3.3. Křivky v Descartově *La Géométrie*

> *V dějinách filosofie novověké zaujímá Descartes tedy postavení vysoce důležité, ale v moderní nauce filosofické místo jen podřízené; a vzdělaný svět nanejvýš z něho cituje výrok fundamentální „cogito, ergo sum!“.*
> *Jak jinak vypadá sláva jeho mathematická a vůbec v oboru věd exaktních získaná! Této s počátku sporé a málo chápané záslužnosti vědecké přibývalo v témže poměru, v jakém se uskrovňovalo uznávání jeho zásluh filosofických.*
> [Stu97, str. 73]

Descartova *La Géométrie* (dále jen *Geometrie*)[82] je rozdělena do tří částí:

- *Livre Premier: Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites* (Kniha první: O úlohách, které je možno sestrojit pouhým užitím kružnic a přímek), str. 297–314;
- *Discours Second: De la nature des lignes courbes* (Pojednání druhé: O povaze křivek), str. 315–369;
- *Livre Troisiesme: De la construction des problesmes solides, ou plusque solides* (Kniha třetí: O konstrukci úloh tělesných[83] a více než tělesných), 370–413.

Kniha první: O úlohách, které je možno sestrojit pouhým užitím kružnic a přímek

V první knize jsou zavedeny základní termíny a vysvětlovány principy používané v dalších částech. Descartes provádí zjednodušení symboliky, které bylo pro snadnější práci s algebraickými výrazy nezbytné. Na rozdíl od svých předchůdců používá malá písmena – známé „délky“ značí písmeny z počátku abecedy a, b, c, …, neznámé písmeny z jejího konce

[82] Výchozím textem pro nás bude přetisk Descartovy *La Géométrie* z roku 1954 [Des37]. Svazek obsahuje faksimile prvního francouzského vydání z roku 1637 s anglickým překladem a množstvím komentářů. Budeme se proto odkazovat přímo na čísla stránek prvního francouzského vydání, toto číslování je zachováno také v přetisku.

[83] Dnes bychom řekli *O konstrukci úloh kubických* …

x, y, ..., zjednodušuje zápis mocnin.[84] Zásadním krokem pak bylo oproštění se od zákona homogenity, čímž odstranil Descartes potíže, které přecházely do algebraických výrazů z geometrické algebry starých Řeků (viz pozn. 69 na str. 104).

Pro Descarta byla geometrie vědou o řešení a konstruování geometrických problémů.[85] Svoji metodu řešení geometrických úloh komentuje v *Geometrii* slovy:

Chceme-li řešit nějakou úlohu, pak předpokládáme, že už je vyřešena, a pojmenujeme všechny úsečky, které se zdají být potřebné k sestrojení této úlohy, a to jak ty, které jsou neznámé, tak ostatní. Pak, aniž bychom hleděli na nějaké rozdíly mezi těmito známými a neznámými úsečkami, je třeba se vypořádat s potíží, podle toho řádu, který ukazuje nejpřirozeněji, jakým způsobem závisejí jedny na druhých, až nalezneme způsob vyjádření jedné a téže veličiny dvěma způsoby: to je to, co se nazývá rovnicí, neboť členy získané jedním z těchto dvou způsobů jsou rovny členům získaným způsobem druhým. A je třeba najít tolik takových rovnic, kolik je neznámých. [Des37, str. 300]

Klíčová úloha, na které Descartes svoji metodu demonstruje a která provází celou knihu, je tzv. *Pappův problém* nalezení geometrického místa bodů majících určitý poměr vzdáleností ke čtyřem daným přímkám. Pappus se zmiňuje o tom, že pokud jsou zadané přímky čtyři, pak toto geometrické místo je kuželosečka (viz obr. 3.12), což věděl už Apollónius a některé speciální případy této úlohy znal pravděpodobně i Eukleides.[86] Descartes cituje Pappa:

Bude-li však přímek více než čtyři, bude se tento bod nacházet na místech náležejících k počtu dosud neznámých, které se prostě nazývají liniemi (křivkami, grammé) a o jejichž povaze a vlastnostech není nic

[84] Srovnejme Viètův a Descartův zápis výrazu $x^3 + 3b^2x = 2z^3$:
Viète (podle [Beč98, str. 30]):

$$A \text{ cubus} + B \text{ plano } 3 \textit{ in } A \text{ æquari } Z \text{ solido } 2$$

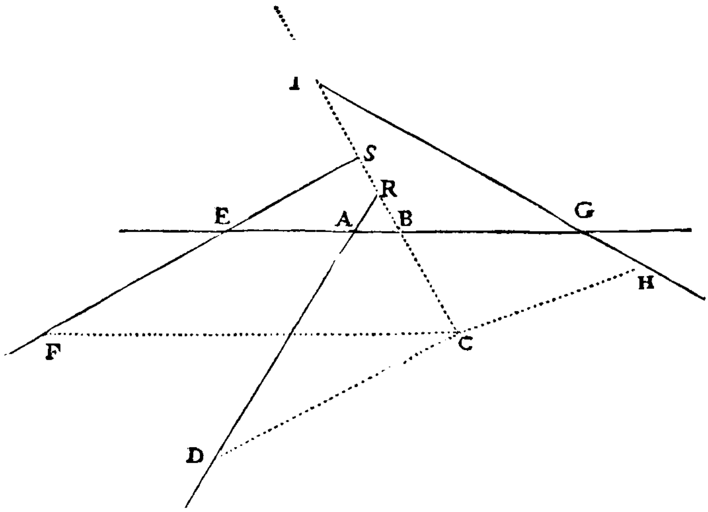
Descartes (analogicky podle stran 301, 303 v [Des37]):

$$x^3 + 3bbx \propto 2z^3.$$

Poznamenejme ještě, že terminologie užívaná Descartem zřetelně naznačuje geometrický původ. Termíny pro mocniny jsou převzaté z řečtiny – užívá termín *le carré* pro druhou, *le cube* pro třetí, *le carré de carré* pro čtvrtou mocninu atd.

[85] Descartův dopis Beckmannovi z 26. 3. 1619 [Ada08, svazek X, str. 157].

[86] Viz [Des37, str. 304–305]. Poznamenejme pouze, že v některých případech – např. čtyři vzájemně rovnoběžné přímky – obdržíme singulární kuželosečku.



