Závěrem poznamenejme, že Newton také jako první aplikoval na studium rovinných křivek nekonečné řady. Přivedl ho k tomu jeho výrazný sklon k praktickému významu matematických objevů. V traktátu napsaném nejpozději v roce 1669, ale publikovaném až 1685 v knize Wallise,[56] se mimo jiné zabýval řešením rovnice

$$y^6 - 5xy^5 + x^2y^4 - 7x^2y^2 + x^4 + 6x^3 = 0, \tag{4.22}$$

což je křivka šestého stupně, která má v počátku trojný bod s jedinou tečnou v ose y (viz obr. 4.10). Metody, jimiž Newton řešil rovnice vyšších stupňů a které iniciovaly další studium algebraických rovnic, přesahují rámec našeho tématu.[57]

4.4. Newtonovi nástupci

Systematický výklad křivek třetího stupně přirozeně vybízel k pokusům o systematizaci křivek stupně čtvrtého a zkoumání křivek vyšších stupňů přitáhlo pozornost k singulárním bodům, jejichž jednodušší případy byly známy už dříve. Zajímavé práce na tato témata pochází už od Newtonových současníků a pokračují v nich další generace.

4.4.1. Maupertuis, Bragelone

Maupertuis[58] a který se ukázal být z obecných geometrických úvah bez konkrétních vypočtů přišel k závěru, že inflexní body i body vratu algebraických křivek vyšších stupňů se mohou střídavě objevovat v různých kombinacích.[59]

Bragelone[60] publikoval obecnou práci, která měla představovat klasifikaci křivek čtvrtého stupně po vzoru Newtona.[61] Studoval vlastnosti, které se mohou speciálně vyskytovat u křivek čtvrtého stupně, ale jeho výčet těchto vlastností nebyl úplný. Jím poprvé byl zkoumán izolovaný bod sebedotyku křivky, který nazval „nekonečně malou lemniskatou“. Bragelone zkoumal také vícenásobné body a inflexní body vyšších řádů.

[56] Viz [Fuc99, str. 151].

[57] Podrobněji viz např. [Byd48].

[58] Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698–1759).

[59] *Sur quelques affections des courbes (O některých vlastnostech křivek)*, Mém. Ac. Paris, 1731 (1729).

[60] Christophle Bernard de Bragelone (1688–1744).

[61] Mém. Ac. Paris, 1732 (1730), 1734 (1731).

4.4.2. Jean Paul de Gua de Malves

Singulární body algebraických křivek studoval také Gua De Malves[62] v práci z roku 1740 *Usages de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres (Použití Descartovy analýzy k nalezení hlavních vlastností křivek všech řádů bez užití diferenciálního počtu).* Jak je patrno z názvu knihy, snažil se ukázat přednosti metod analytické geometrie nad metodami diferenciálního počtu při řešení úloh teorie algebraických křivek. Tvrdil, že diferenciální počet je vhodné používat jen při studiu transcendentních křivek, avšak někdy pro zkrácení výpočtu sám diferenciální počet používal i při studiu algebraických křivek. Například rovnici pro vyjádření středu kuželosečky

$$nyy + rxy + mxx + ay + bx + cc = 0,$$

převedl na tvar

$$\overline{2ny + rx + a}\,\mathrm{d}y + \overline{2mx + ry + b}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Stěžejní v jeho práci bylo studium singulárních bodů křivek, je zde i uveden termín *point singulier*. Používal metodu posunutí počátku souřadnic do singulárního bodu $[p, q]$ pomocí transformace

$$x = p + z + nu,$$
$$y = q + mu,$$

potom osu x uvažoval jako pevnou a změnou m, n pohyboval osou y. Objevil přitom, že singulární bod v počátku souřadnic leží na jedné nebo několika křivkách

$$y^m = ax^{\pm n}.$$

Udělal ovšem chybu, když neuvažoval, že u algebraických křivek mohou existovat i body vratu druhého druhu, o kterých psal Maupertuis, a předpokládal, že už první člen rozkladu ve všech případech plně charakterizuje větve křivky. Tuto chybu odhalil až Euler (viz str. 176).

Gua de Malves uvažoval také nekonečně vzdálené body jako singulární body, které je možno převést v obyčejné singulární body projekcí. Pro převod těchto bodů do počátku souřadnic použil transformaci

$$x = \pm\frac{pq}{y},\ y = \pm\frac{pu}{z},$$

[62]Jean Paul de Gua de Malves (1712–1785).

kde p, q jsou konstanty a u, z nové souřadnice. Jde v podstatě o transformaci projektivních souřadnic v projektivní rovině. Projektivní pohled ho přivedl k tvrzení:

Tvrzení. Jestliže křivka třetího stupně má tři inflexní body, pak tyto body nutně leží na přímce.[63]

Poznamenejme ještě, že zkoumal detailně i Cassinim popsané křivky čtvrtého stupně (viz odstavec 4.2.1) a dokonce uvažoval rovnici

$$y^2 + x^2 + 2bx + b^2 = 0$$

jako rovnici páru imaginárních přímek $y = \pm i(x + b)$.

