Tvrzení. Je dán pevný bod O. Jestliže tímto bodem vedeme dvě přímky a, b, které protínají křivku třetího stupně v bodech A_1, A_2, A_3 a B_1, B_2, B_3, potom podíl součinu velikostí úseček vyťatých na přímkách a a b je konstantní a nezávislý na poloze bodu O, tj.

$$\frac{|OA_1| \cdot |OA_2| \cdot |OA_3|}{|OB_1| \cdot |OB_2| \cdot |OB_3|} = konst. \tag{4.23}$$

Poznamenejme, že od Newtona pochází i obecnější formulace:

Tvrzení. Jsou dány dva pevné body O a P. Jestliže těmito body vedeme rovnoběžné přímky r, s, které protínají křivku n-krát v bodech $R_1, R_2, \ldots, R_n$ a $S_1, S_2, \ldots, S_n$, potom podíl součinu velikostí úseček OR_i, $i = 1, \ldots, n$, vyťatých na přímce r a velikostí úseček PS_i, $i = 1, \ldots, n$, vyťatých na přímce s je konstantní a nezávislý na rovnoběžkách, tj.

$$\frac{|OR_1| \cdot |OR_2| \ldots |OR_n|}{|PS_1| \cdot |PS_2| \ldots |PS_n|} = konst. \tag{4.24}$$

4.4.5. Alexis Clairaut

Stirling podal mimořádně cenné komentáře k práci Newtona, ale nemohl dokázat jednu z nejdůležitějších vět (viz věta 4.1) to udělal až Clairaut.[71] Clairautův přínos pro geometrii byl neobyčejný. Už ve svých 12 letech překvapil pařížské akademiky prací o některých křivkách čtvrtého stupně.[72]

Protože některé úlohy v Clairautově spise z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure (Pojednání o křivkách s dvojí křivostí)* jsou řešeny metodami diferenciální geometrie, budeme se mu podrobněji věnovat v následujícím odstavci.

4.5. Počátky diferenciální geometrie křivek

Připomeňme Descartův názor o vztahu mezi přímkou a křivkou

[...] *poměr, který je mezi přímými a křivými není znám, a myslím si, že ani lidmi poznán být nemůže, nebylo by možno vyvodit nic, co by bylo přesné a jisté;* [...] [Des37, str. 340–341]

[71] Alexis Claude Clairaut (1713–1765).

[72] V jeho autorství prý uvěřili teprve po té, co jim správně zodpověděl všechny otázky, které mu položili. Viz [Juš72, str. 160].

Těžko dnes soudit, zda Descartes svou geniální intuicí předpovídal to, co bylo dokázáno teprve roku 1882. Najít poměr mezi *mezi přímými a křivými* v podstatě znamená najít k dané křivce úsečku stejné délky, tj. rektifikovat křivku. Některé křivky rektifikovat lze, ale např. provést rektifikaci kružnice přesně nelze. Znamenalo by to najít úsečku délky 2π. Aby bylo možno takovou konstrukci provést přesně,[73] muselo by číslo π být číslo algebraické.[74] Roku 1882 však bylo dokázáno, že číslo π je transcendentní.[75] Každopádně ze 17. a 18. století pochází řada postupů užívajících výpočtů vedoucích k dostatečně přibližným výsledkům. Rektifikace křivek patřila spolu s konstrukcí tečen, normál apod. také k důležitým úlohám, na nichž se formovaly a ověřovaly počátky infinitezimálního počtu.

Nejstarší případ rektifikace algebraické křivky je rektifikace semikubické paraboly (viz str. 138). Wallisem uveřejněný výsledek z roku 1659 bychom v dnešní symbolice zapsali následovně: Délka oblouku semikubické paraboly v intervalu $< 0, x >$ pro $p = 1$ je

$$\int_0^x \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, \mathrm{d}x = \frac{8}{27}[(1 + \frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}} - 1].$$

Na přelomu 17. a 18. století se objevuje také snaha připojit ke každé křivce funkci, která říká, jak moc se křivka v každém bodě „ohýbá“. Stupeň ohybu udává tzv. křivost křivky. V roce 1684 Leibniz publikoval *Meditatio nove de natura anguli contactus et osculi (Nové zamyšlení o povaze úhlů styčných a dotykových)*, kde podává první myšlenky o křivosti.

