Historický vývoj pojmu křivka

4.2 Studium křivek na přelomu 17. a 18. století

In: Lenka Lomtatidze (author): Historický vývoj pojmu křivka. (Czech). Brno: Nadace Universitas v Brně, 2007. pp. 133–139.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401108

4.2. Studium křivek na přelomu 17. a 18. století

Metody analytické geometrie (a postupně také metody vznikajícího infinitezimálního počtu) bylo možné ověřovat na rovinných křivkách. Díky tomu se studium rovinných křivek na konci 17. a zejména v první polovině 18. století neobyčejně rozvíjí. Pozornost na sebe přitáhly křivky popsané ve starověku. Např. Dioklova kisoida (viz str. 52) byla objektem, na němž mnoho matematiků zkoušelo konstrukci tečny a další úlohy, z nichž vznikal infinitezimální počet. R. Sluze[9] jako první v dopise Huygensovi z roku 1658 opouští představy starověkých učenců o kisoidě a uvažuje tuto křivku i mimo oblast ohraničenou kružnicí. Podobně jako Dioklova kisoida dočkala se v 17. století oživení i Nikomédova konchoida (viz str. 53). Konstrukcí její tečny se zabývali už v letech 1636–37 Descartes, Fermat a Roberval. Roberval však považoval větve konchoidy za dvě různé křivky. Inflexní body konchoidy vyšetřoval v letech 1653–54 Huygens, jehož postup našel v 19. století ohlas v algebraické geometrii.[10] Jejím využitím se zabýval i Newton.

Kromě intenzivního studia (a v mnohém znovuobjevování) křivek starověké geometrie spadá do tohoto období i objevení některých křivek nových. Podněty k popisu nových křivek přicházely z praxe nebo je skýtala sama geometrie. Descartův list (viz obr. 4.2(b)) je algebraická křivka vyjádřená v dnešní symbolice rovnicí

$$x^3 + y^3 = 3axy, \ a > 0. \tag{4.12}$$

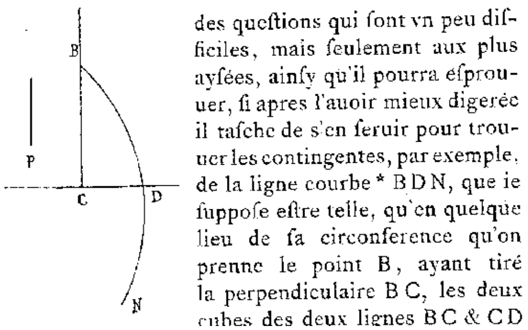
Ačkoliv první zmínka o této křivce se objevuje v Descartových dopisech Mersennovi v roce 1638 (viz obr. 4.2(a)), kde Descartovi sloužila při konstrukci tečny,[11] její celkový průběh vyšetřil teprve Huygens roku 1692.

Do vymezeného období spadá i proslavená úloha o brachistochroně zformulovaná Johannem Bernoullim v roce 1696:

Ve vertikální rovině s pravoúhlou soustavou souřadnic (osa x je horizontální) zvolme body $A = [x_a, y_a]$, $B = [x_b, y_b]$, kde $x_a \neq x_b$ a $y_a > y_b$. Po jaké křivce se musí pohybovat hmotný bod, aby z polohy A dospěl do polohy B v nejkratším čase?

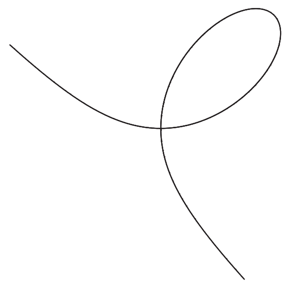
Johann Bernoulli vzápětí úlohu vyřešil, odpovídající křivkou je ***cyk-***

[9] René François Walter de Sluze (1622–1685).
[10] Podrobněji [Fuc99, str. 141].
[11] Viz Descartův dopis Mersennovi z ledna 1638 v [Ada08, svazek I, str. 490].



des queſtions qui ſont vn peu difficiles, mais ſeulement aux plus ayſées, ainſy qu'il pourra eſprouuer, ſi apres l'auoir mieux digerée il taſche de s'en ſeruir pour trouuer les contingentes, par exemple, de la ligne courbe * BDN, que ie ſuppoſe eſtre telle, qu'en quelque lieu de ſa circonference qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire BC, les deux cubes des deux lignes BC & CD

(a) zmínka Descarta o křivce (viz BDN) z roku 1638



(b) průběh křivky

Obrázek 4.2: Descartův list

loida.[12] Řešení podal i jeho bratr Jacob, Newton, Leibniz a l'Hospital.[13] Historie této křivky je popsána v dostupné literatuře,[14] proto se jí zde nebudeme zabývat.