Obrázek 3.12: Pappův problém „geometrického místa bodů ke čtyřem přímkám“:
znázorněný v Descartově *Geometrii* [Des37, str. 309].
Formulujme tento problém dnešními slovy: Jsou dány přímky $p_1(\equiv AB)$, $p_2(\equiv AD)$, $p_3(\equiv EF)$, $p_4(\equiv GH)$ a čtyři úhly $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$. Je třeba najít množinu všech bodů C tak, aby přímky $q_1(\equiv CB)$, $q_2(\equiv CD)$, $q_3(\equiv CF)$, $q_4(\equiv CH)$ vedené z bodu C protly po řadě přímky $p_1, \ldots, p_4$ pod příslušnými úhly $\alpha_1(\equiv CBA)$, $\alpha_2(\equiv CDA)$, $\alpha_3(\equiv CFE)$, $\alpha_4(\equiv CHG)$, a byla splněna podmínka

$$\frac{d_1 \cdot d_3}{d_2 \cdot d_4} = \frac{\alpha}{\beta}, \tag{3.5}$$

kde $\frac{\alpha}{\beta}$ je konstanta, $d_1, \ldots, d_4$ jsou délky úseček ležících na přímkách $q_1, \ldots, q_4$. Tyto úsečky jsou ohraničeny bodem C a po řadě body $p_1 \cap q_1$, $p_2 \cap q_2$, $p_3 \cap q_3$, $p_4 \cap q_4$.

známo. [...] *Bude-li přímek více než šest, pak už nelze hovořit o daném vztahu něčeho omezeného čtyřmi úsečkami k tomu, co je omezeno jinými, protože neexistuje nic, co by obsahovalo více než tři rozměry.* [Des37, str. 304–305]

Descartes nejprve ukazuje postup na jednom příkladu čtyř daných přímek (viz obr. 3.12) a poté, co předvedl svoji metodu na tomto příkladě, Descartes říká, že je možno ji užít bez problému na libovolný počet přímek.[87] Bez dalšího podrobného vysvětlování provádí klasifikaci jednotlivých případů Pappova problému [Des37, str. 313–314]. Jeho výsledky lze shrnout do následující tabulky:

Klasifikace jednotlivých případů zobecněného Pappova problému zohledňující konstruovatelnost hledané množiny bodů

Počet daných přímek	m je stupeň x v rovnici[88]	Konstrukce bodů hledané množiny
3,4, nebo 5 (ale ne 5 rovnoběžných)	$m \leq 2$	body lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka[89]
5 rovnoběžných, 6, 7, 8 nebo 9 (ale ne 9 rovnoběžných)	$m \leq 4$	body lze vždy sestrojit jako průsečíky kuželoseček, ve speciálních případech pomocí pravítka a kružítka
9 rovnoběžných, 10, 11, 12 nebo 13 (ale ne 13 rovnoběžných)	$m \leq 6$	konstrukci nelze obecně provést užitím kuželoseček, musí být použita komplikovanější křivka[90]
atd.		

[87] Pappova úloha pro n přímek formulována dnešními slovy: Je dáno n přímek, $l_1, l_2, \dots l_n$ a n úhlů, $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n$. Z libovolného bodu C vedeme n přímek, $k_1, k_2, \dots k_n$, tak, aby k_i svírala s l_i úhel α_i. Průsečík označme B_i a délku úsečky CB_i označme d_i. Dána je navíc konstanta λ a v případě n lichého ještě jedna délka a. Máme najít geometrické místo (množinu) těch bodů C, pro něž platí:

1. Je-li n liché, $n = 2m - 1$, pak $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m = \lambda \cdot d_{m+1} \cdot d_{m+2} \cdot \ldots \cdot d_{2m-1} \cdot a$
2. Je-li n sudé, $n = 2m$, pak $d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_m = \lambda \cdot d_{m+1} \cdot d_{m+2} \cdot \ldots \cdot d_{2m}$.

[88] Jedná se o rovnici hledané množiny. V případě rovnoběžných přímek bude m stupeň y.

[89] Na stranách 302–303 [Des37] Descartes ukazuje, že pokud může být nějaká úloha řešena pomocí pravítka a kružítka, pak uvedený postup vede ke kvadratické rovnici a obráceně ukáže, jak kořeny kvadratické rovnice najít geometrickou konstrukcí užívající jen pravítka a kružítka.

[90] Grafickému řešení algebraických rovnic se podrobně věnuje ve třetí knize, kde

Náhle Descartes opouští výklad Pappova problému, aniž by se věnoval odvozeným vztahům pro délky úseček $d_1(\equiv CB)$, $d_2(\equiv CD)$ $d_3(\equiv CF)$, $d_4(\equiv CH)$ vzhledem k podmínce (3.5) – viz obr. 3.12. Píše, že musí něco říci o křivkách obecně.

Proč? Na první pohled se může zdát toto přerušení nečekané, ale pokud se zamyslíme nad dosavadním Descartovým postupem pozorněji, uvědomíme si přirozenost tohoto odbočení. Descartes se totiž v tomto okamžiku dostal za hranice do té doby známých křivek. Jak jsme ukázali v předchozím textu, až dosud nebylo konstruovatelných křivek známo mnoho. V podstatě kromě přímky, kružnice a kuželoseček, to bylo jen několik speciálních křivek. Descartes si musel uvědomit, že zobecněním Pappova problému obdrží zatím nepopsané křivky, což ho nevyhnutelně přivedlo k hlubokým úvahám nad tím, jaké křivky bude vlastně akceptovat v geometrii. Přerušil výklad Pappova problému a ukončil knihu první, aby vyřešil tuto otázku a vzápětí se k řešení Pappova problému vrátil.

Pappův problém metodami dnešní analytické geometrie

Současnými metodami analytické geometrie bychom tento problém řešili patrně zcela jinak. Zavedli bychom pravoúhlý (obecně libovolný) systém souřadnic $\langle O, x, y\rangle$. Vzhledem k tomuto souřadnému systému musí hledaný bod $C[x, y]$ ležet na průsečíku přímek

$$\begin{aligned}
q_1(\equiv CB): &\quad a_1x + b_1y + c_1 = 0,\\
q_2(\equiv CD): &\quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,\\
q_3(\equiv CF): &\quad a_3x + b_3y + c_3 = 0,\\
q_4(\equiv CH): &\quad a_4x + b_4y + c_4 = 0.
\end{aligned}$$

Vyjádřit rovnice přímek $q_1, \dots, q_4$, které mají s danými přímkami $p_1, \dots, p_4$ svírat úhly $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ není obtížné (jen trochu pracné). Potom lze vyjádřit souřadnice bodů B, D, F, H a pomocí těchto souřadnic obdržíme podmínku 3.5 ve tvaru

$$\frac{|CB| \cdot |CF|}{|CD| \cdot |CH|} = \frac{\alpha}{\beta}\,. \tag{3.6}$$

Descartův postup je jednodušší, což budeme mít možnost posoudit zejména v druhé knize, kde v řešení Pappovy úlohy pokračuje. Nutno znovu

ukazuje, jak lze kořeny rovnic 5. a 6. stupně najít jako průsečíky kružnice a konkrétní křivky třetího stupně – tzv. *Descartovy paraboly* (viz strana 120).

poznamenat, že těžko lze v Descartově řešení hledat souřadný systém v dnešním pojetí. Všechny veličiny – známé i neznámé – chápe výhradně jako délky úseček či poměry. Vyjadřuje vztah mezi neznámými veličinami principem odpovídajícím řecké tradici, tj. na základě poměrů v trojúhelnících vytvořených danými i hledanými přímkami. Pokud bychom trvali na analogii se souřadným systémem, pak by obrázek 3.12 odpovídal kosoúhlému systému souřadnic se středem v bodě A, $x \equiv AB$, y je přímka rovnoběžná s BC. Znovu však zdůrazňuji, že řešení této úlohy zavedením orientovaných souřadnicových os stojí na jiném principu, jak jsme ukázali výše.[91]

Pojednání druhé: O charakteru křivek

Druhou knihu Descartovy *Geometrie* je možno rozdělit do čtyř částí:

V první se Descartes zabývá otázkou, které křivky by měly být zahrnuty do geometrie a zavádí klasifikaci křivek. V části druhé se vrací k Pappovu problému, který začal diskutovat v první knize; provádí kompletní analýzu Pappova problému pro čtyři přímky a probírá speciální případ Pappova problému pro pět přímek. Ve třetí části prezentuje metodu nalezení tečny (přesněji řečeno nejprve normály) ke křivce. Ve čtvrté části užije geometrické metody k nalezení křivek určitých speciálních dioptrických vlastností. S ohledem na vytyčené téma rozebereme podrobněji zejména první dvě části.

