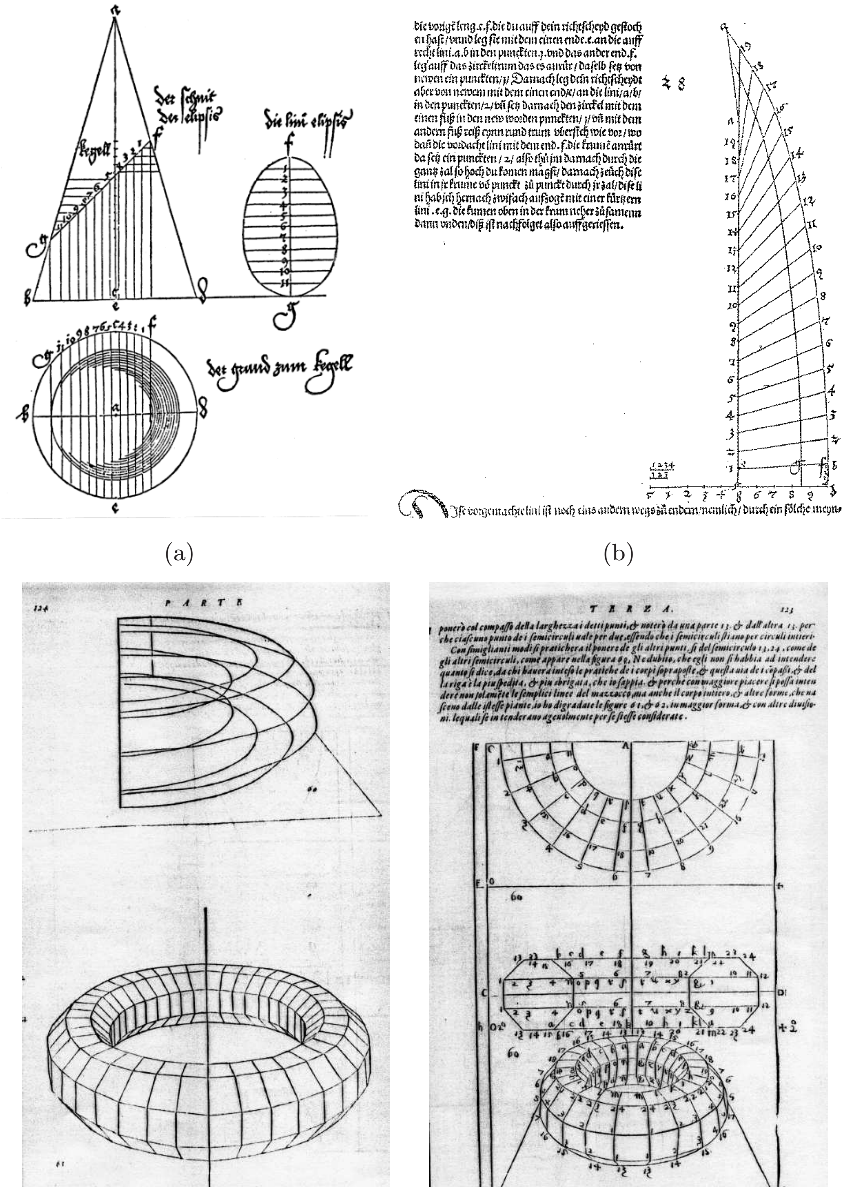


(a) (b)

(c) (d)

Obrázek 3.9: Ukázky ze spisu Albrechta Dürera z roku 1525 *Underweysung der Messung* (a), (b) a Daniela Barbara z roku 1569 *Practica della Perspettiva* (c), (d).

3.2. Křivky v období renesance

Originální texty Eukleida a Prokla, které byly uchovány v Byzanci, přišly na Západ během patnáctého století, v jehož počátku se zvýšila oddanost k antickému modelu známá jako renesance. Základy byly jednou z prvních tištěných knih.[42]

J. L. Heilbron [Hei98, str. 8]

V předchozích odstavcích jsme ukázali, že v posledních stoletích středověku dochází k postupnému oživování zájmu o geometrii, který ještě zesílil v polovině 15. století. Na oživování geometrie tehdy působily dva aspekty: prvním z nich byly rostoucí nároky architektury na geometrické znalosti, druhým lineární perspektiva u umělců italské renesance. Začínají se opět studovat speciální křivky, přičemž badatelé z počátku znovuobjevují starořeckou matematiku, která se dochovala zejména díky arabskému světu.

