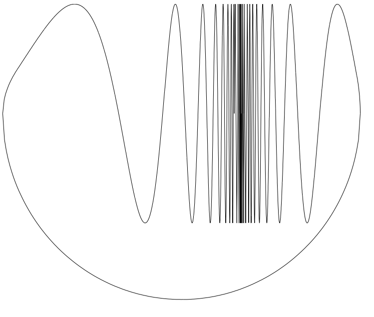
Věta 6.3 (Jordanova). Buď X topologický prostor homeomorfní s $\mathbb{E}_2$ nebo S_2, buď $Y \subset X$ homeomorfní s S_1. Potom $X \setminus Y$ má právě dvě komponenty.

Poznamenejme ještě, že v prostorech vyšší dimenze není situace zdaleka tak jednoduchá a Jordanovu větu lze uvést jen ve slabším tvaru.[17] Nyní zformulujeme další zajímavou podmínku pro to, aby dané kontinuum bylo Jordanovou křivkou:

Tvrzení. Aby ohraničené kontinuum C, které dělí rovinu na dvě oblasti bylo uzavřenou Jordanovou křivkou, je nutné a stačí, aby každý bod M tohoto kontinua C byl koncem dvou spojitých čar L a L', které sestávají ze spočetně mnoha vzájemně navazujících úseček, přičemž jedna z nich sestává z bodů vnitřní oblasti (kromě bodu M) a druhá sestává z bodů vnější oblasti (kromě bodu M).

Na obrázku 6.5 je příklad kontinua, které dělí rovinu na dvě oblasti, ale není Jordanovou křivkou.



Obrázek 6.5: Příklad kontinua, které dělí rovinu na dvě oblasti, ale není křivkou ve smyslu Jordanovy definice

6.2. Křivka v prostoru dimenze n

V úvodu práce *Les multiplicités Cantoriennes (O Cantorových varietách)* z roku 1922 píše Urysohn:[18]

Problém čistě geometrické definice křivky v současné době není plně řešen. [Ury51, str. 219]

[17] **Jordanova věta pro prostory vyšší dimenze:** Buď X topologický prostor homeomorfní s $\mathbb{E}_n$ nebo S_n. Každá podmnožina $A \subset X$, která je homeomorfní s S_{n-1}, roztíná X .

[18] Pavel Samujlovič Urysohn (1898–1924).

Dále uvádí, že v té době byly známy tři definice křivky – definice Cantorova, definice Zorettiho[19] a definice Janiszewského,[20] ale tyto definice byly míněny jen pro rovinné křivky.

Prostý přenos Cantorovy definice (viz str. 209) do prostoru není možný, už v trojrozměrném prostoru nebude vyhovovat, protože např. čtverec je v prostoru $\mathbb{E}_3$ kontinuum bez vnitřních bodů.

O definici křivky v trojrozměrném prostoru se pokusil Zoretti:[21]

Definice křivky (Zorettiho). Budeme říkat, že trojrozměrné continuum je křivkou, lze-li pro každý bod této množiny najít alespoň jednu rovinu, která nemá s touto množinou společné continuum.

Ale je zřejmé, že každá uzavřená konvexní množina v $\mathbb{E}_3$ by potom byla křivkou. Janiszewski v podstatě pouze upravil Jordanovu definici:

Definice křivky (Janiszewského). Křivkou budememe nazývat jednoduchý oblouk, tj. topologický obraz úsečky.

Jinak řečeno Jordanovy křivky bez násobných bodů. Tato definice sice vyhovuje i pro prostorové křivky, ale zužuje se jen na křivky prosté.