Hned v úvodu druhé knihy při diskusi otázky, které křivky by měly být zahrnuty do geometrie, Descartes odmítá starověké rozdělení křivek na *geometrické* – přímka, kružnice – a *mechanické* – spirála, konchoida, kvadratrix atd. Píše:

Staří si dobře všimli, že úlohy geometrie jsou zčásti rovinné (plans), zčásti tělesné (solides) a zčásti křivkové (lineaires), to znamená jedny, které lze konstruovat pouze pomocí přímek a kružnic, druhé, v nichž se použije aspoň jedna kuželosečka, zatímco třetí vyžadují použití nějaké složitější křivky. Divím se však, že u těchto složitějších křivek nerozlišovali rozličné stupně, a nechápu, proč je označovali jako mechanické a nikoli geometrické. Neboť kdyby chtěli říct, že je tomu tak proto, že je k jejich nakreslení zapotřebí určitých přístrojů, pak by se musely z téhož

[91] Na základě zavedení kosoúhlého souřadného systému interpretuje Descartovo řešení Juškevič [Des53, str. 608–609]. Ovšem při snaze vyjádřit Pappův problém moderním jazykem není striktně rozlišováno, kdy je označením $d_1, \ldots, d_n$ míněna délka úsečky a kdy se jedná o přímky.

důvodu odmítnout i kružnice a přímky, neboť přece i ty kreslíme na papír pomocí kružítka a pravítka, které lze právě tak označit za přístroje. [Des37, str. 315]

Potom Descartes přistupuje k vlastnímu vymezení křivek, které považuje za geometrické:

Abych nakreslil všechny ty křivky, které zde hodlám zavést, nepotřebuji už žádný další předpoklad kromě toho, že je možné pohybovat současně dvěma nebo více přímkami a že jejich průsečíky vyznačují jinou křivku. [Des37, str. 316]

O něco dále blíže specifikuje pohyb přímek a geometrickými nazývá ty křivky, které

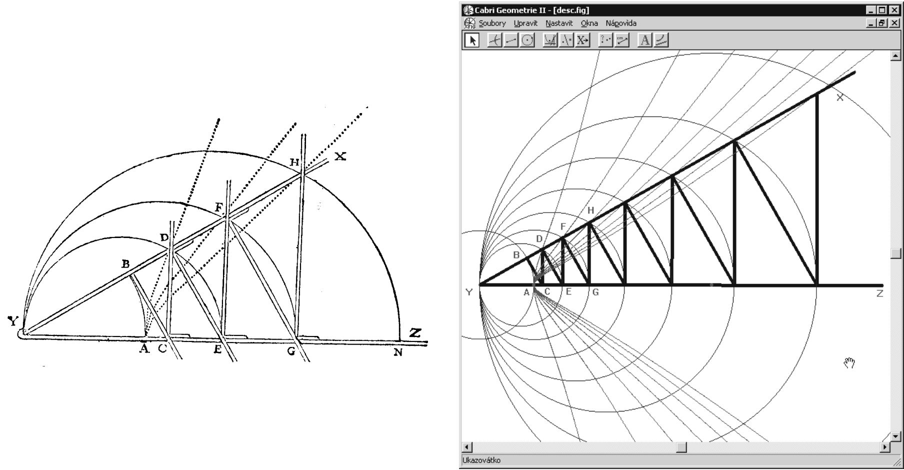
[...] *jsou opsány spojitým pohybem nebo několika takovými pohyby, z nichž následující jsou plně určeny předcházejícími.* [Des37, str. 316]

Tímto upřesněním oddělil křivky jako spirálu, kvadratrix apod., které lze sice také opsat spojitými pohyby, ale tyto pohyby budou na sobě nezávislé. Tím Descartes vymezil jako ***geometrické*** ty křivky, které dnes nazýváme *algebraickými*. Ostatní křivky označuje jako ***mechanické***, dnes je nazýváme *transcendentní*.[92] Pojmy *algebraické* a *transcendentní* pocházejí až od Leibnize.[93]

Podívejme se na Descartovu intuitivní definici geometrické křivky podrobněji. S dnešního pohledu se toto vymezení zdá velmi přirozené, vždyť nástrojem jeho metody byla algebra. Ale tvrzení, že křivky opsané *spojitým pohybem nebo několika takovými pohyby* [...], jsou právě al-

[92]Ve své úvaze nad tím, proč nebyly ve starověku zkoumány algebraické (v Descartově označení geometrické) křivky znovu komentuje vymezení křivek, kterými se zabývá:
Možná to, co bránilo starým geometrům přijmout křivky, které jsou složitější než kuželosečky, bylo, že ty křivky, které zkoumali jako první po kuželosečkách, byly zrovna spirála, kvadratrix a jim podobné, které skutečně náležejí ke křivkám mechanickým a v žádném případě ne k těm, které jsem si zde předsevzal poznávat, neboť tyto křivky lze opsat pouze dvěma oddělenými pohyby, které se nenacházejí v žádném přesně měřitelném vztahu. [Des37, str. 316–317]

[93]Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) nazval v roce 1684 geometrické křivky Descarta algebraickými a mechanické transcendentními – viz str. 174.



Obrázek 3.13: Descartovo mechanické zařízení pro vykreslování křivek. Při rozevírání úhlu XYZ otáčením pravítka XY opisují body D, F, H, … křivky stále vyšších stupňů:
◀ Obrázek „pravítkového“ zařízení (*instrument*) z Descartesovy *Geometrie* [Des37, str. 318]
▶ totéž zařízení sestrojené v Cabri Geometrii.

gebraické křivky v dnešním pojetí,[94] bylo dokázáno teprve roku 1876.[95] Ačkoliv Descartes používá algebraické rovnice jako nástroj, nikde v jeho *Geometrii* nenajdeme algebraickou rovnici uvažovanou jako přímou reprezentaci křivky. Nabízí se také zamyšlení nad tím, proč „definoval“ křivky právě pomocí spojitého pohybu. Viděli jsme, že Pappův problém vyřešil Descartes konstrukcí libovolně mnoha bodů hledané množiny. Z jeho textu však vyplývá, že takovou bodovou konstrukci křivky považuje za uspokojivou jen v případě, kdy konstruovaná křivka je sama

[94] V dnešní terminologii jsou *algebraické rovinné křivky* (Descartes v *Geometrii* uvažuje jen rovinné křivky) právě takové křivky, jejichž každý bod $X[x,y]$ je řešením rovnice

$$F(x,y) = 0, \qquad (\star)$$

kde $F(x,y)$ je polynom n-tého stupně dvou proměnných x, y (tj. algebraické rovnice) a žádný jiný bod není řešením této rovnice. Naopak každá rovnice typu $(\star)$ popisuje právě takovou křivku, kterou Descartes považuje za geometrickou.

