Úvod

Ačkoliv je pojem *křivka* na první pohled prostý a intuitivně jasný, ukázalo se, že najít uspokojivou definici křivky není vůbec snadné. Uspokojivou v tom smyslu, aby tato definice byla matematicky přesná a současně odpovídala tomu, co pod pojmem křivka intuitivně chápeme. Původní zkoumání křivky jako reálného objektu, který bylo možno nakreslit do písku, vytyčit provazem či vyrýt do kamene, se během staletí rozvinulo ve zkoumání křivky jako vysoce abstraktního objektu, ke kterému dnes specializované obory matematiky přistupují nejrůznějším způsobem (geometrická topologie, geometrické struktury na varietách, počítačová geometrie, diferenciální geometrie ve fyzice apod.).

V disertační práci je studován obsah pojmu křivka v jednotlivých obdobích historického vývoje a to od nejstarších dob starověku až k pojetí pojmu křivka v moderní matematice 20. století. Jak se během vývoje měnil obsah pojmu křivka, jak dalece se moderní definice blíží intuitivnímu chápání křivky a může vůbec dnešní matematika zodpovědět otázku *Co je to křivka?* či nikoliv, to jsou otázky, ke kterým mimo jiné v práci směřujeme. Jedním z hlavních cílů práce je ukázat na pozadí historického vývoje hluboký obsah tohoto pojmu, přirozenost a potřebnost jeho definice. Za tím účelem zejména hledáme podněty, které ke studiu křivek vedly, srovnáváme metody studia křivek a pojetí pojmu křivka v jednotlivých historických obdobích, sledujeme vztah tohoto pojmu k jiným matematickým pojmům (funkce, množina apod.). Jelikož vývoj tohoto pojmu zdaleka nesouvisí jen s historickým vývojem matematiky, ale je úzce spjat s rozvojem dalších vědních oborů, je v práci v neposlední řadě vše zasazeno i do širších souvislostí. Je zřejmé, že vlastnímu formování definice pojmu předcházelo dlouhé období, kdy byly studovány jednotlivé křivky a jejich vlastnosti. Z tohoto období vycházejí kořeny pozdějšího pojetí pojmu křivka v moderní matematice a nelze je při studiu opominout. Při popisu historického vývoje stále sledujeme hlavní nit vedoucí k definici křivky. Není naším cílem zabývat se jednotlivými vlastnostmi křivek či podávat jejich encyklopedický přehled. Na některých místech se zastavujeme, abychom rozebrali konkrétní příklady křivek, ale v tom případě nám jde o doložení užívaných metod studia křivek, charakteristických rysů geometrie té doby apod. U vybraných matematiků se věnujeme jen jejich přínosu k teorii křivek. Z uvedených důvodů u nich nezmiňujeme jiné významné práce nebo procházíme rychlejším tempem období, které by si z hlediska vývoje matematiky jako celku zasloužilo větší pozornost, a naopak se zastavujeme tam, kde lze najít ke studovanému tématu pozoruhodné detaily. Předpokládáme, že čtenář má jisté znalosti o vývoji matematiky, případně uvádíme literaturu k tomuto tématu. Abychom usnadnili čtenáři časové zařazení popisovaných skutečností do širšího kontextu, uvádíme pro časově vzdálenější období orientační přehledy historického vývoje.

Práce je rozdělena do šesti kapitol. Struktura kapitol je formována tak, že po krátkém vstupu do studované doby se stručnou orientací v obsahu kapitoly přecházíme ihned k problematice křivek. Následuje podrobný výklad doložený citacemi, odkazy, komentáři jiných autorů a vlastními myšlenkami. V závěru vždy uvažujeme nad vytyčeným obdobím, hodnotíme a srovnáváme s obdobím předcházejícím. Seznam literatury je uveden za každou kapitolou.