Způsob, jakým se v té době nové křivky často dostávaly do povědomí, ilustrujeme na méně známé historii tzv. ***Cassiniho oválů*** v odstavci 4.2.1.

Období 1649–1748 je specifické vyšetřováním mnoha speciálních případů, ale chybí snaha o zobecňování. Jedinou výjimku v tomto směru tvoří teorie kubických křivek vytvořená Newtonem (viz sekce 4.3). Přestože např. rovnice paraboly přímo nabízí zobecnění

$$y^k = px, \; k \in \mathbb{Q}^+, \tag{4.13}$$

k rozsáhlejšímu studiu těchto tzv. obecných parabol dochází až v první polovině 19. století. Speciální případy ovšem spadají do období, kterým se zde zabýváme. Vlastnosti ***kubické paraboly***, tj. křivky (4.13) pro $k = 3$, studoval především Joh. Bernoulli v roce 1698. Případ $k = \frac{2}{3}$, tj.

[12] Ačkoliv se zdá velmi pravděpodobné, že už starověcí učenci uvažovali křivku tohoto typu, důkaz o tom nemáme. Podle [Lor11, str. 74] je první zmínka o cykloidě v knize Charlese de Bouvellese (1471–1553) vydané v Paříži roku 1501. V novověku studoval cykloidu Mikoláš Kusánský [Nicholas Cusa] (1401–1464), když se pokoušel vypočítat obsah kruhu. Pravděpodobně křivku pojmenoval Galileo v roce 1599. Roku 1639 psal E. Torricellimu (1608–1647), že studuje vlastnost této křivky 40 let.

[13] *Řešení obou bratrů byla názorným dokladem rozdílnosti jejich přístupů k matematickým problémům. Johann obdržel výslednou rovnici cykloidy geniální intuicí a využitím analogie s Fermatovým principem o šíření světla. Jacobův systematický postup vedl k objevu variačního počtu, k němuž dal takto vlastně Johann podnět.* Viz [Fuc99, str. 88].

[14] Viz např. [Fuc99].

ELEMENS D'ASTRONOMIE.

Par M. CASSINI, Maître des Comptes, de l'Académie Royale des Sciences, & de la Société Royale de Londres.

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

M. DCCXL.

D'ASTRONOMIE. *Livre II.* 149

l'on fera, comme *DS* 111905, eſt à *DC* 100000; ainſi 2′ 27″, ſont à l'angle *ODS*, que l'on trouvera comme ci-deſſus de 2′ 11″, que l'on retranchera de l'angle *CDS*, de 9ᵈ 17′ 52″, & on aura l'angle *CDO* ou *DCI*, qui lui eſt égal, de 9ᵈ 15′ 41″, qu'il faut retrancher de l'angle *ACD*, de 60ᵈ 0′ 0″, pour avoir l'angle *ACI*, de 50ᵈ 44′ 19″; & dans le triangle *ICS*, dont les côtés *IC*, *CS*, ſont connus, & l'angle compris *ICS*, eſt de 129ᵈ 15′ 41″, ſupplément de l'angle *ACI*, on aura l'angle *CSI*, de 42ᵈ 36′ 45″ ½; & l'on fera, comme *HC* 100000, eſt à *GC* 97796; ainſi la tangente de l'angle *CSI* ou *ASI*, de 42ᵈ 36′ 45″ ½, eſt à la tangente de l'angle *ATL* du vrai mouvement, qui convient à 60 degrés d'anomalie moyenne, qu'on trouvera de 41ᵈ 58′ 38″. Le retranchant de 60 degrés, on aura l'équation qui y répond, de 18ᵈ 1′ 22″, qui eſt plus petite de 34′ 22″ que dans l'hypotheſe elliptique ſimple.

III.

Autre hypotheſe du mouvement apparent du ſoleil autour de la terre.

Depuis l'obſervation exacte de la grandeur apparente des diametres du ſoleil, mon pere a trouvé une autre courbe différente de l'ellipſe, qui ſert à repréſenter fort exactement les mouvemens vrais du ſoleil, & ſes diverſes diſtances à la terre.

