Historický vývoj pojmu křivka

2.1 Pojetí geometrie ve starověku

In: Lenka Lomtatidze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 37–39.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401099

2.1. Pojetí geometrie ve starověku

Abychom porozuměli tomu, jak Řekové studovali křivky, musíme mít na paměti, že jejich pohled na geometrii se v mnohém odlišoval od pohledu dnešního.

- Odlišné chápání geometrických objektů.
- Problém vyjádřit pohyb a nekonečno.
- Geometrické chápání veličin.

Ovlivněni množinovým pojetím geometrie, pohlížíme v dnešní době na geometrické objekty obvykle jako na množiny bodů. [Vop89, str. 24]

Tohle však nebyl pohled starověkých geometrů. Bod byl pro ně něco, co nemá dílu, tj. základní nedělitelný prvek.[22] Jiné geometrické objekty se daly dělit. Velkým problémem v řecké geometrii (a matematice i filozofii vůbec) bylo pojetí pohybu a nekonečna. Kolem roku 450 př. Kr. vypracoval Zenon z Eley proslulé paradoxy pohybu. Ačkoliv je již Aristoteles[23] považoval za logické chyby, nepodařilo se jemu ani jiným starořeckým matematikům vyjádřit v logice pojmů rozpor mezi pohybem, prostorem a časem. „Aristotelovské“ pojetí pohybu bylo plně překonáno teprve v 17. století.[24]

Proto, aby se vyhnuli obtížím v dalším rozvíjení matematických základů a v jejich zdůvodňování, většinou raději buď vůbec v matematice nepoužili ideí nekonečna a pohybu, nebo je co nejvíce omezovali, přičemž tvrdili, že se věci a geometrické veličiny dají bez omezení dělit. [Kol68, str. 96]

Jak ukážeme dále, tento postoj měl velký vliv i na studium křivek.

Thomas [Tho80a, str. viii] vidí tři charakteristické rysy řecké matematiky (1) v preciznosti, se kterou velcí řečtí geometři demonstrovali, co dokazují, (2) v dominantnosti řecké geometrie a (3) v dokonalém způsobu práce. Výraznou dominantnost řecké geometrie a jisté podřízení aritmetiky geometrii můžeme pozorovat po objevu nesouměřitel-

[22] Viz [Ser07, str. 1].

[23] Aristoteles (384–322 př. Kr.)

[24] Při „Aristotelovském“ pojetí je potřebné k popisu pohybu tělesa znát jeho polohu v každém okamžiku. Teprve v 17. století bylo plně přijato, že pohybující se objekt prochází svou drahou bod po bodu, spojitě a ve spojitém čase.

nosti úseček[25] (pythagorejci, 5. stol. př. Kr.), kdy se zhroutily tehdejší představy o základech matematiky, tzv. první krize[26] matematiky. Východiskem z krize se stala *řecké geometrická algebra.*[27] Veličiny již nebyly chápány jako čísla (přirozená a jejich poměry), ale jako délky, obsahy a objemy (ale nikoliv reprezentovány čísly). Délky byly reprezentovány úsečkami, obsahy čtverci a objemy krychlemi, přičemž při operování s takovými veličinami bylo možno sčítat a odčítat jen veličiny „stejného druhu", tj. délky s délkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy (tzv. zákon homogenity).[28] Všechny úměrnosti byly vyvozovány z podobnosti trojúhelníků a zacházelo se s nimi výhradně tímto způsobem. To pochopitelně velmi brzdilo vývoj algebry, neboť v geometrické algebře lze hovořit o součinu dvou veličin (obdélníku), tří veličin (kvádru), ale nelze už dost dobře hovořit o součinu čtyř veličin, nic tomu totiž neodpovídá. Pappos píše:

Nedlouho před námi se však někteří dohodli, že by se takové výrazy používat mohly, jenže neměli jasno, co by to mělo znamenat, když vynásobí obdélník čtvercem nebo jiným obdélníkem. [Des37, str. 306]

Ačkoliv budeme pro jednodušší vyjadřování používat v dalším textu dnešní „descartovskou" symboliku, je třeba mít na zřeteli, že vyjadřovací způsob starých Řeků byl díky geometrickému chápání veličin zcela odlišný (srovnání viz ukázky z textů – tabulky 2.1, 2.2, 2.3).