3.2.1. Perspektiva

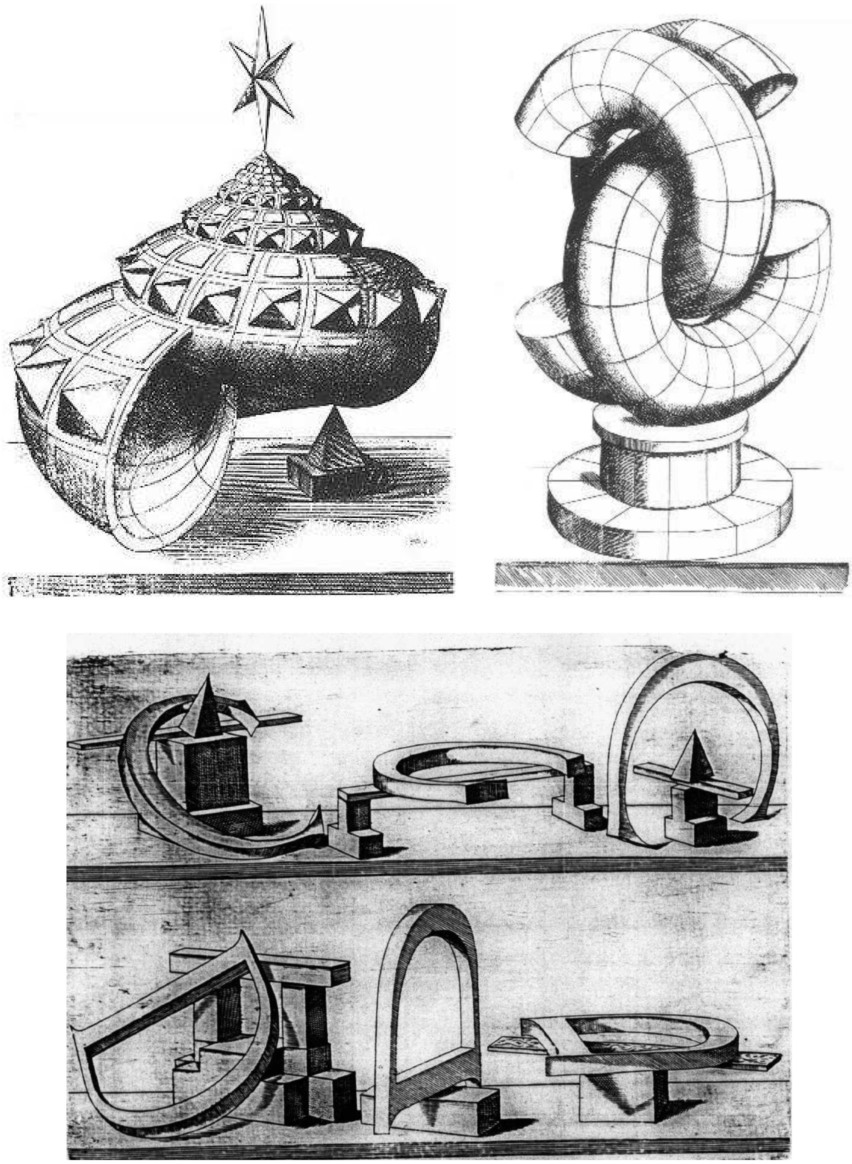
V malířství italské renesance od počátku 15. století vzniká druhý proud, který významně ovlivnil znovuoživení geometrie a tím i znovuoživení zájmu o křivky – lineární perspektiva. Základní principy lineární perspektivy znovuobjevil architekt Brunelleschi,[43] v malířství k lineární perspektivě přispěli zejména Massaccio, Piero della Francesca, Leonardo da Vinci a Raffaelo Santi. Od italských renesančních umělců se zachovala řada traktátů, některé již z rané renesance,[44] z nichž významnější teoretickou prací je až spis Albrechta Dürera[45] *Underweysung der Messung Mit dem Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen und gantzen Corporen (Příspěvek k měření s kružítkem a pravítkem v přímkách, rovinách*