Je možné také přečíst nejdříve všechny závěrečné úvahové odstavce jednotlivých kapitol (označené v obsahu ■) a teprve potom podrobné podklady k těmto úvahám. Pro základní orientaci ve vývoji křivky uvádíme stručné teze disertační práce:

Kapitola 1

První kapitola je věnována nejstarším kořenům historického vývoje křivek. Počátek historie křivek není pochopitelně možné přesně určit. Archeologické nálezy z celého světa dokazují, že historické kořeny zájmu člověka o křivky sahají hluboko do minulosti. Tento zájem byl úzce spjat s každodenní činností člověka – s činností praktickou, kdy byly první křivky sledovány jako dráhy pohybujících se těles či používány např. k vytyčování obřadních míst, půdorysů pro obytná přístřeší, při dělení pozemků, a s počátky estetického cítění se křivky objevovaly jako součást ornamentů zdobících užitkové předměty. Řešení problémů z praxe vedlo ke shromažďování prvních geometrických poznatků, ve kterých se mimo jiné objevují základní vlastnosti nejjednodušších křivek – kružnice a „přímky“ (tehdy chápané spíše jako omezená část přímky). Tyto první geometrické znalosti o kružnici a „přímce“ spadají do doby hluboko před naším letopočtem, stejně jako užití spirálovitých a dalších křivek pro výzdobu užitkových předmětů apod.

Kapitola 2

Přibližně v 6. století před Kr. se ve starověkém Řecku objevuje snaha podat přírodovědný výklad světa. Kromě jiného se dostává do popředí zájmu geometrie jako vhodný nástroj k popisu světa a jevů v něm. Starořečtí učenci se však zabývají geometrickými problémy i pro ně samotné, nikoliv jen proto, aby řešili nějakou praktickou úlohu. Tím položili základ vědeckému bádání. Ve starověkém Řecku najdeme kořeny mnoha vědních oborů a lze říci, že právě v geometrii došli Řekové nejdále. V Euklidových *Základech* (3. století před Kr.) je geometrie vykládána jako axiomaticky budovaný systém. Tento výrazný kvalitativní zlom s sebou přináší i zcela nový přístup ke křivkám. Kružnice a přímka, geometrické objekty z nich vytvořené, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy byly předmětem zájmu snad všech starověkých geometrů. Mnohé jejich výsledky byly shrnuty v již jmenovaném spise *Základy*. Zkoumání těchto dvou nejjednodušších a nejdůležitějších křivek s sebou přineslo první hluboký problém, tzv. *rektifikaci kružnice*. Mnoho starověkých učenců se bez úspěchu zabývalo převedením dané kružnice (resp. její části) na úsečku stejné délky jako je obvod dané kružnice (resp. její části) tzv. eukleidovskou konstrukcí. Problém rektifikace kružnice úzce souvisí s tzv. kvadraturou kruhu – převedením daného kruhu na čtverec o stejném obsahu. Kvadratura kruhu a další dvě úlohy, které se také nedařilo vyřešit požadovanou metodou – zdvojení krychle a trisekce úhlu, bývají často společně nazývány *tři proslulé problémy starověku*. Skutečná hloubka problému byla pochopena o více než dva tisíce let později v moderní evropské matematice. Teprve v 19. století bylo dokázáno, že tyto problémy jsou eukleidovsky neřešitelné. Po celou dobu vedla snaha řešit tyto úlohy k objevení mnoha důležitých matematických poznatků.

Snaha řešit některou z proslulých úloh vedla už během starověku k objevení kuželoseček a několika speciálních křivek (Dioklova kisoida, Nikomedova konchoida a další). K popisu nových křivek byl většinou užíván pohyb, nebylo možno je konstruovat euklidovsky. Filozofický problém pohybu byl patrně jedním z hlavních aspektů, které bránily dalšímu studiu těchto křivek. Až na Apolloniův spis *Kuželosečky*, ve kterém jsou ovšem elipsa, hyperbola a parabola zaváděny nikoliv pohybem ale jako řezy na kuželi, nebyla vytvořena žádná ucelenější teorie křivek. Jistý pokus o definici křivky lze najít v Euklidových *Základech*.

Studiem křivek ve starověku – prvním vědeckým studiem křivek v historii se zabývá kapitola druhá.