Operovat s těmito veličinami pak znamenalo provádět geometrickou konstrukci pravítkem a kružítkem, tj. sestrojit konečný počet kružnic a přímek (tato konstrukce je často nazývána *eukleidovská*, neboť na tomto principu byly vybudovány Eukleidovy *Základy*). Je snadné si představit např. operace s úsečkami.

Kupodivu největší potíže nastaly u proměn křivek. Jiné křivky než lomené čáry se nepodařilo proměnit v úsečky. Tedy to, co vlastně napínači

[25] Dvě úsečky délky a, b se nazývají nesouměřitelné, jestliže neexistuje úsečka délky j tak, že úsečky a, b se dají vyjádřit jako její násobky, tj. $a = p \cdot j$, $b = q \cdot j$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Příkladem dvou nesouměřitelných úseček je strana a úhlopříčka čtverce.

[26] Druhá krize matematiky, jenž byla spojena s pojmem nekonečně malé veličiny, byla překonána v 19. století precizním vybudováním základů matematické analýzy, tzv. aritmetizací matematické analýzy. Třetí krize matematiky souvisí s objevením antinomií v teorii množin na počátku 20. století a do jisté míry byla překonána požadavky na axiomatické budování teorií.

[27] Termínem *řecká geometrická algebra* je míněn přechod od aritmetického chápání veličin ke geometrickému. Jedná se tedy spíše o *geometrickou aritmetiku* než *algebru*. Pojem algebra má význam obecnější.

[28] Zákon homogenity a podřízení aritmetiky geometrii byly překonány v plné míře teprve R. Descartem v 17. století (str. 108).

provazců prováděli denně, nemělo v geometrii žádný výklad. [Vop89, str. 60]

Je třeba převést křivku na úsečku stejné délky. Pokud budeme uvažovat kružnici, pak tu máme problém rektifikace kružnice. Obecně jde o problém rektifikace libovolné křivky. Obdobně bychom mohli pokračovat v úvahách o sčítání a odčítání úhlů apod.

Není nijak překvapivé, že při tomto pojetí veličin a operací s nimi, došli Řekové k třem proslulým problémům starověku: [29]

- kvadratura kruhu – k danému kruhu najít čtverec o stejném obsahu, což úzce souvisí s rektifikací kružnice,
- zdvojení krychle – k dané krychli najít krychli o dvojnásobném objemu,
- trisekce úhlu – daný úhel rozdělit na tři stejné části.

Závažnost těchto problémů tkví v tom, že nemohou být řešeny geometricky bez aproximace, tj. konstrukcí užívajících konečného počtu přímek a kružnic; právě proto se staly prostředkem k pronikání do nových oblastí matematiky. Vedly k objevení kuželoseček, některých kubických křivek, křivek čtvrtého řádu a jedné transcendentní křivky - kvadratrix. [Str63, str. 37]

Ukážeme, že ve starověku bylo v podstatě objevení všech křivek podmíněno snahou najít řešení těchto tří problémů.

[29] Tři proslulé problémy starověku „trápily“ matematiky až do 19. století, kdy bylo dokázáno, že jsou eukleidovsky neřešitelné, tj. nelze najít přesné řešení požadovanou metodou – eukleidovskou konstrukcí. Pro praxi pochopitelně stačí vhodné přibližné řešení, které bylo již ve starověku užíváno. Stručné výstižné pojednání o tom, jak je to s neřešitelností těchto úloh lze najít např. v [Fuc93, str. 90], více k rektifikaci kružnice viz str. 164 této práce.