[95] Tvrzení dokázal v roce 1876 A. B. Kempe (viz [Kem76]). Dnes lze toto tvrzení zformulovat jako jednu z hlavních vět kinematických mechanismů: *Pomocí rovinných kloubových mechanismů, ve kterých pohyb předchozích článků určuje pohyb následujících, je možno konstruovat oblouky libovolných algebraických křivek, ale nelze sestrojit ani jednu transcendentní.* Viz [Des53, str. 552].

řešením problému. Pokud má být křivka použita jako prostředek pro hledání řešení, tj. pokud má např. sloužit k hledání průsečíků s jinou křivkou, pak bodovou konstrukci považoval za nedostatečnou. Vykreslení křivky spojitým pohybem ve výše uvedeném smyslu názorně ukazovalo, že průsečík existuje, patrně proto dal Descartes tomuto způsobu vymezení geometrických křivek přednost.

Zdá se, že Descartes jako první řešil problém *jakým způsobem specifikovat novou křivku.* Podrobněji se k této otázce vrátíme v závěru. Než se začneme zamýšlet hlouběji nad Descartovým pojetím křivek, přiblížíme nejdříve ještě některé další části Descartovy *Geometrie.*

Poté, co provedl vymezení křivek, jimiž se bude zabývat, předvádí, co chápe *geometrickou* křivkou na zařízení, které sestrojil již v letech 1619–21.[96] Toto zařízení (viz obr. 3.13) tvoří pravítka, která se při rozevírání úhlu XYZ pohybují tak, že pohyb každého z pravítek BC, CD, DE, EF, FG, ... je závislý na pohybech všech předcházejících pravítek. Body D, F, H, ... opisují křivky stále vyšších stupňů – v závislosti na počtu pravítek. O těchto křivkách Descartes říká:

Nevidím důvod, proč by nemohly být pojmuty stejně čistě a přesně jako kružnice nebo přinejmenším jako kuželosečky [...] a nevidím důvod, proč by neměly být používány stejným způsobem pro řešení geometrických problémů. [Des37, str. 318–319]

Potom pokračuje tím, že může podat několik dalších způsobů k vykreslení křivek, kdy každá další křivka bude složitější než předchozí, ale za nejlepší cestu, jak klasifikovat křivky považuje udělat to na základě toho faktu, že

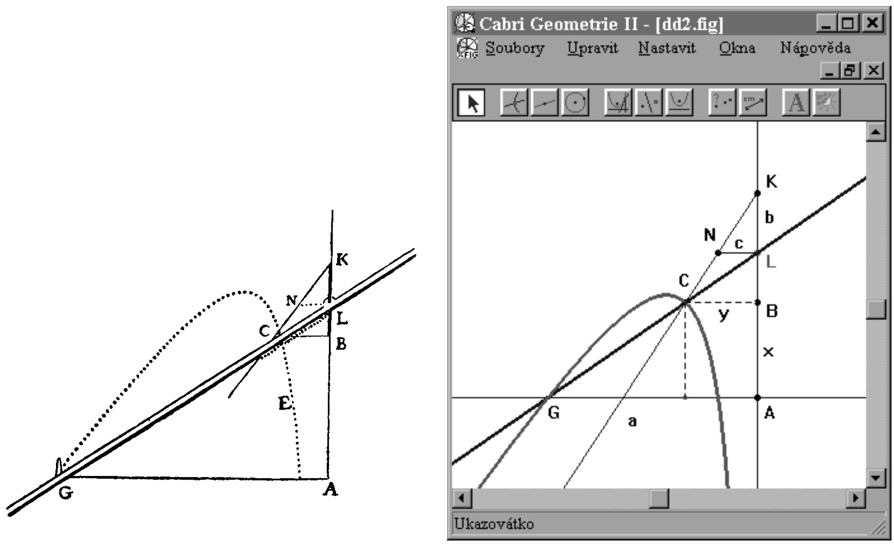
všechny body těch křivek, které lze nazvat geometrickými, to jest těch, které spadají pod nějakou přesnou a exaktní míru, měly nutně nějaký vztah ke všem bodům nějaké přímky, který může být vyjádřen nějakou rovnicí, jednou a touž pro všechny body křivky. [Des37, str. 319]

Na stranách 319–324 [Des37] Descartes zavádí a vysvětluje klasifikaci křivek podle tzv. ***genre***. Tento výraz budeme překládat dále jako ***rod*** křivky.[97] Rod křivky odpovídá minimálnímu počtu pohyblivých pravítek

[96] Toto zařízení je popsáno v *Cogitationes privatae* – viz [Ada08, svazek X, str. 234–240].

[97] V [Des37] je v anglickém překladu užito termínu *class*, kterému by odpovídal český termín *třída*. Stejně překládá *genre* Bos: *I shall translate "genre" with "class"* [Bos81, str. 301]. Budu se držet českého termínu *rod*, který používá Folta [Fol86] a který odpovídá také i výrazu *rod* v ruském vydání Descartovy *La Géométrie* [Des53]. Coolidge v *History of geometrical methods* [Coo40, str. 126] termín *genre* nepřekládá.

u zařízení vytvářejícího křivku (za předpokladu, že všechna pravítka jsou „rovná“, tj. reprezentují část přímky, ale tuto skutečnost Descartes neuvádí).



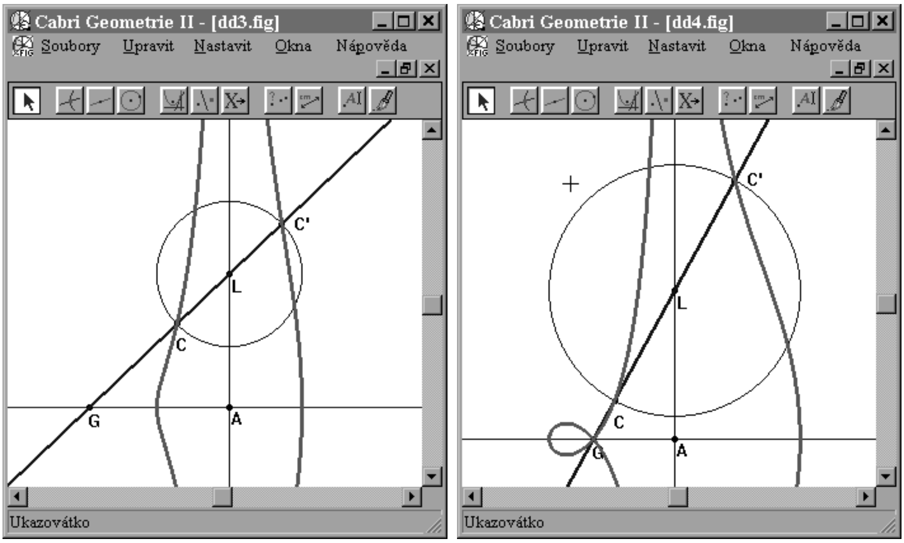
Obrázek 3.14: Descartovo mechanické zařízení vykreslující větev hyperboly
◀ znázorněné v Descartově *Geometrii* [Des37, str. 320];
▶ sestrojené v CABRI GEOMETRII.