Il ſuppoſe que la terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le ſoleil la parcourt par ſon mouvement propre, de maniere que tirant de ſon centre aux deux foyers de la courbe, deux lignes droites, le rectangle fait ſur ces deux lignes, ſoit toûjours égal au rectangle fait ſur la plus grande & la plus petite diſtance du ſoleil à la terre.

Soit, par exemple, *AP* (*Fig.* 30.) une ligne qui repréſente le grand axe de cette courbe, dont *C* ſoit le centre, *F* un des foyers où eſt placée la terre, *E* l'autre foyer à égale diſtance du point *C*, *H* & *L* le ſoleil en deux ſituations différentes. Si l'on mene des points *H* & *L* aux foyers *E* & *F*, les lignes *HE*, *HF* & *LE*, *LF*; le rectangle ſous les lignes *HE*, *HF*, de même que ſous les lignes *LE*, *LF*, doit être égal au rectangle ſous les lignes *AF*, *FP*, qui

T iij

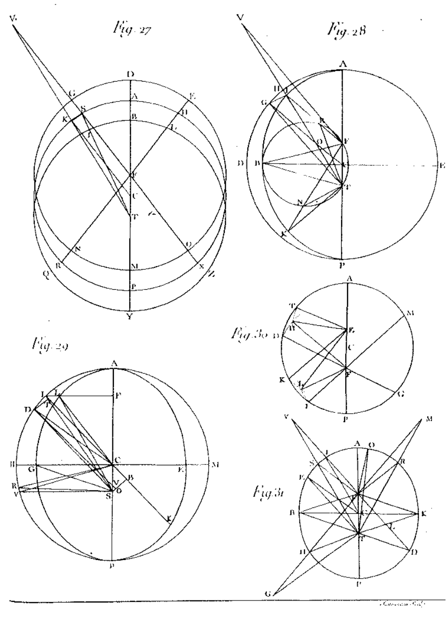
150 ELEMENS

meſurent la plus grande & la plus petite diſtance du ſoleil à la terre.

Pour déterminer les points *H* & *L*, qui répondent aux diſtances données du ſoleil à la terre, on décrira du point *C*, comme centre, & de l'intervalle *CA* ou *CP*, le cercle *ADPG*, & ayant pris *FD* à diſcrétion d'une quantité qui ſoit plus grande que *FP*, & plus petite que *AF*, on décrira du foyer *F*, comme centre à l'intervalle *FD*, l'arc de cercle *DH*, qui coupera le cercle *ADPG* en *D*. On prolongera *DF* en *G*, & du point *E*, comme centre à l'intervalle *ET*, égal à *FG*, on décrira un arc de cercle *TH*, qui coupera le précédent *DH* au point *H*. Je dis que le point *H* repréſentera un des points de la courbe cherchée où ſe rencontre le ſoleil lorſque ſa diſtance à la terre eſt meſurée par *FD*, car le rectangle fait ſous les lignes *FH*, *HE*, eſt égal au rectangle fait ſous les lignes *FD*, *FG*, qui par la conſtruction, leur ſont égales. Mais le rectangle fait ſous les lignes *FD*, *FG*, eſt par la propriété du cercle, égal au rectangle ſous les lignes *AF*, *FP*, qui meſurent la plus grande & la plus petite diſtance du ſoleil à la terre : donc le rectangle ſous les lignes *FH*, *HE*, eſt égal au rectangle fait ſous la plus grande & la plus petite diſtance à la terre, & par conſéquent le ſoleil eſt au point *H*.

On déterminera de la même maniere le point *L* où ſe trouve le ſoleil ſur la courbe cherchée, lorſque ſa diſtance à la terre eſt meſurée par *FI*, qui eſt plus petite que ſa moyenne diſtance *PC*, en menant du point *F* à l'intervalle *FI*, l'arc de cercle *IL*, & du point *E* à l'intervalle *EK*, égal à *FM*, l'arc *KL*, qui coupera le précédent au point *L* cherché.