[42] *The original Greek texts of Euklid and Proclus, which had been preserv in Byzantium, came West during the fifteen century, at the beginning of that heightaned devotion to antique models known as the Renaissance. The same period saw the invention of printing. The Elements was one of the first books printed.*

[43] Fillipo Brunelleschi (1377–1446), stavitel kopule dómu ve Florencii v letech 1420–1436.

[44] Leone Baptista Alberti a jeho práce z roku 1436, Piero della Francesca a jeho práce z let 1470–1490 *De prospectiva pingendi (Perspektiva pro malíře)*, ve které podává detailní popis jak kreslit dvou a třídimenzionální obrázky; a další.

[45] Albrecht Dürer (1471–1528) strávil několik let v Itálii studiem perspektivy.



Obrázek 3.10: Ukázky z Lenckerova traktátu *Pespektiva literaria* z roku 1567 (na obrázcích se nachází intuitivně velmi přesně zachycené křivky na ploše)

a tělesech) z roku 1525[46] a spis Daniela Barbaro[47] *Practica della Perspectiva (Praktická perspektiva)* z let 1568-9. Uvedeme některé zajímavé skutečnosti týkající se křivek.

V první ze čtyř částí Dürerova pojednání najdeme popis konstrukce několika křivek (viz příklad na obr. 3.9(b)). Dürer pro ně neužívá názvy, a tak historikové matematiky rozebírají tyto postupy a vedou spekulace, zda se jedná o cykloidu, konchoidu, logaritmickou spirálu a další.[48] V části druhé popisuje metody konstrukcí pravidelných mnohostěnů a přibližné metody pro kvadraturu kruhu i trisekci úhlu pomocí kružítka a pravítka. Části třetí a čtvrtá jsou věnovány dalším tělesům – válci, polopravidelným mnohostěnům apod. Obsahují také Dürerovu teorii stínu a úvod do teorie perspektivy. V Dürerově *Underweysung* z roku 1525 najdeme dokonce konstrukci řezu kuželové plochy. Uvedená konstrukce (viz obr. 3.9) využívá metod běžně užívaných v deskriptivní geometrii při promítání na dvě k sobě kolmé průmětny.[49] Konstruoval i skutečnou velikost řezu. Dürerova konstrukce je správná a shodná s postupem, který bychom použili dnes, ale výsledný řez ve skutečné velikosti zakreslil chybně – přizpůsobil jej přesvědčení, že řezem je ovál s dolní částí širší a horní užší. Ve skutečnosti je řezem elipsa, což – jak jsme ukázali – ve starověku dobře věděli. Dürerovi patří ještě druhý spis, který je s prvním těsně spjat, *Vier Bücher von menschlicher Proportion (Čtyři knihy o lidských proporcích)* z roku 1528. Na rozdíl od prvního bývá historiky matematiky opomíjen, ačkoliv je neméně zajímavý.[50] Při nahlédnutí do spisu Daniela Barbaro z roku 1569[51] se nelze ubránit úvahám o tom, do jaké míry tehdy byly známy a využívány promítací metody (viz obr. 3.9). Na obrázku jsou i výborně zachycené představy o křivkách na ploše (s největší pravděpodobností jen intuitivně).

Také ve spisu Leckera[52] *Perspektiva Literaria* z roku 1567 jsou nakresleny zakřivené plochy s křivkami, které dnes nazýváme hlavními

[46] Dürer musel vytvořit nový německý slovník vědeckých termínů, jeho spis byl prvním geometrickým textem v němčině. Viz [Kat98, str. 391]. Druhé rozšířené vydání *Underweysung* vyšlo v roce 1538.

[47] Daniele Barbaro (1513–1570).

[48] Viz např. [Sch05], kde jsou i odkazy na další literaturu.

