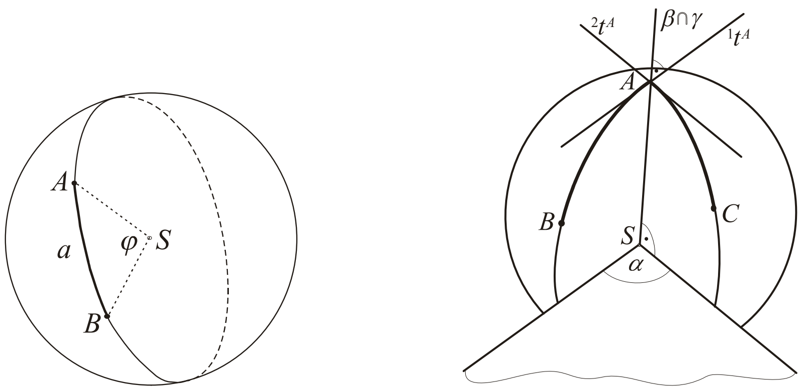
Základné pojmy sférickej goniometrie

Geodetickou krivkou guľovej plochy $\mathbf{G}(S; r)$ *s krajnými bodmi* A, $B \neq A$, $(A, B \in \mathbf{G})$ nazývame menší z kružnicových oblúkov hlavnej kružnice $\overleftrightarrow{ABC} \cap \mathbf{G}$ danej guľovej plochy (s krajnými bodmi A, B); v prípade polkružnice je to ľubovoľná z nich. Označenie: AB alebo $A\hat{X}B$ (X je vnútorný bod oblúka kružnice) alebo a.[2]

[2]Jednoducho možno dokázať, že geodetická krivka s krajnými bodmi A, B je najk-

Dĺžka oblúka $a = AB$ hlavnej kružnice guľovej plochy $\mathbf{G}(S;r)$ (vyjadrená veľkosťou φ stredového uhla $\sphericalangle ASB$) sa rovná $r\cdot\varphi$. Ak sa za jednotku merania zvolí polomer r guľovej plochy, tak je to φ. Označenie: $|a| = r\cdot\varphi$ alebo $|a| = \varphi$. (Obr. 2a)

Uhlom BAC dvoch geodetických kriviek AB a AC, $C \notin \overleftrightarrow{ABS}$, nazývame uhol dotyčníc oboch kriviek v spoločnom bode A. (Obr. 2b)[3]



Obr. 2a, b

Sférickým trojuholníkom ABC budeme nazývať zjednotenie geodetických kriviek AB, BC a AC. Oblúky $a = BC$, $b = AC$ a $c = AB$ sú *strany trojuholníka*, body A, B, C – *vrcholy sférického trojuholníka protiľahlé* v danom poradí *k stranám a, b, c.*

Uhlami sférického trojuholníka ABC nazývame uhly α, β, γ dvojíc jeho strán pri vrcholoch A, B, C (v danom poradí). *Vnútorným bodom sférického trojuholníka ABC* rozumieme vnútorný bod každej geodetickej krivky XY, kde body X, Y sú ľubovoľné body navzájom rôznych strán trojuholníka, z ktorých najviac jeden je vrcholom trojuholníka. Množina všetkých vnútorných bodov trojuholníka ABC sa nazýva jeho *vnútrom* alebo *otvorený sférický trojuholník ABC.*

Analogicky so sférickým trojuholníkom, vrátane jeho strán a uhlov možno definovať sférický n-uholník s jeho stranami a uhlami.

Pravidelným sférickým n-uholníkom nazývame sférický n-uholník, ktorého všetky strany a uhly sú zhodné. Analogicky s trojuholníkom definujeme vnútro pravidelného sférického n-uholníka.

ratšou zo všetkých kriviek (danej guľovej plochy) s krajnými bodmi A, B. V geometrii na guľovej ploche zohrávajú geodetické krivky úlohu úsečiek v rovinnej geometrii.