Pour déterminer préſentement l'équation du ſoleil, ou la différence entre ſon anomalie moyenne & ſon anomalie vraie, qui répond aux différens points de ſon orbe, comme, par exemple, lorſqu'il eſt en *H*, on fera, comme *FD* ou *FH*, diſtance donnée du ſoleil à la terre, eſt à ſa plus grande diſtance *AF*; ainſi ſa plus petite diſtance *FP*, eſt à la grandeur de *FG* ou *HE*; & dans le triangle *EHF*, dont les côtés *FH*, *HE*, ſont connus, de même que *FE*, qui meſure le double de l'excentricité de l'orbe du ſoleil, on trouvera l'angle *EFH* de ſon anomalie vraie, & l'angle *FEH* ou *AEH* de ſon anomalie moyenne. La différence *EHF*, meſure



Obrázek 4.3: Ukázka z *Eléments d´astronomie* z roku 1740 (titulní strana, strany 149–150, kde popisuje J. Cassini ovál, a příslušný obrázek)

křivku typu

$$y^{\frac{2}{3}} = px,$$

pojmenoval J. Wallis[15] ***semikubickou parabolou***. Z Wallisova podnětu se jí zabýval W. Neil[16] roku 1657 a zjistil, že semikubická parabola je algebraicky rektifikovatelná křivka.[17] Jeho výsledky uveřejnil v roce 1659 opět Wallis (viz str. 164).

4.2.1. Cassiniho ovály

Cassiniho ovál je křivka, která byla nazvána po francouzském astronomovi Giovannim Domenicu Cassinim.[18] G. Cassini proslul mnohými výsledky v astronomii (např. objevil čtyři Saturnovy měsíce). Roku 1669 byl jmenován členem akademie věd v Paříži a ředitelem nové hvězdárny. Jeho syn, vnuk i pravnuk ho v ředitelství následovali. G. Cassini popsal ovál roku 1680 jako domělou dráhu pohybu Země kolem Slunce, přičemž Slunce se nachází v jednom ohnisku. Jeho výsledek uveřejnil jeho syn Jacob Cassini[19] v *Eléments d'astronomie (Základy astronomie)* teprve roku 1740 (viz ukázka na obr. 4.3).

Z dnešního pohledu lze říci, že Cassiniho ovál je jistou analogií elipsy a v moderní symbolice bychom ho popsali následovně:

Definice. Nechť F a G jsou dva pevně dané body v rovině, $F \neq G$. Množina bodů X v rovině takových, že součin vzdáleností $|FX|$ a $|GX|$ je konstantní a roven k^2, se nazývá ***Cassiniho ovál***.

Tedy Cassiniho ovál lze popsat rovnicí

$$|FX| \cdot |GX| = k^2. \tag{4.14}$$

Označíme–li vzdálenost mezi body F a G (ohnisky) $2c$, tj. $|FS| = c = |GS|$, pak v pravoúhlé souřadné soustavě $S[0,0]$, $x = |SG|$ je $F = [-c, 0]$, $G = [c, 0]$ a rovnice (4.14) může být vyjádřena jako

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= k^2, \\ ((x+c)^2 + y^2)((x-c)^2 + y^2) &= k^4. \end{aligned} \tag{4.15}$$

[15] John Wallis (1616–1703).
[16] William Neil (1637–1670).
[17] Viz [Fuc99, str. 139].
[18] Giovanni Domenico Cassini (1625–1712).
[19] Jacob Cassini (1677–1756).

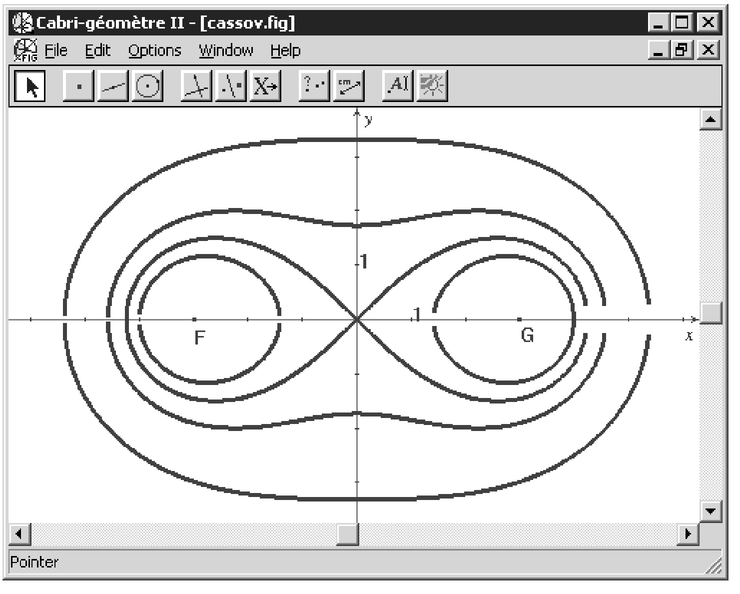
Jednoduchými úpravami obdržíme z (4.15) známější vyjádření:[20]