Urysohn přidává jiný pohled

Topologie (Analysis situs) je větev geometrie, která zkoumá vlastnosti množin invariantní vůči homeomorfismům (t. j. vzájemně jednoznačným a spojitým zobrazením). Z toho plyne, že takové základní pojmy jiných oborů geometrie jako přímka, rovina atd. v obyklém pojetí nemají v topologii smysl, protože nemají v ukázaném smyslu invariantnost. Proto je musíme změnit na takové pojmy jako křivka, povrch atd. Jde v prvé řadě o to definovat, co tyto pojmy znamenají; přesněji řečeno jde o to definovat např. třídu množin, které by byly topologicky invariantní a obsahovaly každou množinu, kterou rozumíme pod pojmem „křivka“ a neobsahovaly žádnou, které my tento název dát nemůžeme. První, co přijde na mysl, je nazvat „křivkou“ takovou množinu, která je homeomorfní s úsečkou, „plochou“ množinu, která je homeomorfní s obdélníkem. A při libovolném n, množinu homeomorfní s n-rozměrnou krychlí. [Ury51, str. 229–230]

Dále Urysohn píše, že tato definice je v jistém smyslu výhodná, a připomíná na ní postavené práce Brauera, ale vytyčuje dvě její nevýhody

- je negeometrická, protože vyžaduje zobrazení, tj. *funkci*

[19] Ludovic Zoretti (1880–1948).
[20] Zygmunt Janiszewski (1888–1920).
[21] *Contribution à l'étude des lignes Cantoriennes*, Acta Math. 36, 1912, str. 267.

- n-rozměrná krychle není topologickým objektem.

V dnešní době lze těžko souhlasit s tím, že by zobrazení nepatřilo do geometrie,[22] ale jen to ukazuje, jak byl přijímán pojem funkce ještě v roce 1922 (viz odst. 5.1). Úkolem tedy zůstává vyjádřit n-rozměrnou krychli jako topologický prostor. Přičemž nás bude vzhledem k vytyčenému tématu zajímat pouze prostor jednorozměrný. Urysohn označuje problém J_n:

Problém J_n: Podat čistě geometrickou definici n-rozměrných Jordanových množin.

[Ury51, str. 230]

Dále píše, že problém J_1 (geometrická definice Jordanových křivek) je řešen v disertaci Janiszewského, ale stejným způsobem definovat plochy se mu nepodařilo. Ovšem čistě matematický význam problémů J_n je malý, jde spíše o problém filozofický. V matematice

dokud se nenajde dobrá definice, používá se s úspěchem špatná, ale logicky správná. [Ury51, str. 231]

Urysohn dále píše, že situace se mění, tj. matematický význam začíná převažovat nad filozofickým, pokud se vrátíme k problému uvedenému v počátku. Tento problém označuje jako K_n:

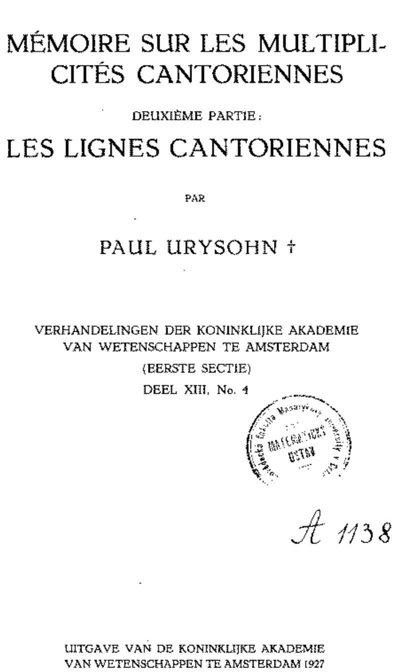
Ukázat nejobecnější množiny, které lze ještě pojmenovat křivkou, plochou apod.
Tady nemáme žádnou definici; tím způsobem vidíme, že tyto problémy (které budeme nazývat problémy K_1, K_2 apod.) mají úplně jiný význam.
[Ury51, str. 231]

Dále píše, že problém K_1 byl řešen Cantorem, ale jeho definici nelze přenést z roviny ani do trojrozměrného prostoru.