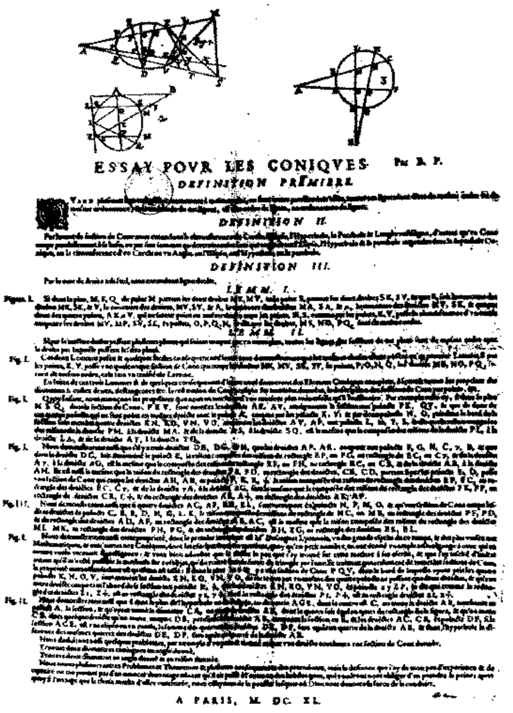
[49] Za počátek deskriptivní geometrie se ale běžně považuje až rok vydání Mongeovy přednášky 1795 – viz. strana 182.

[50] Viz [Sch05, str. 141].

[51] *La Pratica Della Perspettiva di Monsignor Daniel Barbaro*, Venetia, 1569, je k nahlédnutí ve studovně starých rukopisů v Národní knihovně v Praze.

[52] Hans Lencker (1530–1585) pocházel ze známé dynastie zlatníků a rytců a jeho práce najdeme v mnoha oblastech od smaltovaných nádob až po knihy. Z roku 1571 pochází spis *Perspektiva* a z roku 1567 *Pespektiva literaria*, jehož druhé vydání z roku 1595 je v národní knihovně v Praze.

křivkami plochy[53] (viz obr. 3.10). Tyto křivky až o více než 200 let později vyšetřoval G. Monge (viz odstavec 5.2.2).


ESSAY POVR LES CONIQVES

DEFINITION PREMIERE

DEFINITION II.

DEFINITION III.

A PARIS, M. DC. XL.

Obrázek 3.11: Pascalův *Essay povr les coniques*, 1640, [Scr00, str. 326]

3.2.2. „Projektivní“ pohled na kuželosečky

Z teorie perspektivy, která – jak jsme ukázali – byla v 16. století v centru pozornosti umělců a architektů, postupně vyrostla v první polovině století sedmnáctého projektivní geometrie. Například v roce 1613 v *Opticonem libri VI (Šesti knihách o architektuře)* d'Aiguillona[54] je rozebírána i stereografická projekce, popsaná poprvé Ptolemaiem (viz str. 36). Všechny však daleko předběhl francouzský inženýr, architekt a geometr Girard Desargues,[55] který položil základy projektivní geometrie jako samostatné disciplíny. V jeho první práci z roku 1636[56] byly

[53] Udávají směr extrémního zakřivení plochy v jejím bodě a tvoří ortogonální síť.

[54] Francois d'Aigullion (1566–1617).

[55] Girard Desargues (1591–1661).

[56] *Example de l'une des manières universelles... touchant la pratique de la perspective ... (Příklad jednoho z mnoha způsobů ... užití perspektivy ...)*, 1636, měla

poprvé uvedeny souřadnice bodu v prostoru. Desargues ale popsal bod třemi pravoúhlými souřadnicemi pro konstrukci perspektivního obrazu předmětu, nikoliv pro analytickou geometrii.[57] Projektivní pohled na kuželosečky přináší Desargues ve svém nejdůležitějším spise *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan (Koncept návrhu dosahu události střetu kužele s rovinou)*, který byl v malém počtu kopií vytištěn v Paříži v roce 1639.[59] V třicetistránkové práci Desargues doplňuje rovinu o nekonečně vzdálenou přímku a hyperboly i paraboly chápe jako uzavřené křivky protínající tuto přímku ve dvou bodech resp. dotýkající se jí. Asymptoty hyperboly potom představují tečnu v nekonečném bodě.