Zařízení na obr. 3.13 popisuje jen určitý typ pohybů, ale Descartes demonstruje na dalším zařízení (viz obr. 3.14), že měl na mysli daleko širší spektrum pohybů. Popisuje křivku, která je generována průsečíkem C pohybujících se přímek $g(\equiv GL)$, $k(\equiv NK)$ (viz obr. 3.14). Přímku $g(\equiv GL)$ reprezentuje pravítkem upevněným v bodě G. Otáčením pravítka se iniciuje pohyb daného pravoúhlého trojúhelníka NKL (s pravým úhlem při vrcholu L) podél přímky $x(\equiv AB)$, $KL \in x$, přičemž přepona trojúhelníka je incidentní s přímkou $k(\equiv NK)$.

Descartes označuje jako neznámé veličiny $y = CB$ a $x = AB$, jako známé veličiny (tj. konstanty) odvěsny pravoúhlého trojúhelníka $KL = b$, $NL = c$ a vzdálenost $GA = a$. Potom odvodí rovnici křivky generované průsečíkem $C[x, y]$ dvou pohybujících se přímek $g(\equiv GL)$, $k(\equiv NK)$

$$y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac. \tag{3.7}$$

Pro nás není teď podstatné komentovat Descartův podrobný postup odvození rovnice.[98]

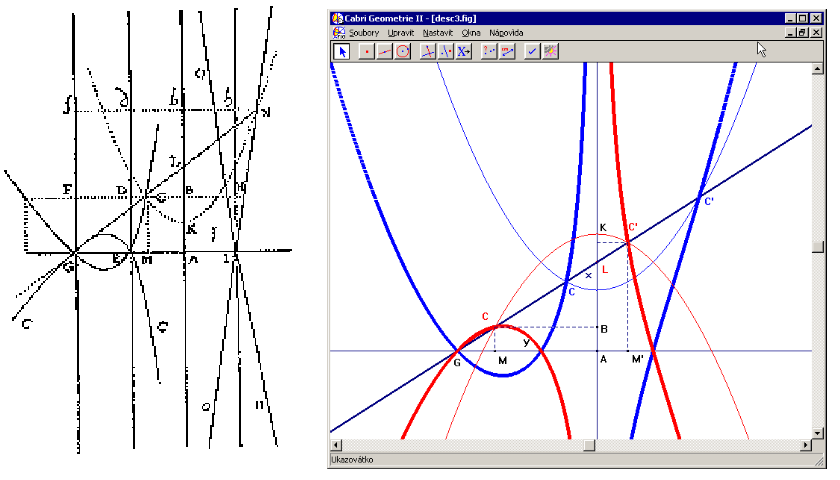


Obrázek 3.15: Nikomedova konchoida sestrojena v CABRI GEOMETRII postupem, který popisuje Descartes. V Descartově Geometrii obrázek není uveden.

Z rovnice lze vidět, píše Descartes, že se jedná o hyperbolu, křivku rodu jedna. Dále poznamenává, že pokud přímku $k(\equiv NK)$ incidentní s přeponou trojúhelníka NKL v tomto zařízení zaměníme za křivku rodu jedna – kuželosečku, výsledná křivka bude rodu dva (tj. křivka třetího nebo čtvrtého stupně v dnešní terminologii – viz následující tabulka). Odtud můžeme usuzovat, že přímce nepřiřazuje rod. Konkrétně píše, že pokud uvažujeme místo přímky $k(\equiv NK)$ kružnici se středem L, obdržíme „konchoidu starých". Tím má Descartes na mysli křivku, kterou dnes nazýváme Nikomédova konchoida – (viz obr. 3.15). V případě, že budeme uvažovat parabolu s osou KB, obdržíme *první a nejjednodušší křivku, která řeší Pappův problém pro pět daných přímek* [Des37, str. 323] – viz obr. 3.16. Podrobněji se k této křivce, jak ukážeme dále, vrací pak až na str. 335.

Vše je završeno na stranách 323–324 klasifikací křivek, která je založena na geometrických principech (srovnej s tabulkou na straně 110). Klasifikace podle stupně algebraické rovnice pochází až od Newtona (viz

[98] Viz [Des37, str. 321–322].



Obrázek 3.16: Descartem popsaná křivka, která je řešením Pappova problému „geometrického místa bodů k pěti daným přímkám“:
◀ znázorněná v Descartově *Geometrii* [Des37, str. 336];
▶ sestrojená v Cabri Geometrii.

pozn. 99). Descartovy výsledky lze shrnout do následující tabulky:

Křivky rodu 1	lze vyjádřit rovnicí stupně ≤ 2	jsou řešením Pappova problému pro 3 nebo 4 přímky
Křivky rodu 2	lze vyjádřit rovnicí stupně ≤ 4	jsou řešením Pappova problému pro 5, 6, 7 nebo 8 přímek
Křivky rodu 3	lze vyjádřit rovnicí stupně ≤ 6	jsou řešením Pappova problému pro 9, 10, 11 nebo 12 přímek
atd.		

Tím zobecnil výsledky, které obdržel při řešení Pappova problému pro 3 a 4 přímky do tvrzení:

> Křivky rodu r lze vyjádřit rovnicí stupně max. $2r$ a jsou řešením Pappova problému pro max. $4r$ daných přímek.

Výsledek, který obdržel pro 3 a 4 přímky je správný, v obou případech je hledanou množinou bodů kuželosečka, ale pro vyšší počet daných přímek toto zobecnění neplatí! Tím zavedl Descartes chybnou klasifikaci křivek vyšších stupňů. Jeho nástupci to nerozpoznali, správnou klasifikaci provedl až Newton.[99]

[99] Isaac Newton (1643–1727) podává jako první důkaz, že Descartova klasifikace je

Descartes dále říká, že je nezbytné ukázat konkrétně metodu, jak nalézt křivku a ukazuje to na případě čtyř daných přímek (viz obr. 3.12), který rozpracoval již v první knize na stranách 309–312 [Des37]. Pokračuje vyjádřením rovnice hledané množiny bodů, tj. množiny pro kterou

součin CB a CF je ekvivalentní součinu CD a CH. To je totéž jako říct, že pokud

$$\begin{aligned} CB &= y, \\ CD &= \frac{czy + bcx}{z^2}, \\ CF &= \frac{ezy + dek + dex}{z^2}, \end{aligned}$$

a

$$CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2},$$

pak rovnice je

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}.$$

Viz [Des37, str. 325].