[3]Očividne ide o uhol rovín β, γ hlavných kružníc guľovej plochy incidentných v danom poradí s kružnicovými oblúkmi AB, AC.

Poznámka 1. Pre každý sférický trojuholník ABC platí:

1. Súčet veľkostí uhlov α, β, γ je väčší než π (rozdiel $(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|) - \pi$ sa nazýva *sférickým nadbytkom trojuholníka* ABC).
2. Obsah sférického trojuholníka S_{ABC} sa rovná $r^2 \cdot \epsilon = r^2 \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot \epsilon^\circ$, kde ϵ je sférický nadbytok trojuholníka ABC.[4]

Úloha 1

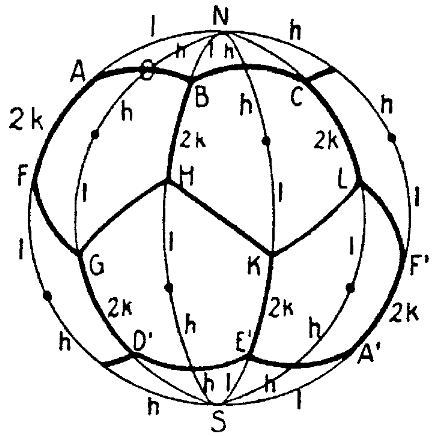
Určiť všetky možnosti regulárneho pokrytia guľovej plochy pravidelnými sférickými n-uholníkmi ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$).

Poznámka 2. Množinu sférických mnohouholníkov danej guľovej plochy $\mathbf{G}$ budeme v tomto texte nazývať jej *pokrytím*, ak platí: 1. každý bod guľovej plochy je bodom zjednotenia aspoň jedného mnohouholníka pokrytia s jeho vnútrom; 2. prienik ľubovoľných dvoch otvorených mnohouholníkov pokrytia je prázdna množina; 3. každé dva mnohouholníky pokrytia majú spoločnú najviac jednu zo strán.[5] Pokrytie guľovej plochy budeme nazývať *regulárnym*, ak: a) každé dva mnohouholníky pokrytia sú navzájom zhodné pravidelné sférické n-uholníky; b) každým vrcholom ľubovoľného n-uholníka pokrytia prechádza ten istý počet m strán m (navzájom rôznych) sférických n-uholníkov daného pokrytia.

Riešenie úlohy 1. Za predpokladu existencie regulárneho pokrytia guľovej plochy $\mathbf{G}(S; r)$ pravidelnými sférickými n-uholníkmi tak, že s každým vrcholom ľubovoľného n-uholníka pokrytia inciduje m strán navzájom rôznych sférických n-uholníkov urobíme nasledujúcu konštrukciu. Každý z pravidelných n-uholníkov pokrytia rozdeľme na n zhodných rovnoramenných trojuholníkov s temenom v strede n-uholníka. Veľkosť uhla pri temene každého z týchto sférických trojuholníkov sa rovná $\dfrac{2\pi}{n}$ a veľkosť uhla priľahlého k základni sa rovná $\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{2\pi}{m}\right) = \dfrac{\pi}{m}$ (s každým vrcholom základne je incidentných práve m strán navzájom rôznych mnohouholníkov pokrytia). Na obr. 3: $|\sphericalangle ANB| = \dfrac{2\pi}{n}$ a $|\sphericalangle ABN| = \dfrac{\pi}{m}$.

[4] Odvodenie obsahu sférického trojuholníka čitateľ môže nájsť v [3].