Stejně jako je přímka vhodná pro určení směru, protože její směr je všude stejný, je kružnice vhodná pro určení křivosti, protože její křivost je všude stejná. [Gra94, str. 332]

Leibniz uvažoval danou křivku jako *osculovanou* kružnicí v každém bodě.[76] Kompletní teorii osculací později rozvinul Jacob Bernoulli.

Dříve než Leibniz našel analytické vyjádření křivosti Newton, ale jeho výsledky byly publikovány mnohem později, teprve roku 1736 v *Method of fluxions (Metodě fluxí)*.

[73] Míněno algebraicky přesně, nikoliv použít některou z přibližných metod, které jsou dobře známy z technické praxe.

[74] Algebraické číslo je takové číslo, které lze získat jako kořen nějaké algebraické rovnice s racionálními koeficienty.

[75] Důkaz podal K. L. F. Lindemann (1852–1939) a lze ho najít např. v [Fuc87, str. 112–113].

[76] Od Leibnize tedy pochází termín oskulační kružnice, z latinského *osculare* – líbat.

Kružnice křivosti je kružnice s vlastností, že není možné nakreslit jinou kružnici, která by byla v úhlu mezi křivkou a kružnicí. Říkáme, že křivka má v bodě dotyku stejnou křivost jako tato kružnice. [Gra94, str. 332]

Newton vypočítal její poloměr na základě vyšetřování normál křivky ve třech nekonečně blízkých bodech

$$r = \frac{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{z}},$$

kde $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, přičemž symbol tečka označuje to, co dnes nazýváme derivací.

Newton uvažoval jen rovinné křivky. Prvním rozsáhlým pojednáním o křivkách prostorových byl až Clairautův spis z roku 1731 *Recherches sur les courbes à double courbure (Pojednání o křivkách s dvojí křivostí)*,[77] který byl pařížské akademii předložen už v roce 1729. Byl jedním z prvních pokusů o diferenciální geometrii křivek a obsahuje patrně první soustavnou aplikaci analytické geometrie na prostorové útvary. Clairaut definuje prostorové křivky jako průsečnice dvou válcových ploch a analyticky je vyjádřil soustavou rovnic. Bez zábran a v plném rozsahu Clairaut kromě rovnice koule, rotačního kužele a rotačního paraboloidu odvodil rovnice některých složitějších rotačních ploch – elipsoidu, jednodílného rotačního hyperboloidu a plochy vznikající rotací paraboly kolem tečny ve vrcholu. Nalezl rovnici kužele s daným vrcholem a řídící křivkou, ve speciálních případech uvažoval paraboly, hyperboly a elipsy vyšších řádů. Všiml si, že v případě, kdy vrchol je v počátku souřadnic, je rovnice homogenní.

Pozoruhodné pojednání o křivosti křivek a ploch je dílem L. Eulera (viz odstavec 5.2.1).

4.6. Odkaz „století křivek“ pro další vývoj

V předchozí kapitole jsme byli svědky zrodu mocného nástroje ke zkoumání křivek (a geometrických objektů obecně) – analytické geometrie. Descartova a Fermatova analytická geometrie nejen že poskytla metodu kvantitativního zvládnutí geometrických tvarů, ale umožnila vytvářet geometrické křivky do té doby neznámé a obrátila tímto směrem pozornost geometrů. Historikové matematiky se však všeobecně shodují

[77]Termín „křivka s dvojí křivostí“ pochází ze skutečnosti, kterou předpokládal už Descartes, že prostorová křivka je určena svými dvěma průměty do dvou k sobě kolmých průměten; poprvé tento termín předložil pařížský akademik Henri Pitot (1695–1771) v Mém. Ac. Paris v roce 1727 (1726), aby zdůraznil podstatný rozdíl mezi šroubovicí na válci a spirálou v rovině. Viz [Juš72, str. 175].