Potom Descartes zavede substituce

$$2m = \frac{cflgz - dekz^2}{ez^3 - cgz^2}, \quad \frac{2n}{z} = \frac{dez^2 + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgz^2},$$

čímž rovnici zjednoduší a vyjádří jeden její kořen[100]

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mnx}{z} + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}.$$

Dalšími substitucemi obdrží výraz

$$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}. \tag{3.8}$$

nesprávná. Podrobně se touto otázkou zabývá H. J. M. Bos v dodatku článku [Bos81]. V letech 1667–68 provedl Newton klasifikaci křivek 3. stupně (publikováno až 1704), části výsledků dosáhl již kocem roku 1664 – viz část 4.3.

[100]Descartes zmiňuje jen jeden kořen, ačkoliv má rovnice kořeny dva. Druhý kořen by pochopitelně také vyjadřoval kuželosečku.

Provádí diskusi, který typ kuželosečky (parabolu, elipsu, hyperbolu a kružnici) dostane při jakých hodnotách parametrů m, n, o, p v rovnici 3.8. Určuje střed a délku dvou sdružených průměrů, tj. přesnou polohu středových kuželoseček. Ačkoliv přímce nepřiřadil rod, jak jsme poznamenali na straně 117, nelze tvrdit, že by se v jeho *Geometrii* vůbec nevyskytovala rovnice přímky. Na str. 328 [Des37] píše, že pokud odmocnina $\sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$ bude rovna nule, pak je evidentní, že bod C by ležel na přímce. Nikde ve své knize se ovšem nezabývá tvrzením, že každá lineární rovnice znamená přímku. Tuto větu publikoval až první Descartův komentátor Florimond de Beaune (viz pozn. 64).

Dále poznamenává, že podle udaného příkladu lze řešit jakýkoliv jiný případ.

Vrací se podrobněji ke křivce, kterou zmiňoval na str. 322 [Des37] v souvislosti s mechanickým zařízením, tj. ke křivce, kterou nalezl jako řešení Pappovy úlohy pro pět daných přímek, z nichž čtyři jsou ekvidistantní a pátá k nim kolmá (viz obr. 3.16). Určil její rovnici

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy. \tag{3.9}$$

Později byla tato křivka třetího stupně nazývána ***Descartova parabola*** nebo ***kubická parabola*** nebo také ***trident***.[101]

Zde si Descartes zřejmě uvědomil, že nezná způsob, jak vykreslit tuto křivku v souladu s jeho „definicí“ křivek, které bude akceptovat v geometrii (viz str. 113), tj. *pohybem nebo několika takovými pohyby, z nichž následující jsou plně určeny předcházejícími.* Jinými slovy tuto křivku nemá charakterizovánu jako dráhu průsečíku dvou pohybujících se přímek.[102]

Jelikož při odvozování rovnice (3.9) v podstatě popsal konstrukci bodu[103] této křivky (tj. rovnice zde implikuje nalezení množiny bodů křivky!), vedlo ho to k dalšímu zamyšlení nad vymezením křivek, které bude akceptovat v geometrii.

[101] Viz [Lor10, str. 51–25]. V klasifikaci křivek třetího stupně se jí věnuje Newton , viz str. 155.

[102] Z obrázků je zřejmé, že způsob, kterým tuto křivku opisuje jeho pravítkový nástroj (viz str. 114 a obr. 3.13) jeho „definici“ neodpovídá, neboť tato křivka je dráhou průsečíku přímky a paraboly. Obdobně je tomu u konchoidy, která je opisována průsečíkem pohybující se přímky a pohybující se kružnice – viz obr. 3.15.

[103] Konstrukcí bodu rozumí v podstatě konstrukci plynoucí z rovnice tak, že v rovnici pro neznámé x a y zvolí $y = m$, vyjádří rovnici o jedné neznámé x, kterou vyřeší geometricky, tj. zkonstruuje kořen n (popř. kořeny) a na závěr vynese požadovaný bod $[m, n]$. Tento proces opakuje pro libovolnou volbu m.

> *Není však žádný bod na křivkách, které slouží k předložené otázce, který by se nemohl nalézt mezi těmi, které se určují způsobem právě vysvětleným. A protože tento způsob nalezení křivky nalezením řady lhostejno kolika bodů se nevztahuje pouze na ty křivky, které mohou takto být popsány pravidelným a spojitým pohybem, nelze je zcela vyloučit z geometrie.* [Des37, str. 340]

V rozporu s tím, že bodové konstrukce zavrhl jako nedostatečné (jak jsme ukázali na str. 115), se k nim znovu vrací. V odstavci nazvaném *Které z křivek opisovaných nacházením řady jejích bodů lze přijmout do geometrie* také upřesňuje, že

> [...] *je velký rozdíl mezi tímto způsobem nacházení mnoha bodů pro nalezení křivky a způsobem, který se používá pro spirálu a křivky podobné.* [Des37, str. 340]

Rozdíl vysvětluje tím, že u spirály, konchoidy apod. lze sestrojit jím popsaným způsobem jen některé body, kdežto u křivek jím zahrnutých do geometrie může takto sestrojit libovolný bod. Tato Descartova úvaha ukazuje, že neznal způsob vykreslení křivky, která by měla rovnici (3.9), spojitým pohybem, proto považoval za nutné rozšířit specifikaci křivek, jež bude zahrnovat do geometrie. Z toho ovšem plyne, že ještě nepřišel ani na tvrzení obdobné tvrzení Kempeho (viz pozn. 95 str. 114).

V odstavci nazvaném *Které křivky opsané pomocí provázku lze přijmout do geometrie* dokonce přidává ještě další způsob vymezení geometrických křivek:

> *A nelze odmítnout ani ty způsoby, kde se používá niti nebo provázku ke stanovení rovnosti nebo rozdílnosti dvou nebo více úseček, které lze vést z každého bodu hledané křivky k jiným bodům, nebo na jiné přímky pod jinými úhly: tak jak jsme to dělali v Dioptrice pro vysvětlení elipsy a hyperboly. Nelze přijmout totiž žádné křivky, které se podobají provázkům, to jest křivky, které jsou tu přímé a tu křivé, neboť poměr, který je mezi přímými a křivými není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže, nebylo by možno vyvodit nic, co by bylo přesné a jisté; protože se však v těchto konstrukcích nepoužívá provázku jinak než pro určení úseček, jejichž délky známe dokonale, nemůže to vést k jejich vyloučení.* [Des37, str. 340–341]

Křivka o rovnici (3.9) hraje důležitou roli ve třetí knize jeho *Geometrie*, kdy právě pomocí ní ukazuje, jak najít grafické řešení rovnic pátého a šestého stupně. Kniha třetí dává odpověď na otázku *Co vedlo Descarta* *k tomu, aby se zabýval křivkami?*. Ačkoliv byl pravděpodobně počátečním impulzem Pappův problém, přesněji řečeno snaha najít jeho řešení, postupně byla Descartova motivace daleko vyšší. Na Pappově problému Descartes pouze demonstruje svoji metodu, ale v úvodu třetí knihy říká, že křivky jím zařazené mezi geometrické mohou sloužit k řešení řady problémů. Tím má na mysli problémy vyjádřené formou algebraických rovnic. Lze tedy říci, že na rozdíl od starověkých učenců, kteří popsali několik křivek ve spojení s řešením konkrétních úloh, Descartes nahlíží na křivky daleko obecněji, a sice jím vymezené geometrické křivky mohou sloužit k řešení obecné (abstraktní) skupiny problémů. Připomeňme, že uveřejnil *Geometrii* formou dodatku k filozofickému spisu jako *příklad obecné sjednocující metody* řešení problémů a že i na geometrii nahlížel jako na vědu o řešení problémů.