4.4.3. Colin Maclaurin

Newtonův způsob zobrazování křivek se dočkal značného rozpracování v knize Maclaurina[64] *Geometrica organica sive descriptio linearum curvarum universalis (Přirozená geometrie nebo-li univesální vykreslování křivek)* z roku 1720. Maclaurin také dokázal mnohé Newtonovi konstrukce a přidal konstrukce nové. Zkoumal generování křivek pomocí úhlů dané velikosti, jejichž vrcholy se pohybovaly po přímkách a křivkách různých stupňů, a ve spojení s tím zformuloval větu:

Věta 4.2. Dvě algebraické křivky m-tého a n-tého stupně se protínají maximálně v $m \cdot n$ bodech.

Současné znění[65] této větě dal Euler v roce 1748, když přidal imaginární body a nekonečně vzdálené průsečíky křivek. Stejná věta byla nalezena také později v rukopisech Newtona, je patrně z roku 1667.[66] Další upřesnění věty 4.2 s ohledem na vlastnosti průsečíků, které jsou násobnými body křivek, podal v roce 1764 É. Bézout.[67] Od něj pochází také zobecnění této věty na průnik ploch v trojrozměrném prostoru.

V další Maclaurinově práci, která vyšla až posmrtně v roce 1748, *De linearum geometricarum proprietatibus generalibus (O obecných vlastnostech geometrických křivek)* je mnoho tvrzení o protínání křivek třetího stupně s přímkami a o tečnách ke křivkám v jejich průsečících s přímkami. Je zde dokázána např. také věta:

---

[63] Tato věta byla nalezena také v posmrtně vydaném spise Maclaurina – viz odstavec 4.4.3.

[64] Colin Maclaurin (1698–1746).

[65] Současné znění věty 4.2: Počet bodů, v nichž se protínají dvě algebraické křivky, je roven součinu stupňů jejich rovnic.

[66] *The mathematical papers of Isaac Newton*, ed. D. T. Whiteside, Cambridge, 1968, str. 177.

[67] Étienne Bézout (1730–1783).

Věta 4.3. Jestliže vedeme z daného bodu P v rovině několik přímek protínajících algebraickou křivku (takové přímky se nazývají *transverzály*), potom suma převrácených hodnot vzdáleností od bodu P k bodům průsečíků jedné z tranverzál s křivkou je rovna sumě převrácených hodnot vzdáleností od tohoto bodu k bodům průseku té stejné tranverzály s tečnami ke křivce sestrojenými v bodech jejího průniku s druhou transverzálou (viz obr. 4.11).

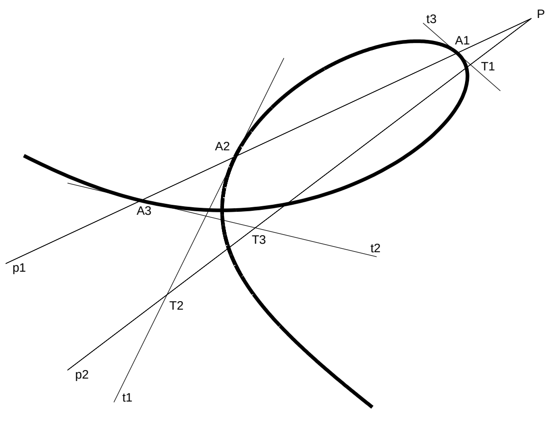
Maclaurin dokázal také větu, kterou vyslovil R. Cotes:[68]

Tvrzení. Harmonický střed M průsečíků transverzály PA s křivkou $A, B, C, \ldots$, tj. takový bod M, pro který platí

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC} + \cdots ,$$

se při otáčení transverzály kolem bodu P bude pohybovat po přímce.

Tato přímka byla později nazvána polárou bodu P.



Obrázek 4.11: Příklad k větě 4.3. Pro křivku třetího stupně proťatou transverzálami p_1, p_2 platí:
$\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \frac{1}{PA_3} = \frac{1}{PT_1} + \frac{1}{PT_2} + \frac{1}{PT_3}$.

Na závěr uveďme ještě jednu významnou Maclaurinovu větu týkající se invariantů rovinných algebraických křivek, která i dnes tvoří součást klasické teorie křivek:

[68]Roger Cotes (1682–1716).