[5] Sférické mnohouholníky, ktoré majú spoločnú práve jednu stranu nazývame *susednými mnohouholníkmi pokrytia.*



Obr. 3

Sférický nadbytok každého z trojuholníkov sa rovná

$$\epsilon = \frac{2\pi}{n} + \frac{2\pi}{m} - \pi = \pi \cdot \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1\right) \tag{1}$$

Obsah takéhoto sférického trojuholníka sa rovná $r^2 \cdot \epsilon$ a následne obsah sférického n-uholníka pokrytia sa rovná $n \cdot r^2 \cdot \epsilon$. Ak dané regulárne pokrytie pozostáva z s pravidelných sférických n-uholníkov, tak pre obsah sférického povrchu guľovej plochy platí $S = s \cdot n \cdot r^2 \cdot \epsilon = 4\pi \cdot r^2$, odkiaľ po dosadení výrazu (1) pre sférický nadbytok dostaneme

$$s \cdot n \cdot \left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1\right) = 4$$

a po úprave

$$\frac{2}{n} + \frac{2}{m} = 1 + \frac{4}{s \cdot n} \tag{2}$$

Pretože ľavá strana rovnice (2) je väčšia než 1 a do úvahy prichádzajú len prirodzené čísla $n > 2$, $m > 2$, dostaneme pre m, n nasledujúce možnosti:

1. $n = 3$, $m = 3$; **2.** $n = 3$, $m = 4$; **3.** $n = 3$, $m = 5$ (pre $m = 6$: $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} = 1$); **4.** $n = 4$, $m = 3$ (pre $m = 4$: $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} = 1$); **5.** $n = 5$, $m = 3$ (pre $m = 4$: $\frac{2}{n} + \frac{2}{m} < 1$).

Pred zostavením tabuľky vyjadrujúcej vzťah medzi počtom strán n-uholníka pokrytia, počtom m strán n-uholníkov pokrytia incidentných s každým vrcholom ľubovoľného z nich a celkovým počtom s n-uholníkov pokrytia určíme aj celkový počet strán (h) a vrcholov (v) v danom pokrytí (každé 2 incidentné strany sa v danom pokrytí považujú za jednu sranu, analogicky m navzájom incidentných (totožných) vrcholov rôznych strán pokrytia sa považuje za jeden vrchol pokrytia). Pretože každá strana pokrytia inciduje s práve dvoma sférickými n-uholníkmi pokrytia a analogicky s práve dvoma vrcholmi pokrytia, platí:

$$h = \frac{s \cdot n}{2}, \quad v = \frac{2h}{m} \tag{3}$$

Zo vzťahov (2), (3) a prípustných možností 1–5 pre m, n môžeme zostaviť nasledujúcu tabuľku:

n	m	s	h	v
3	3	4	6	4
3	4	8	12	6
3	5	20	30	12
4	3	6	12	8
5	3	12	30	20

Tabuľka 1

Záver dôkazu spočíva v konštrukcii pokrytia danej guľovej plochy a to: 1. štyrmi alebo 2. ôsmimi alebo 3. dvadsiatimi navzájom shodnými sférickými trojuholníkmi; 4. šiestimi navzájom zhodnými sférickými štvorcami; 5. dvanastimi navzájom zhodnými sférickými päťuholníkmi.[6]

Úloha 2

Určte triedy pravidelných konvexných mnohostenov euklidovského priestoru E_3.

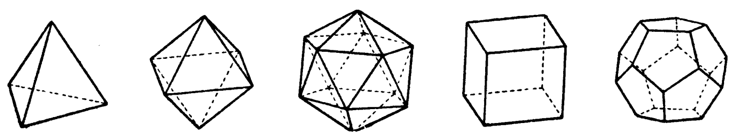
Poznámka 3

a) Konvexný mnohosten nazývame pravidelným, keď platí: 1. všetky steny telesa sú navzájom zhodné pravidelné n-uholníky; 2. každým vrcholom telesa prechádza ten istý počet m jeho hrán.