Kapitola 3

Po rozpadu antického světa nastává na území Evropy útlum zájmu o křivky spojený s celkovým útlumem zájmu o geometrii a vědu vůbec. Antické znalosti jsou uchopeny zejména rozvíjejícím se arabským světem. Na konci středověku se v Evropě objevují některé křivky jako součást náročných gotických staveb – rozetová okna, klenby apod. Studie staveb dokazují, že se konstrukce těchto architektonických prvků se neobešly bez jistých geometrických znalostí. Zásadní zlom ale přichází až v období renesance, které s sebou mimo jiné přináší také zájem o odkaz antiky. Spolu s jinými řeckými spisy se začínají studovat i práce o křivkách, které se dochovaly především díky arabskému světu. Překvapující je intuitivní a současně velmi přesné užití některých metod u malířů italské renesance. Prvním spisem, který odkaz antiky výrazně překonal, byla *Geometrie* francouzského filozofa René Descarta, vydaná jako součást jeho filozofického díla *Rozprava o metodě* (1637). V souvislosti s rozvojem mechaniky bylo v sedmnáctém století aristotelovské pojetí pohybu již plně nahrazeno představou pohybujícího se objektu, který prochází po své dráze bod po bodu (dnes bychom řekli spojitě a ve spojitém čase). Descartes proto bez rozpaků popisuje rovinnou křivku jako množinu průsečíků dvou pohybujících se přímek. Pohyby těchto přímek blíže specifikuje, čímž vymezil ty křivky, které my dnes nazýváme (rovinné) algebraické, tj. množiny bodů $X = [x, y]$, jejichž souřadnice vyhovují rovnici $F(x, y) = 0$, kde $F(x, y)$ je polynom dvou proměnných. Descartes také tyto křivky popisuje algebraickými rovnicemi, ale po prostudování jeho *Geometrie* je patrné, že nepovažoval ještě rovnici za dostatečnou reprezentaci křivky. K zavádění křivek většinou používá mechanická zařízení, která tyto křivky vykreslují (popřípadě uvádí metodu konstrukce jednotlivých bodů apod.). Popisuje algebraicky pohybující se průsečík vzhledem k nějakému pevnému bodu na pevně zvolené přímce. Ukázal tak v *Geometrii* mimo jiné jak aplikovat algebru na geometrii, čímž vytvořil silný nástroj ke studiu křivek – zárodek toho, co dnes nazýváme analytická geometrie. Pojetí křivek u Descarta tvoří těžiště kapitoly třetí.

Kapitola 4

Následující období, silně ovlivněné Descartovými myšlenkami, je charakteristické přímo expanzivním studiem vlastností speciálních křivek. Na tomto studiu se formovaly myšlenky vedoucí k infinitezimálnímu počtu, variačnímu počtu i dalším oborům. S přibývajícím množstvím známých křivek se objevuje snaha tyto objekty klasifikovat (pokusil se o to už Descartes, ale jeho klasifikace byla chybná) a najít společné vlastnosti větších skupin křivek. Postupně byly Descartovy myšlenky rozpracovány až k dnešnímu souřadnému systému a metody analytické geometrie se užívají k vyšetřování dalších vlastností křivek. Právě na tomto studiu speciálních křivek se na konci 17. a celé 18. století formují myšlenky rodícího se infinitezimálního počtu. Poznatky té doby jsou spjaty se jmény Pascal, Huygens, Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli a další. Z nich nepochybně vzhledem k našemu tématu vyniká Newton se svým spisem *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* (1704), ve kterém Newton jako první uchopil Descartovu metodu v plné šíři a vytvořil s její pomocí novou ucelenou teorii – teorii kubických křivek. Jeho následníci (i někteří současníci) se postupně začali dívat na rovinné křivky jako na souhrny bodů vyhovujících rovnici

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

kde $F(x, y)$ je výraz udávající vztah dvou proměnných, nikoliv nutně polynom. Dnes bychom řekli funkce dvou proměnných vyjádřená kombinací konečného počtu elementárních funkcí. Ačkoliv bylo toto pojetí křivek na tehdejší dobu velice obecné, byly už tehdy známy křivky, které buď nebylo možno vůbec rovnicí (1) vyjádřit a nebo toto vyjádření nemělo žádný smysl pro vyšetřování dané křivky (např. Archimédova spirála). Objevuje se také reprezentace křivky (jako grafu jisté funkce) mocninnou řadou, vytvářejí se první pojmy diferenciální geometrie. Podrobně je toto „století křivek“ (1649–1748) studováno ve čtvrté kapitole.