My musíme nejdříve řešit problém K_1, t.j. podat novou definici cantorových křivek, protože dřívější definice, jak jsme ukázali se jeví nedostatečné. [...] *Cantorova definice není vnitřní, používá vztahy mezi množinami a body, které nepatří do této množiny. Takové množiny se pak budou v jiných prostorech měnit.* [Ury51, str. 232]

Přejdeme nyní k definici křivky, kterou podal Urysohn:

[22] V tomto smyslu komentuje Urysohnovy spisy i Alexandrov v roce 1951. Viz [Ury51, 488].



MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES

DEUXIÈME PARTIE:

LES LIGNES CANTORIENNES

PAR

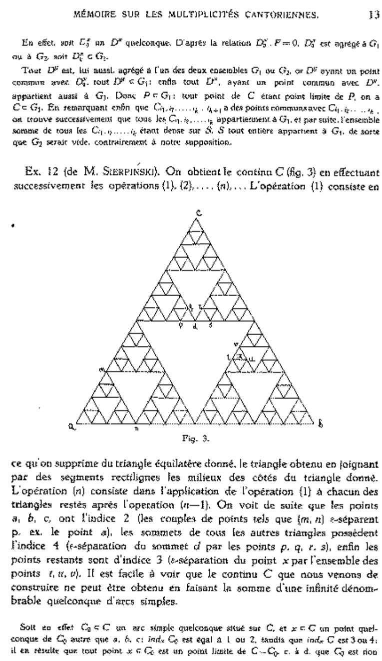
PAUL URYSOHN †

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM
(EERSTE SECTIE)
DEEL XIII, No. 4

A 1138

UITGAVE VAN DE KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM 1927

(a) Titulní strana



MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES. 13

En effet, soit D_0^x un D^x quelconque. D'après la relation $D_0^x \cdot F = 0$, D_0^x est agrégé à G_1 ou à G_2, soit $D_0^x \subset G_2$.

Tout D^x est, lui aussi, agrégé à l'un des deux ensembles G_1 ou G_2, or D^x ayant un point commun avec D_0^x, tout $D^x \subset G_1$; enfin tout D^x, ayant un point commun avec D^x, appartient aussi à G_1. Donc $P \subset G_1$: tout point de C étant point limite de P, on a $C \subset G_1$. En remarquant enfin que $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}}$ a des points communs avec $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$, on trouve successivement que tous les $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ appartiennent à G_1, et par suite, l'ensemble somme de tous les $C_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ étant dense sur S, S tout entière appartient à G_1, de sorte que G_2 serait vide, contrairement à notre supposition.

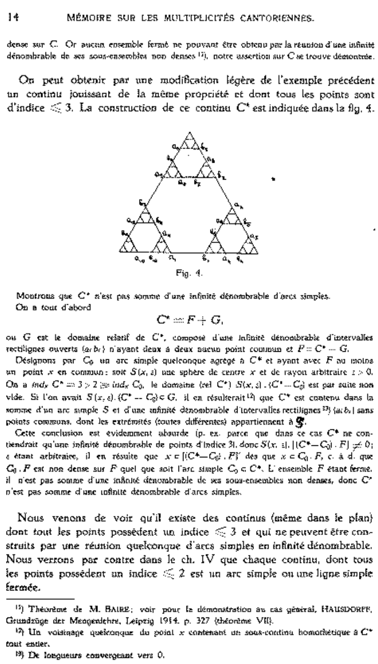
Ex. 12 (de M. SIERPIŃSKI). On obtient le continu C (fig. 3) en effectuant successivement les opérations (1), (2), ..., (n), ... L'opération (1) consiste en

Fig. 3.

ce qu'on supprime du triangle équilatère donné, le triangle obtenu en joignant par des segments rectilignes les milieux des côtés du triangle donné. L'opération (n) consiste dans l'application de l'opération (1) à chacun des triangles restés après l'operation ($n-1$). On voit de suite que les points a, b, c, ont l'indice 2 (les couples de points tels que (m, n) ε-séparent p. ex. le point a), les sommets de tous les autres triangles possèdent l'indice 4 (ε-séparation du sommet d par les points p, q, r, s), enfin les points restants sont d'indice 3 (ε-séparation du point x par l'ensemble des points t, u, v). Il est facile à voir que le continu C que nous venons de construire ne peut être obtenu en faisant la somme d'une infinité dénombrable quelconque d'arcs simples.