Věta 4.4. Počet jednoduchých nezávislých podmínek určujících rovinnou křivku stupně n je

$$N = \frac{n(n+3)}{2} = \binom{n+2}{2} - 1.$$

Tento výsledek je speciálním případem obecnější věty:

Věta 4.5. Počet jednoduchých nezávislých podmínek určujících nadplochu stupně n v m-rozměrném projektivním prostoru je

$$N = \binom{n+m}{m} - 1.$$

Maclaurin také shrnul některé poznatky W. Braikenridgeho[69] uvedené v jeho pojednání z roku 1733 *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum (Geometrická etuda o vykreslování křivek).*

4.4.4. James Stirling

Newton v *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis* neuvádí důkazy, ale mnohá jeho tvrzení byla dokázána v knize Stirlinga[70] *Lineae tertii ordinis Newtonianae (Newtonovy křivky třetího stupně)* z roku 1717. Kromě toho zde Stirling uvádí další svoje výsledky týkající se křivek. Např. vyslovil téměř současně s Hermannem tvrzení o počtu koeficientů rovnice algebraické křivky n-tého stupně (viz str. 134) a odtud vyvodil:

Tvrzení. Křivka n-tého stupně je určena $\frac{n(n+3)}{2}$ body.

Dále Stirling určil možný počet nekonečných větví křivek sudých a lichých stupňů, asymptoty křivek a všiml si, že stupeň u y v rovnici křivky lze redukovat v případě, když osa y je rovnoběžná s asymptotou křivky. Studoval také asymptoty obecně a průměry křivek vyšších stupňů, tj. takové přímky, že je-li tato přímka x-ovou osou v nějakém obecně kosoúhlém systému souřadnic, pak součet všech y-ových souřadnic bodů křivky se stejnou x-ovou souřadnicí je roven nule. Stirling ukázal, že rovnice křivky v takovém systému souřadnic neobsahuje $(n-1)$-ní mocninu y. Stirling používal při studiu křivek vyjádření y-ové souřadnice pomocí x.

K Newtonovu výčtu 72 typů křivek třetího stupně přidal pět dalších. Zdůrazňoval analogii mezi teorií křivek 2. a 3. stupně. Pomocí těchto analogií dospěl např. k analytickému důkazu Newtonovy věty:

[69]William Braikenridge (1700 – 1769).
[70]James Stirling (1692–1770).

Tvrzení. Je dán pevný bod O. Jestliže tímto bodem vedeme dvě přímky a, b, které protínají křivku třetího stupně v bodech A_1, A_2, A_3 a B_1, B_2, B_3, potom podíl součinu velikostí úseček vyťatých na přímkách a a b je konstantní a nezávislý na poloze bodu O, tj.

$$\frac{|OA_1| \cdot |OA_2| \cdot |OA_3|}{|OB_1| \cdot |OB_2| \cdot |OB_3|} = konst. \tag{4.23}$$

Poznamenejme, že od Newtona pochází i obecnější formulace:

Tvrzení. Jsou dány dva pevné body O a P. Jestliže těmito body vedeme rovnoběžné přímky r, s, které protínají křivku n-krát v bodech $R_1, R_2, \ldots, R_n$ a $S_1, S_2, \ldots, S_n$, potom podíl součinu velikostí úseček OR_i, $i = 1, \ldots, n$, vyťatých na přímce r a velikostí úseček PS_i, $i = 1, \ldots, n$, vyťatých na přímce s je konstantní a nezávislý na rovnoběžkách, tj.

$$\frac{|OR_1| \cdot |OR_2| \ldots |OR_n|}{|PS_1| \cdot |PS_2| \ldots |PS_n|} = konst. \tag{4.24}$$

4.4.5. Alexis Clairaut

Stirling podal mimořádně cenné komentáře k práci Newtona, ale nemohl dokázat jednu z nejdůležitějších vět (viz věta 4.1) to udělal až Clairaut.[71] Clairautův přínos pro geometrii byl neobyčejný. Už ve svých 12 letech překvapil pařížské akademiky prací o některých křivkách čtvrtého stupně.[72]

Protože některé úlohy v Clairautově spise z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure (Pojednání o křivkách s dvojí křivostí)* jsou řešeny metodami diferenciální geometrie, budeme se mu podrobněji věnovat v následujícím odstavci.

4.5. Počátky diferenciální geometrie křivek

Připomeňme Descartův názor o vztahu mezi přímkou a křivkou

[...] *poměr, který je mezi přímými a křivými není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže, nebylo by možno vyvodit nic, co by bylo přesné a jisté;* [...] [Des37, str. 340–341]

[71] Alexis Claude Clairaut (1713–1765).

[72] V jeho autorství prý uvěřili teprve po té, co jim správně zodpověděl všechny otázky, které mu položili. Viz [Juš72, str. 160].