Kapitola 5

Pojetí pojmu křivka se v té době vyvíjí v úzké souvislosti se zaváděním pojmu funkce. Parametrická vyjádření již známých křivek vedly k dalšímu zobecnění pojmu křivka. Souřadnice bodů $X = [x, y]$ rovinné křivky byly dány jako funkce proměnné veličiny, tj. např. $x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in I$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je uzavřený interval, a přitom se na funkce $\varphi,\ \psi$ kladly podmínky, které se stávaly tím obecnější, čím obecnější byl pojem funkce. Parametr t bylo možno chápat jako čas, ale také značil např. úhel nebo délku oblouku. Ukazujeme některé souvislosti mezi pojmem křivka a pojmem funkce. Současně s vývojem pojmu funkce přináší v 18. století nové metody do studia křivek diferenciální geometrie, která vznikla jako aplikace metod matematické analýzy na geometrii, tj. diferenciální geometrie umožňuje studovat limitní procesy. Vrcholem jejího prehistorického období jsou práce L. Eulera. Pracemi G. Monge a C. F. Gausse se pak diferenciální geometrie stává samostatným odvětvím matematiky. V kapitole páté se zaměřujeme na jejich přínos ke studiu křivek. Současně v souvislosti s pokrokem algebraických metod v projektivní geometrii se v první polovině 19. století vydělila z analytické geometrie jako samostatný celek teorie algebraických křivek vyššího stupně. Tento jev je historiky matematiky většinou považován za vznik algebraické geometrie jako samostatné vědní disciplíny. I tomuto směru se věnujeme v kapitole páté. Uzavíráme ji zmínkou a Bolzanově pohledu na křivky a pojednáním o specifickém přínosu B. Riemanna, který svou definicí křivky jako variety předběhl dobu o několik desetiletí.

Kapitola 6

Kapitola šestá má odlišný charakter. Rozvoj geometrie v 19. století již nedovoluje sledovat vývoj teorie křivek v celé jeho šíři, proto se dále úzce specializujeme na definici pojmu křivka. Nejpřesněji tuto definici zformuloval ve druhé polovině 19. století francouzský matematik C. Jordan:

> Křivka (rovinná) je množina bodů v rovině, jejichž souřadnice jsou spojitými funkcemi
>
> $$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \quad 0 \le t \le 1. \tag{2}$$

Ovšem brzy se ukázalo, že Jordanova definice křivky je příliš obecná. V roce 1890 ukázal italský matematik G. Peano, že můžeme zvolit funkce φ, ψ definované na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a spojité na tomto intervalu tak, že množina bodů $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ vyplňuje plochu čtverce včetně jeho hranice.

Souběžně proniká na konci 19. století do matematiky stále hlouběji tzv. množinové pojetí, postupně vzniká nový obor matematiky – teorie množin. Tento přístup je úzce spjat se jménem G. Cantora. V jeho pracích se mimo jiné objevuje také definice křivky na základě pojmů teorie množin:

> Kontinuum C (množina, která je současně souvislá a kompaktní) se nazývá rovinnou křivkou, jestliže neobsahuje žádný vnitřní bod.

Tento přístup byl završen v pracích ruského matematika P. S. Urysohna, který podal ve dvacátých letech 20. století nejobecnější definici křivky. Urysohn zavádí rozměr kontinua a definuje křivku jako kontinuum dimenze jedna. Dá se ukázat, že každá rovinná křivka Cantorova je také křivkou ve smyslu Urysohnově a naopak každá rovinná křivka ve smyslu

Urysohnově je také Cantorovou křivkou. Toto pojetí křivek je založeno na elementárním poznatku, totiž, že kružnice dělí rovinu na dvě oblasti. Takovou vlastnost má nejen kružnice, ale i každá křivka s ní homeomorfní. Jakkoliv je toto tvrzení intuitivně zřejmé, dokazuje se velmi složitě. Je evidentní, že definice křivky ve smyslu Urysohnově je nevhodná pro studium lokálních vlastností křivky. Studiem lokálních vlastností křivky se zabývá diferenciální geometrie. Pojetí křivek v diferenciální geometrii je odlišné od množinového přístupu Cantora a Urysohna. Diferenciální geometrie křivek studuje vlastnosti křivek nezávislé na poloze křivky v prostoru pomocí tzv. lokálních parametrizací. Stěžejní úlohu zde hraje diferenciální počet. V moderní diferenciální geometrii dvacátého století je pojem křivky zobecněn v souvislosti se zavedením pojmu varieta.

V šesté kapitole jsou naznačeny přístupy různých oborů k pojmu křivka, avšak jsou vynechána ta odvětví matematiky, která pojem křivka neužívají v souladu s našim intuitivním chápáním tohoto pojmu.