Soit en effet $C_0 \subset C$ un arc simple quelconque situé sur C, et $x \subset C$ un point quelconque de C_0 autre que a, b, c; $ind_x\, C_0$ est égal à 1 ou 2, tandis que $ind_x\, C$ est 3 ou 4; il en résulte que tout point $x \subset C_0$ est un point limite de $C - C_0$, c. à d. que C_0 est non

(b) Strana 13



14 MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES.

dense sur C. Or aucun ensemble fermé ne pouvant être obtenu par la réunion d'une infinité dénombrable de ses sous-ensembles non denses [11], notre assertion sur C se trouve démontrée.

On peut obtenir par une modification légère de l'exemple précédent un continu jouissant de la même propriété et dont tous les points sont d'indice $\leqq 3$. La construction de ce continu C^* est indiquée dans la fig. 4.

Fig. 4.

Montrons que C^* n'est pas somme d'une infinité dénombrable d'arcs simples.

On a tout d'abord

$$C^* = F + G,$$

ou G est le domaine relatif de C^*, composé d'une infinité dénombrable d'intervalles rectilignes ouverts $(a_i\, b_i)$ n'ayant deux à deux aucun point commun et $F = C^* - G$.

Désignons par C_0 un arc simple quelconque agrégé à C^* et ayant avec F au moins un point x en commun: soit $S(x, \varepsilon)$ une sphère de centre x et de rayon arbitraire $\varepsilon > 0$. On a $ind_x\, C^* = 3 > 2 \geqq ind_x\, C_0$, le domaine (rel C^*) $S(x, \varepsilon) \cdot (C^* - C_0)$ est par suite non vide. Si l'on avait $S(x, \varepsilon) \cdot (C^* - C_0) \subset G$, il en résulterait [12] que C^* est contenu dans la somme d'un arc simple S et d'une infinité dénombrable d'intervalles rectilignes [13] $(a_i\, b_i)$ sans points communs, dont les extrémités (toutes différentes) appartiennent à $\mathfrak{S}$.

Cette conclusion est évidemment absurde (p. ex. parce que dans ce cas C^* ne contiendrait qu'une infinité dénombrable de points d'indice 3), donc $S(x, \varepsilon) \cdot [(C^* - C_0) \cdot F] \neq 0$; ε étant arbitraire, il en résulte que $x \subset [(C^* - C_0) \cdot F]'$ dès que $x \subset C_0 \cdot F$, c. à d. que $C_0 \cdot F$ est non dense sur F quel que soit l'arc simple $C_0 \subset C^*$. L'ensemble F étant fermé, il n'est pas somme d'une infinité dénombrable de ses sous-ensembles non denses, donc C^* n'est pas somme d'une infinité dénombrable d'arcs simples.

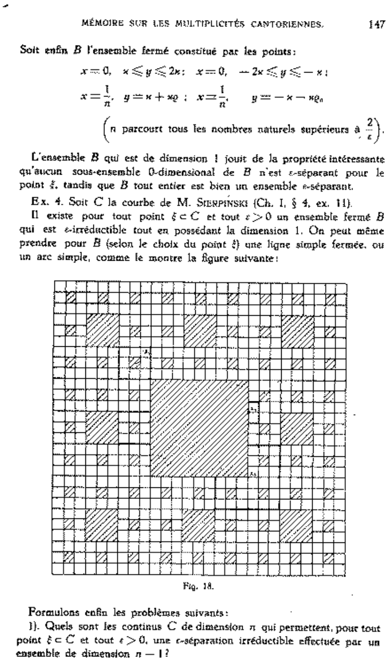
Nous venons de voir qu'il existe des continus (même dans le plan) dont tout les points possèdent un indice $\leqq 3$ et qui ne peuvent être construits par une réunion quelconque d'arcs simples en infinité dénombrable. Nous verrons par contre dans le ch. IV que chaque continu, dont tous les points possèdent un indice $\leqq 2$ est un arc simple ou une ligne simple fermée.