Projektivní geometrii Desarguese jeho současníci přijímali různě. Descartes o ni neprojevil zájem. Fermat ji vysoce ocenil, ale sám se touto problematikou nezabýval. Některé odradila už nevyhnutelnost ovládnout nový matematický jazyk Desarguese.[60] Myšlenky Desarguese uchvátily tehdy snad jen jednoho matematika a tím byl Blaise Pascal, kterému ještě nebylo ani 17 let. Mladý Pascal obohatil projektivní geometrii o větu, kterou prý Desargues nazval „Velkou Pascalovou větou.“ [Juš70, str. 124]

Svůj objev Pascal[61] publikoval (podobně jako dříve Desargues) v podobě letáku v cca padesáti exemplářích, které byly rozdány a rozeslány tehdejším učencům v Paříži roku 1640. Leták nesl název *Essay povr les coniques (Esej o kuželosečkách)* a vedle něj byly iniciály autora (viz obr. 3.11). Formulace Pascalovy věty tak, jak ji známe dnes,[62] se od formulace na letáku liší. Leták měl všeho všudy 53 řádků textu a neobsahoval důkazy. Pascal v letáku zdůrazňoval, že pomocí jeho věty a ještě

---

jen 12 stran.

[57]To udělal až Philippe de La Hire (1640–1718) roku 1679, který patrně jako první dospěl k rovnici plochy, a to v případě rotačního paraboloidu. S prostorovými souřadnicemi musel pracovat i Johann Bernoulli;[58] L'Hospital od něj totiž dostal dopis (publikovaný až 1742) s rovnicí geodetické křivky. Viz např. [Fuc99, str. 136–137].

[59]Ve své době se spis téměř ztratil, teprve v polovině 19. století objevil Michel Chasles (1793–1880) v pařížském antikvariátu jeho opis, který vytvořil P. De La Hire v roce 1679. V polovině dvacátého století byl objeven i tištěný exemplář – přetištěn v Paříži v roce 1951 R. Tatonem: *L'oeuvre Mathématique de G. Desargues* [Fuc99, str. 133]. De La Hire vydal v letech 1673, 1679 a 1685 tři spisy o kuželosečkách, v nichž na Desargues navázal a přidal k jeho teoriím nové věci. Těmto spisům se podrobně věnuje Šír, Z.: *Les sections coniques chez Philippe de La Hire.* PhD thesis, Universite Pierre et Marie Curie (Paris VI), Atelier national de Reproduction des Theses, 2002.

[60]Používal osobitou terminologii jím vymyšlenou a často přejatou z botaniky.

[61]Blaise Pascal (1623–1662).

[62]Pascalova věta: Průsečíky prodloužených stran šestiúhelníka kuželosečce vepsaného leží na jedné přímce.

dalších dvou s ní souvisejících je možné vybudovat celou teorii kuželoseček včetně vlastností tečen, průměrů, opsání kuželosečky danými body apod. Je známo, že po Pascalově smrti zůstaly rukopisy práce, ve které byla obsažena projektivní teorie kuželoseček. V roce 1676 viděl tyto rukopisy Leibniz, který píše v jednom dopise[63] o bohatém obsahu těchto rukopisů a konstatuje, že jsou natolik dokončeny, aby je bylo možno publikovat, ale publikovány nebyly a dosud nebyl rukopis nalezen.

Z Leibnizova dopisu lze usoudit, že B. Pascal svou větu dokázal nejdříve pro šestiúhelník vepsaný do kružnice a středovým promítáním větu zobecnil pro libovolnou kuželosečku. Vytištěná část byla známa i Descartesovi, který se měl údajně vyjádřit, že nemůže pocházet od šestnáctiletého mladíka. Tak vznikla legenda, že autorem rukopisu byl G. Desargues nebo E. Pascal – otec. Ale z roku 1644 pochází vytištěné svědectví – autorem je M. Mersenne, že B. Pascal z jedné obecné věty rozvinul celou Apollóniovu nauku o kuželosečkách. [Fuc99, str. 134]