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) + c^4 - k^4 = 0. \tag{4.16}$$

Cassiniho ovál je křivka čtvrtého stupně, tj. s přímkou musí mít včetně násobnosti čtyři průsečíky. Vypočítáme průsečíky s osami x, y

$$[\pm\sqrt{c^2 \pm k^2}, 0],\ \ [0, \pm\sqrt{-c^2 \pm k^2}].$$

Vidíme, že některé průsečíky mohou být imaginární. Počet reálných průsečíků závisí na hodnotě parametrů c a k. Provedeme diskusi geometrických vlastností křivky vzhledem k těmto parametrům, pro $c > 0$, neboť c značí vzdálenost ohnisek, a bez újmy na obecnosti lze předpokládat také $k > 0$.



Obrázek 4.4: Cassiniho ovály sestrojené v Cabri Geometrii

Není těžké ukázat, že pro $c < k$ je Cassiniho ovál souvislá křivka a pro $c > k$ sestává ze dvou disjunktních větví (viz obr. 4.4). Pro $c = k$ prochází počátkem souřadného systému a protíná v tomto bodě sebe sama, neboť jestliže $c = k$, pak z rovnice (4.16) obdržíme

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = 0. \tag{4.17}$$

[20] Viz např. [Lor10, str. 209].

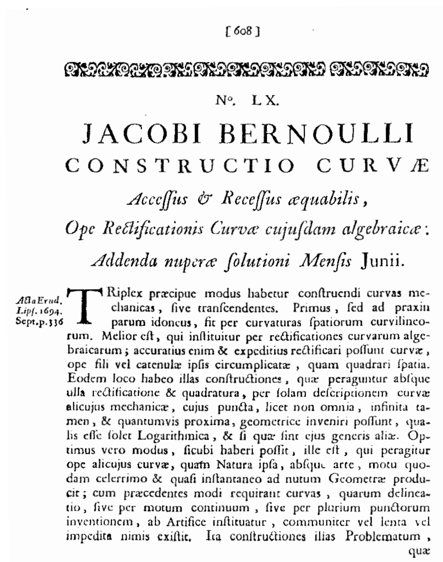
Takovou diskusi však Cassini neprovedl, s největší pravděpodobností proto, že ho jako astronoma zajímala tato křivka pouze jako domělá dráha oběhu Země kolem Slunce.

JACOBI
BERNOULLI,
BASILEENSIS,
OPERA.

Tomus Primus.

GENEVÆ,
Sumptibus Hæredum CRAMER
& Fratrum PHILIBERT.

M. DCC. XLIV.



[608]

N°. LX.

JACOBI BERNOULLI
CONSTRUCTIO CURVÆ

Acceſſus & Receſſus æquabilis,
Ope Rectificationis Curvæ cujuſdam algebraicæ:
Addenda nuperæ ſolutioni Menſis Junii.

Acta Erud. Lipſ. 1694. Sept. p. 336

TRiplex præcipue modus habetur conſtruendi curvas mechanicas, ſive tranſcendentes. Primus, ſed ad praxin parum idoneus, fit per curvaturas ſpatiorum curvilineorum. Melior eſt, qui inſtituitur per rectificationes curvarum algebraicarum; accuratius enim & expeditius rectificari poſſunt curvæ, ope fili vel catenulæ ipſis circumplicatæ, quam quadrari ſpatia. Eodem loco habeo illas conſtructiones, quæ peraguntur abſque ulla rectificatione & quadratura, per ſolam deſcriptionem curvæ alicujus mechanicæ, cujus puncta, licet non omnia, infinita tamen, & quantumvis proxima, geometrice inveniri poſſunt, qualis eſſe ſolet Logarithmica, & ſi quæ ſint ejus generis aliæ. Optimus vero modus, ſicubi haberi poſſit, ille eſt, qui peragitur ope alicujus curvæ, quam Natura ipſa, abſque arte, motu quodam celerrimo & quaſi inſtantaneo ad nutum Geometræ producit; cum præcedentes modi requirant curvas, quarum delineatio, ſive per motum continuum, ſive per plurium punctorum inventionem, ab Artifice inſtituatur, communiter vel lenta vel impedita nimis exiſtit. Ita conſtructiones illas Problematum, quæ

Obrázek 4.5: *Acta Eruditorum* z roku 1694 s příspěvkem Jacoba Bernoulliho o lemniskatě