Značná část třetí knihy je věnována řešení algebraických rovnic. Vzhledem ke studovanému tématu se jí nebudeme podrobněji zabývat.

3.3.1. Přínos Descarta k teorii křivek

V předcházejících odstavcích jsme se zabývali těmi pasážemi Descartovy geometrie, které se týkají křivek (alespoň natolik podrobně, jak nám dovoluje rozsah tohoto příspěvku) a hledali jsme odpovědi na dílčí otázky vytyčené v úvodu. Nyní se pokusíme shrnout vše do úvahy nad tím *Co bylo pro Descarta obsahem pojmu křivka?* a zamyslet se nad významem Descartova odkazu pro další studium křivek.

Již bylo řečeno, že pro Descarta byla geometrie věda o řešení (a konstruování) problémů. K řešení těchto problémů mohou sloužit právě jím vymezené křivky, a to buď tak, že jsou samy řešením problému nebo jsou tyto křivky prostředkem k řešení problému – např. jím popsaná křivka o rovnici (3.9) je na jedné straně řešením jistého Pappova problému pro pět přímek, na druhé straně slouží také jako způsob nalezení kořenů rovnic patého a šestého stupně.

Tímto postojem ke křivkám se Descartes ocitl (mimo jiné) před otázkami, jak „definovat" křivky, kterými se bude zabývat v geometrii a jakým způsobem specifikovat novou křivku (tj. kdy je možno novou křivku považovat za popsanou). V jeho době (a dokonce ještě dlouho po něm) neexistoval žádný obecný koncept, jak popsat novou křivku. Z Descartovy *Geometrie* je zřejmé, že křivku považoval za známou a akceptovatelnou v geometrii, jestliže byl znám uspokojivý způsob, jak tuto křivku vykreslit.[104] Z jeho spisů vyplývá, že za uspokojivou reprezentaci křivky považoval:

- specifikaci mechanického zařízení složeného z pohyblivých pravítek, které spojitým pohybem (nebo několika pohyby, z nichž každý následující závisí na předcházejícím) vykresluje křivku jako dráhu průsečíku dvou „přímek";
- metodu konstrukce libovolných bodů křivky;
- specifikaci křivky kreslícím zařízením obsahujícím kromě pravítek (pevných a pohyblivých ramen) také „rovný" provaz.

Přitom u všech tří způsobů Descartes upřesňuje, čím budou *geometrické* (algebraické v naší terminologii) křivky odděleny od *mechanických* (transcendentních). Toto oddělení je založeno na Descartově tvrzení, že vztah mezi délkou transcendentní křivky a úsečky nemůže být přesně vyjádřen.

[104]Descartes požadavek vykreslení spojuje se slovem *poznání* nebo *chápání*: Např. [Des37, str. 307]: *. . . žádá se též, aby se poznala a nakreslila křivka, na níž se všechny musí nacházet* nebo [Des37, str. 319]: *Mohl bych zde uvést i jiné způsoby pro kreslení a chápání křivek, . . .*

[. . .] *poměr, který je mezi přímými a křivými, není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže,* [. . .] [Des37, str. 340–341]

Je známo, že toto tvrzení, které Descartes intuitivně správně (bez důkazu) předjímá, bylo dokázáno až v 19. století.[105] U bodových konstrukcí používá Descartes k vymezení *geometrických* křivek požadavek konstruovatelnosti libovolného bodu na křivce.[106]

Tato pasáž Descartovy *Geometrie* může navádět k doměnce, že viděl korespondenci

$\mathcal{P}$		$\mathcal{R}$
křivka je vykreslena spojitým pohybem (ve výše uvedeném smyslu)	$\longleftrightarrow$	libovolný bod křivky lze konstruovat z rovnice (ve výše uvedeném smyslu).

Uvedená korespondence by odpovídala Kempeho tvrzení (viz pozn. 95 na str. 114).[107] Na straně 121 jsme však ukázali, že Descartes tuto korespondenci naopak neviděl a považoval množiny $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ za neekvivalentní. O tom svědčí i Descartovo tvrzení, že *způsob nalezení křivky nalezením řady lhostejno kolika bodů se nevztahuje pouze na ty křivky, které mohou takto být popsány pravidelným a spojitým pohybem.*[Des37, str. 340]

Navíc nikde v Descartově *Geometrii* není náznak toho, že by považoval algebraickou rovnici za uspokojivou reprezentaci křivky, tj. neuvažuje dnešní (nám zcela přirozenou) korespondenci

$$\boxed{\textit{algebraická rovnice}} \longleftrightarrow \boxed{\textit{algebraická křivka.}}$$

Analogicky k tomu bychom Descartem používané specifikace *geometric-*

[105] Viz např. [Fuc93, str. 90].

[106] Konstruovatelnost se rozumí ve smyslu pozn. 103.

[107] Např. Bos [Bos81, str. 318] se domnívá, že Descartes tuto korespondenci skutečně viděl.

kých (algebraických) křivek mohli znázornit následovně

$\mathcal{A}$	*křivka je vykreslena pravítkovým zařízením . . . jako dráha pohybujícího se průsečíku . . .*	$\longleftrightarrow$	*geometrická křivka*
$\mathcal{B}$	*libovolný bod křivky lze konstruovat . . .*	$\longleftrightarrow$	*geometrická křivka*
$\mathcal{C}$	*křivka je vykreslena zařízením obsahujícím . . . také „rovný" provaz*	$\longleftrightarrow$	*geometrická křivka*

Připomeňme, že Descartem vymezené *geometrické křivky* jsou právě *algebraické křivky* v dnešním smyslu. Nabízí se tedy otázka, zda se Descartes pokoušel najít ekvivalenci mezi množinami $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ a nahradit je množinou jednou. Můžeme konstatovat, že ano, ale ukazuje tyto ekvivalence jen na jednotlivých příkladech, přičemž u jiných se mu je patrně nedařilo najít.

Nezdá se však pravděpodobné, že by právě toto byla překážka, vždyť řadu tvrzení uvádí Descartes v *Geometrii* na základě několika příkladů (bez důkazu). Descartes konstatoval, že všechny křivky mají rovnici (viz str. 115), ale opačnou otázkou, zda také všechny algebraické rovnice popisují *geometrické* křivky (tj. zda pro každou rovnici existuje kreslicí nástroj . . . atd.), se nezabývá. Konstatuje ovšem implikaci: algebraická rovnice $\Longrightarrow$ bodová konstrukce (viz str. 120). Nutno poznamenat, že jeho úvahy v tomto směru obsahují rozpory a jsou neúplné.