[6]Priama konštrukcia na guľovej ploche sa s ohľadom na rozsah práce robiť nebude. Potenciálny záujemca ju môže nájsť v [2]. Konštrukciu pripomenieme ešte v závere.

b) Ak nahradíme všetky strany ľubovoľného regulárneho sférického pokrytia guľovej plochy $\mathbf{G}(S;r)$ úsečkami s tými istými krajnými bodmi, dostaneme hrany pravidelného konvexného mnohostena. Z definície a) je zrejmé, že pre počet h jeho hrán a počet v jeho vrcholov platia vzťahy (3), pričom n je počet strán mnohouholníka v stene, s je počet stien telesa a m počet hrán incidentných s tým istým vrcholom.[7] Obrátene, vrcholy každého pravidelného konvexného mnohostena sú vrcholmi regulárneho pokrytia guľovej plochy tomuto mnohostenu opísanej. Môžeme teda vysloviť vetu.

Veta 1. V trojrozmernom euklidovskom priestore existuje päť tried pravidelných konvexných mnohostenov. Reprezentanty tried sú: 1. *pravidelný štvorsten* (tetraéder); 2. *pravidelný osemsten* (oktaéder); 3. *pravidelný dvadsaťsten* (ikosaéder); 4. *pravidelný šesťsten* (sextaéder, kocka); 5. *pravidelný dvanásťsten* (dodekaéder).



Obr. 4

Konštrukcie pravidelného štvorstena, osemstena a kocky môžeme považovať za zrejmé. Vzťah medzi počtom hrán, stien a vrcholov pravidelných konvexných mnohostenov (v závislosti od počtu n strán mnohouholníkov v stenách a počtu m hrán incidentných s tým istým vrcholom) vyjadruje tabuľka 1. Ak sa pozrieme na počty stien, hrán a vrcholov mnohostenov, vidíme, že počet stien a vrcholov je ten istý pri štvorstene a navzájom sa vymieňa v dvojiciach osemsten – kocka a dvanásťsten – dvadsaťsten (pri nezmenenom počte hrán). Takéto dvojice mnohostenov nazývame *navzájom duálne.* Je zrejmé, že stredy stien každého pravidelného konvexného mnohostena sú vrcholmi mnohostena k nemu duálneho; štvorsten nazývame *samoduálnym.* Na dokončenie dôkazu o existencii regulárneho pokrytia guľovej plochy navzájom zhodnými sférickými n-uholníkmi stačí zostrojiť pravidelný konvexný dvanásťsten alebo dvadsaťsten.

[7] Po vynásobení oboch strán v rovnici (2) počtom h hrán mnohostena, ak vezmeme do úvahy (3), dostaneme $s + v = h + 2$, čo je známa Eulerova veta pre konvexné mnohosteny a všetky mnohosteny, ktoré sa môžu stať vypuklými pomocou spojitej deformácie. [1]

Konštrukcia každého z nich v Mongeovej metóde – pri vhodnej polohe mnohostena vzhľadom na priemetne – je elementárna a vyžaduje si len minimálne poznatky z Mongeovej metódy. Potenciálny záujemca ju môže nájsť v [5], [6].

Literatúra

[1] Bronštejn, I. N. – Semandjajev, K. A.: *Spravočnik po matematike.* Gosud. Izdat. fiziko – matem. lit., Moskva 1959, s. 190–193

[2] Dörrie, H.: *100 Great Problems of Elementary Mathematics.* Antin, D. – Translation, Dover, New York 1965, s. 295–301, ISBN 0-486-61348-8

[3] *Enciklopedija elementarnoj matematiki IV, Geometrija.* Gosud. Izdat. fiziko – matem. lit., Moskva 1963, s. 518–539

[4] Göhler, W. – Ralle, B.: *Lexikón vyššej matematiky (Vzorce).* Čižmár, J. – Translation, ALFA, Bratislava 1991, s. 64–65, ISBN 80-05-00531-8

[5] Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounovský, J.: *Deskriptivní geometrie, díl 1.* Jednota československých matematiků a fyziků, Praha 1954, s. 216–222

[6] Kraemer, E.: *Zobrazovací metody II.* SPN Praha 1991, s. 273–277, ISBN 80-04-21778-8

Marta Pémová,
Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,
Univerzita Komenského, Bratislava
e-mail: marta.pemova@gmail.com