3.2.3. Základy analytické geometrie

Algebraická rovnice se stala vztahem mezi čísly, což byl nový pokrok matematické abstrakce, který byl nutný pro obecné zpracování algebraických křivek. D. J. Struik [Str63, str. 98]

Po velkém zájmu o geometrii ve starověku nastal na dlouho její téměř úplný útlum. Tento jev byl součástí celkového úpadku kultury po zániku západořímské říše v roce 476 po Kr. Teprve v posledních stoletích středověku dochází zvolna k obratu. Začínají se opět studovat speciální křivky, přičemž badatelé v počátcích v mnohém znovu objevují starořeckou matematiku, která se dochovala zejména díky arabskému světu. Prvním naprosto zásadním přínosem ke studiu křivek, kterým byl překonán odkaz starověkého Řecka, byly myšlenky francouzského učence René Descarta.

Descartes byl v prvé řadě filozofem. Myšlenky týkající se křivek jsou obsaženy v jeho korespondenci a zejména ve spisu *La Géométrie*, který byl vydán roku 1637 jako jeden z dodatků k jeho filozofickému dílu *Discours de la méthode (Rozprava o metodě)*,[64] o němž Struik říká:

[63] *Později Pascal sestavil – ale ne zcela dokončil – práci o kuželosečkách, jejíž rukopis se nedochoval. O existenci této práce víme z Leibnizova dopisu z 30. srpna 1676 Pascalovu synovci a z několika dochovaných fragmentů.* Viz [Juš76a, str. 254].

[64] Plný název: *Discours de la méthod pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences (Rozprava o metodě, jak správně vésti svůj rozum a hledati*

Stejně jako mnoho jiných velkých myslitelů 17. století hledal Descartes obecnou metodu myšlení, která by mohla usnadnit zkoumání a rozeznávání vědecké pravdy. [...] *Uveřejnil svou Géométrie jako příklad obecné sjednocující metody, v tomto případě spojující algebru a geometrii.* [Str63, str. 97]

Descartův spis *La Géométrie* bývá často považován za počátek tzv. analytické geometrie. Názory na tento problém se značně liší – někteří historikové matematiky přisuzují objev analytické geometrie Řekům, jiní trvají na tom, že o analytické geometrii lze mluvit teprve v 17. století v pojetí Descarta a Fermata.[65] Osobně se kloním k názoru druhému. Avšak otázka zrodu analytické geometrie je studována v řadě historických prací[66] a vzhledem k předmětu našeho studia není důležité ani účelné určit dobu vzniku analytické geometrie, ale podstatné pro nás bude alespoň stručně zmínit nejdůležitější aspekty, které formování nových myšlenek ovlivnily. Tyto otázky nelze vypustit, neboť úzce souvisejí se zcela novým pojetím křivek a způsobem jejich studia v 17. století.

Aby mohlo dojít ke vzniku analytické geometrie jako aplikace algebry na geometrii, musely být splněny především tři podmínky:

(1) musela být vypracována metoda souřadnic, aby bylo možno algebraicky popsat geometrický objekt (tj. v prvé řadě bylo nutno algebraicky popsat bod v rovině);

(2) nezbytným předpokladem byl rozvoj algebry a zejména zavedení jednoduché algebraické symboliky;

(3) musely se objevit otázky a problémy, které aplikaci algebry na geometrii vyžadovaly.

Užití souřadnic v konkrétních případech nacházíme už u řeckých matematiků ve starověku.[67] Všechno je ale popsáno výhradně geometrickým

---

pravdu ve vědách), Leiden, 1637. Práce obsahuje tři dodatky: *La Dioptrique, Les Météores, La Géométrie (Dioptrika, Meteory, Geometrie).* Poprvé byla vydána ve francouštině (1637). První latinské vydání (1642), *Geometrii* vypouští. Latinský překlad *Geometrie* zhotovený pečlivě Franciskem van Shootenem vychází v roce 1649. Překlad byl vydán rovněž u Iana Maira v Leidenu a byl už doprovázen rozsáhlými vysvětlujícími výklady Florismonda de Beauna (1601–1652) a překladatele. Český překlad *Geometrie* dosud nevyšel. Viz [Fia98, str. 200–201].