Roku 1694 Jacob Bernoulli[21] poprvé popsal nezávisle na Cassinim ten případ, kdy je konstanta rovna polovině vzdálenosti ohnisek – viz rovnice (4.17). Bernoulli uvedl polární rovnice této křivky a pojmenoval ji *lemniscus* z řeckého slova $\lambda\iota\mu\nu\iota\sigma\kappa o\varsigma$ – stuha, mašle. Svůj objev uveřejnil v *Acta Eruditorum* v září 1694 (viz ukázka na obr. 4.5). Netušil tehdy, že před čtrnácti lety Cassini popsal obecnější případ takové křivky, což není překvapivé, uvědomíme-li si, že o Cassiniho oválu píše až jeho syn roku 1740. Zajímavé ale je, že o souvislosti Cassiniho oválu a Bernoulliho lemniskaty nevěděli matematikové ještě několik desetiletí, ačkoliv se zejména lemniskatou řada z nich zabývala. Lemniskatě vyjádřené implicitní rovnicí (4.17) odpovídá křivka procházející počátkem na obr. 4.4. Vlastnosti lemniskaty studoval zejména Fagnano kolem roku 1750.[22] Zdá se však, že geometři Fagnanovy epochy studovali lemnis-

[21]Jacob (Jacques) Bernoulli (1654–1705), bratr neméně proslulého matematika Johanna Bernoulliho.

[22]Giovanni Francesco Fagnano (1715–1797). Později se lemniskatou zabývali také Euler a Gauss. Jejich práce vedly k zavedení eliptických funkcí a k teorii eliptických integrálů v 19. století.

katu více z analytického hlediska, než aby odkrývali její geometrické vlastnosti. G. Loria uvádí rok 1782 jako rok, kdy P. Ferroni[23] ukázal že speciálním případem Cassiniho oválů je Bernoulliova lemniskata.[24] Ale ještě v roce 1785 píše d'Alembert v *Encyklopedie méthodique* pod heslem LEMNISCATE:

Je možno najít další křivky ve tvaru číslice osm. Viz např. elipsa Cassiniho, ale ta, o které jsme se právě zmiňovali, je jednodušší.[25]

Z toho vyplývá, že lemniskatu a Cassiniho ovály považoval za dvě různé křivky. A tak se skutečnost, že lemniskata je jen speciální případ Cassiniho oválů, dostává do povědomí matematiků až po roce 1806, kdy byla totožnost obou křivek dokázána G. Saladinim.[26]

4.3. Isaac Newton a teorie křivek

V předchozích odstavcích jsme mohli sledovat, že nových výsledků obdržených v geometrii pomocí nové metody představené Descartem nebylo na přelomu 17. a 18. století mnoho a hlavně měly spíš nesouvislý charakter.[27] Teprve Newton přidal k analytické geometrii kuželoseček novou širokou oblast – teorii kubických křivek, jejichž jednotlivé případy byly známy již dříve.

Není naším cílem věnovat se zde osobnosti Newtona, ani jeho rozsáhlému přínosu pro přírodní vědy. Klademe si za úkol jen poukázat na to, co přinesly jeho práce k teorii křivek. Přestože Newtonovy myšlenky zásadně ovlivnily celou tehdy známou matematiku a fyziku, šířily se většinou jen díky korespondenci, přednáškám a rukopisům kolujícím mezi jeho přáteli. Publikoval je často až na naléhání druhých a mnohé bylo publikováno několik let po rukopise nebo až po Newtonově smrti.

Je známo, že se během svých studií na univerzitě v Cambridge seznámil s pracemi Eukleida, Apollónia, Vièty, Fermata, Keplera, Descarta i Wallise. Po té, co prostudoval druhé latinské vydání Descartovy *Geometrie* vydané v letech 1659–61 a spisy Wallise a Schootena, Newton

[23] Pietro Ferroni (1744–1825).

[24] Loria se v [Lor10, str. 216] odkazuje na článek *Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condarcet*, Mem. Societa ital. delle Scienze V, 1790.

[25] *Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par example, Ellipse de Cassini: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple.* Viz *Encyklopedie méthodique*, Paris, 1785, tome second, str. 266-7.

[26] Girolamo Saladini (1731–1813); viz [Lor10, str. 216].

[27] *Větší roli než v samotné geometrii sehrála metoda souřadnic a rovnice s proměnnými veličinami v rozvíjející se analýze.* Viz [Juš70, str. 114].