Základní otázkou ale zůstává, zda Descartes vůbec někdy uvažoval o reprezentaci *geometrické* křivky algebraickou rovnicí. Náš názor po prostudování jeho spisů je, že nikoliv. Celá koncepce jeho *Geometrie* je postavena na konstrukci řešení problémů pomocí průsečíků křivek. Pro Descarta byly evidentně tyto průsečíky nalezeny, pokud byly křivky zkonstruovány spojitým pohybem ve výše uvedeném smyslu (v tom případě bylo možno si je představit). Algebraické rovnice přitom používá jako nástroj, který dobře ovládá, ale je to jen nástroj a nikdy ne „definice" křivky. Užitečnost tohoto nástroje je zdůrazněna při hledání normál ke křivkám, kde musela být rovnice křivky skutečně napsána. Užívá rovnice částečně také při klasifikaci křivek. Zavedení klasifikace křivek podle rodu (genre) a nikoliv podle stupně její rovnice nás však jen znovu upozorňuje na preferenci reprezentace křivky pomocí mechanického zařízení, neboť rod křivky právě charakterizuje toto zařízení (viz str. 115).

Dospěli jsme k závěru, že Descartes intuitivně vymezil do geometrie algebraické křivky. Přestože nepoužíval rovnice k „definici" (specifikaci) nových křivek, velmi dobře ovládal metodu, jak tyto křivky algebraickými rovnicemi popsat a uměl také z těchto rovnic odvodit vlastnosti křivek. Jeho spisy pochopila teprve další generace. Během následujícího století (cca 1650–1750) se snad všichni matematikové zabývali vyšetřováním speciálních křivek, přičemž používali právě Descartovu metodu (B. Pascal, Ch. Huygens, I. Newton, G. W. Leibniz, Joh. Bernoulli, Jac. Bernoulli a další). Na jejich studiu se formovaly myšlenky vznikajícího infinitezimálního počtu, variačního počtu i počátky diferenciální geometrie. Teprve s těmito novými poznatky 18. století a s nově se formujícím pojmem *funkce* vzniká potřeba hledat exaktní definici křivky. Tím pouze naznačujeme, kterým směrem se budeme ubírat v dalších kapitolách.

Literatura

[Ada08] Adam–Tanery. *Oeuvres de Descartes*, svazek I–X. Léopold Cerf, Paris, 1897–1908.

[Apo90] Apollónius z Pergy. *Apollonius Conics Books V to VII (The Arabic Translation of the Lost Greek Original in the Version of the Banú Músa).* Springer-Verlag, New York, 1990. (překlad do angličtiny a komentáře G. J. Toomer).

[Beč98] Bečvář, J. *René Descartes milovník rozumu.* Prometheus, Praha, 1998.

[Beč01] Bečvář, J. a kol. *Matematika ve středověké Evropě*, svazek 19 v *Dějiny matematiky.* Prometheus, Praha, 2001.

[Bos81] Bos, H. J. M. On the representation of curves in descartes g'eométrie. *Archive for History of Exact Science*, 24, 295–338, 1981.

[Coo40] Coolidge, J. L. *A History of Geometrical Methods.* Oxford, 1940.

[Des37] Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes.* Leiden, 1637. (z francouzštiny a latiny přeložil do angličtiny David Eugene Smith a Marcia L. Latham, Chicago 1925; přetisk: Dover Publications, New York, 1954).

[Des53] Descartes, R. *Razsužděnije o metode s priloženijami dioptrika, meteory, geometrija.* Izd. Akademii nauk SSSR, Leningrad, 1953. (předklad a komentáře Juškevič A. P.).

[Fia98] Fiala, J. Descartesova geometrie: od geometrické algebry k algebraické geometrii. V *Filosofické dílo René Descartesa.* Filosofia – ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ, Praha, 1998. (Soubor úvah z mezinárodní konference k 400. výročí narození René Descartesa).

[Fol86] Folta, J. Od algebry a geometrie k analytické geometrii. V *Práce z dějin přírodních věd*, svazek 20. Praha, 1986. str. 85–95.

[Fuc93] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Historie matematiky I*, svazek 1 v *Dějiny matematiky.* JČMF, Praha, 1993.

[Fuc99] Fuchs, E.–Bečvář, J., ed. *Matematika v 16. a 17. století*, svazek 12 v *Dějiny matematiky.* Prometheus, Praha, 1999.

[Gra94] Grattan–Guinness, I., ed. *Companion Encyklopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences.* Routledge, London, 1994.

[Haw91] Hawking, S. W. *Stručná historie času.* Mladá fronta, Praha, 1991. (z angl. originálu A Brief History of Time, Bantam Books, New York, 1988, přeložil Karas, V.).

[Hei98] Heilbron, J. L. *Geometry Civilized.* Clarendon Press, Oxford, 1998.

[Isi00] Isidor ze Sevilly. *Etymologie I–III*, svazek III v *Knihovna středověké tradice.* OIKOYMENH, Praha, 2000. (překlad a poznámky Korte, D.).

[Juš70] Juškevič, A. P. *Istorija matěmatiki – matěmatika VII stoletija*, svazek II. Nauka SSSR, Moskva, 1970.

[Juš76a] Juškevič, A. P., ed. *Chrestomatija po istorii matěmatiki.* Prosvěščenie, Moskva, 1976.

[Juš77] Juškevič, A. P. *Dějiny matematiky ve středověku*, svazek I. Academia, Moskva, 1977.

[Kat98] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction.* Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[Kem76] Kempe, A. B. On a general method of describing plane curves of the n^{th} degree by linkwork. *Proc. London Math. Soc.*, 7, 213–216, 1876.

[Lor10] Loria, G. *Spezielle algebraische and transzendente ebene Kurven*, svazek I. (Die algebraischen Kurven). Druck und Verlag von B. G. Teubner, 2. vydání, 1910.

[Pol03] Polanecká, J. *Geometrie české gotické architektury.* Diplomová práce PřF MU, Brno, 2003.

[Sch05] Schreiber, P. Some news on dürer's contributions to geometry. V *European Mathematics in the Last Centuries*, str. 141–148. Institute of Mathematics Wroclaw University, Wroclaw, 2005.

[Scr00] Scriba, C. J.–Schreiber, P. *5000 Jahre Geometrie: Geschichte Kulturen Menschen.* Springer, Berlin, 2000.

[Str63] Struik, D. J. *Dějiny matematiky.* Praha, 1963. (z angl. originálu A Concise History of Mathematics, G. Bell and Sons Ltd., London, 1956, přeložili Nový, L.-Folta, J.).

[Stu97] Studnička, J. O zásluhách descartesových v oboru věd exaktních. *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky*, 26, 73–94, 1897.

[Ull87] Ullmann, E. *Svět gotické katedrály.* Praha, 1987.