[65]Např. Coolidge [Coo40, str. 117]: *I personaly defend, that analytic geometry was an invention of the Greeks.*; Nádeník [Fuc99, str. 135]: *Analytická geometrie se mohla objevit teprve tehdy, až algebra natolik vyspěla, že ji bylo možné spojit se souřadnicemi. To udělali R. Descartes a P. de Fermat přibližně v třetině 17. století, oba výlučně v rovině.* Diskuse této otázky také např. J. J. Gray v [Gra94, str. 852] a další.

[66]Např.: J. L. Coolidge, *The Origin of Analytic Geometry*, Osiris, Bruges, 1936.

[67]Už v Apollóniově spisu *Kuželosečky* se objevuje myšlenka, že pro kuželosečku lze uvažovat jisté osy (průměr a tečnu), vzhledem ke kterým mohou být studovány poměry vymezující její tvar.

způsobem pomocí poměrů a proporcí. Ačkoliv by se mohlo z dnešního pohledu zdát, že stačí vše „pouze přepsat do moderní symboliky“[68] a obdržíme silný nástroj (nejen) ke studiu libovolné rovinné křivky, jedná se ve skutečnosti o výrazný abstraktní krok, na který bylo třeba počkat ještě téměř osmnáct století.[69] Poznamenejme ještě, že myšlenka užití souřadnic se objevuje ve starověku také ve spojení s astronomií a s aplikací jejích poznatků v geografii při zavádění zeměpisné šířky a délky – např. Hipparchos (2. stol. př. Kr.).

Druhý předpoklad byl splněn mnohem později. První algebraické výsledky, které mají svůj počátek na konci „zlatého období řecké matematiky“ u Diofanta[70] a po něm v arabštině u al-Chwárizmího,[71] dostávají podněcující charakter až u italských matematiků na počátku 16. století.[72] Postupně z nich vznikají metody vedoucí k obecnému řešení kubické rovnice.[73] Rozvoj algebry byl úzce spjat se zavedením algebraické symboliky. V polovině šestnáctého století byla symbolika (až na malé změny) na úrovni Diofanta. Podstatný krok udělal až francouzský advokát a matematik François Viète (1540–1603), který mimo jiné také zdokonalil obecný zápis rovnic.[74]

[68]Struik [Str63, str. 97]: *Musíme si uvědomit, že už Apollónius měl prostředek k určení kuželoseček, který – podle Leibnize – nyní nazýváme souřadnicemi, a že jich též užil Pappus ve své sbírce a Analytickém pokladu, kde stačí pouze modernizovat symboliku, abychom obdrželi systematickou aplikaci algebry na geometrii.*

[69]Dnes lze obtížnost této abstrakce pozorovat při výuce u některých žáků gymnázií. Řekům v této abstrakci bránil zejména

- zákon homogenity (délky byly reprezentovány úsečkami, obsahy čtverci a objemy krychlemi, přičemž při operování s takovými veličinami bylo možno sčítat a odčítat jen veličiny „stejného druhu“, tj. délky s délkami, obsahy s obsahy a objemy s objemy);
- geometrická algebra a s tím spojená geometrická interpretace všech veličin, kdy nebylo možno uvažovat součin čtyř nebo více veličin (Pappus k tomu píše: *Nedlouho před námi se však někteří dohodli, že by se takové výrazy používat mohly, jenže neměli jasno, co by to mělo znamenat, když vynásobí obdélník čtvercem nebo jiným obdélníkem.* [Fia98, str. 209];
- absence algebraické symboliky.

[70]Diofantos (3. stol. po Kr.), nejvýznamnější práce *Aritmetika.*

[71]Abú ᶜAbdalláh Muhammad ibn Músa al-Chwárizmí (cca 780–850).

[72]Scipione del Ferro (1465–1526) a jeho žáci na univerzitě v Bologni.

[73]Niccolo Fontana Tartaglia (1499–1557), Girolamo Cardano (1501–1576) a další.

[74]*Viète ve svém spise* In artem analyticam isagoge (Úvod do analytického umění) *z roku 1591 zavedl tzv. „koeficienty“, tj. označení čísel písmeny. Vrátil se k myšlence, na které staří Řekové postavili svoji geometrickou algebru, přišel s tzv. zákonem homogenity; každá veličina měla svůj „rozměr“. Byly tedy veličiny délkové, plošné, prostorové atd.; Viète uvažoval celou hierarchii skalárů. Sčítat a odčítat bylo možno jen*

Téměř současně se naplnil i třetí z předpokladů, které pokládáme za nezbytné pro další pokrok ve sledované oblasti. Jedny z prvních požadavků na matematický popis mechanického pohybu se objevují v souvislosti s konstrukcemi kolečkových hodin a složitých orlojů. Vedle mechanických hodin tu byla otázka popisu planetárních pohybů, zkoumání pohybu v gravitačním poli[75] apod.

Tento postupný proces, který byl daleko složitější, než jsme stručně naznačili, vedl k tomu, že se v 17. století dvěma učencům – R. Descartovi[76] a P. de Fermatovi[77] – podařilo algebraicky popisovat geometrické objekty. Ačkoliv ani Descartův ani Fermatův přístup nebyl abstraktní, lze v jejich pojetí poprvé mluvit o vytvoření analytické geometrie jako dostatečně obecné metody k řešení geometrických problémů.[78]

Z korespondence s francouzským matematikem Mersennem[79] víme, že Fermatova práce *Ad locos planos et solides isagoge (Úvod do teorie rovinných a prostorových míst)* byla napsána jistě již roku 1636, ale Fermat sám ji nikdy nevydal. Byla vydána teprve posmrtně jeho synem (1679). A tak prvenství v publikaci myšlenek analytické geometrie připadlo René Descartovi, který v roce 1637 vydal již zmiňovaný spis *La Géométrie*.[80]

---

veličiny stejného rozměru, při násobení se „rozměry sčítaly", tj. např. součinem veličiny délkové a plošné byla veličina prostorová. Známé veličiny reprezentoval souhláskami, neznámé veličiny samohláskami (známých veličin je více, neznámých méně). Mocniny neznámé veličiny A označoval A, A quadratum, A cubus, A quadrato – quadratum atd., mocniny známé veličiny B zapisoval B, B plano, B solido, B plano – plani atd. Zavedení koeficientů bylo obrovským pokrokem, nicméně symbolika byla velmi toporná. [. . .] *Zjednodušení Viètovy symboliky přinesli T. Harriot (1560–1621) v knize* Artis analyticæ praxis (Užití analytického umění) *a William Oughtred (1574–1660) v knize* Clavis mathematicæ (Klíč matematiky)*; obě vyšly kolem roku 1631. René Descartes přišel s dalším výrazným zjednodušením symboliky;* [Beč98, str. 29–30].

[75] Tycho de Brahe (1546–1601), Johannes Kepler (1571–1630). Podrobněji viz např. [Fol86, str. 89].

[76] René Descartes (1596–1650).

[77] Pierre de Fermat (1601–1665).

[78] *Teprve Descartovo (1637) a Fermatovo (1636/1679) pojetí analytické geometrie – jako metody řešení geometrických problémů vhodně vytvářenými algebraickými vztahy, jejich algebraickým řešením a zpětnou geometrickou interpretací je již dostatečně obecné, aby se mohlo stát všeobecně užívanou matematickou metodou.* Viz [Fol86, str. 92].

[79] Marin Mersenne (1588–1648).

[80] Poznamenejme ještě, že Descartes měl rozmyšleny podstatné části svého spisu již koncem dvacátých let 17. století (jak vyplývá z jeho korespondence), ale když se roku 1633 dozvěděl o odsouzení Galileo Galilea (1564–1642) římskou inkvizicí, stalo se to patrně důvodem k pozdržení vydání tohoto spisu až do roku 1637. Descartovy spisy se dostaly na index až roku 1663. Viz [Fuc99, str. 135].

Nastínili jsme stručně v jakých souvislostech vznikala Descartova *La Géométrie*, nyní se tomuto spisu a souvisejícím oddílům Descartovy korespondence budeme věnovat podrobněji z hlediska studia křivek.