[11]) Théorème de M. BAIRE; voir pour la démonstration au cas général, HAUSDORFF, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 327 (théorème VII).

[12]) Un voisinage quelconque du point x contenant un sous-continu homothétique à C^* tout entier.

[13]) De longueurs convergeant vers 0.

(c) Strana 14.



MÉMOIRE SUR LES MULTIPLICITÉS CANTORIENNES. 147

Soit enfin B l'ensemble fermé constitué par les points:

$$x = 0, \quad \varkappa \leqq y \leqq 2\varkappa; \quad x = 0, \quad -2\varkappa \leqq y \leqq -\varkappa;$$

$$x = \frac{1}{n}, \quad y = \varkappa + \varkappa\varrho; \quad x = \frac{1}{n}, \qquad y = -\varkappa - \varkappa\varrho_n$$

$\left(n \text{ parcourt tous les nombres naturels supérieurs à } \frac{2}{\varepsilon}\right)$.

L'ensemble B qui est de dimension 1 jouit de la propriété intéressante qu'aucun sous-ensemble 0-dimensional de B n'est ε-séparant pour le point ξ, tandis que B tout entier est bien un ensemble ε-séparant.

Ex. 4. Soit C la courbe de M. SIERPIŃSKI (Ch. I, § 4, ex. 11).

Il existe pour tout point $\xi \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$ un ensemble fermé B qui est ε-irréductible tout en possédant la dimension 1. On peut même prendre pour B (selon le choix du point ξ) une ligne simple fermée, ou un arc simple, comme le montre la figure suivante:

Fig. 18.

Formulons enfin les problèmes suivants:

1). Quels sont les continus C de dimension n qui permettent, pour tout point $\xi \subset C$ et tout $\varepsilon > 0$, une ε-séparation irréductible effectuée par un ensemble de dimension $n - 1$?

D10*

(d) Sierpinského koberec, str. 147.

Obrázek 6.6: Ukázka z *Les lignes Cantoriennes* z roku 1927, [Ury27]

6.2.1. Urysohnova definice křivky

Urysonova definice se vyznačuje tím, že je vnitřní, tj. používá jen vlastnosti samotného prostoru C a nezávisí na tom, zda se na tento prostor pohlíží jako na podmnožinu jiného topologického prostoru nebo na množinu samu o sobě.

Řečeno dnešními termíny:

Definice křivky (Urysohnova). Křivkou rozumíme kontinuum dimenze 1.

Urysohn pojem dimenze kontinua precizně buduje. Tyto úvahy o křivkách jsou součástí jeho spisů o teorii dimenze, proto bude zajímavé podívat se na to, jak přistupuje k definice křivky podrobněji.

Nejprve zavádí pojem ε–oddělitelnosti bodu $x \in C$:

Definice. Nechť C je množina, $x \in C$. Nechť $C = A \cup B \cup D$, kde A, B, D jsou po dvou disjunktní. Trojici A, B, D nazveme ε–oddělitelná, jestliže je splněno

$$\begin{aligned} &a) x \in A \\ &b) (A \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap D) = \emptyset \\ &c) A \cup B \subset O_{x,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

kde $O_{x,\varepsilon}$ je ε-ové okolí bodu x.
Potom budeme říkat o množině B, $(B \subset C)$, že ε–odděluje bod $x \in C$.

Definice. Může-li bod x množiny C být ε–oddělitelný prázdnou množinou pro libovolně malé ε, pak budeme říkat, že množina C v bodě x má rozměr 0 nebo bod x je dimenze 0 vzhledem k C

$$\dim_x C = 0.$$

Definice. Jestliže všechny body množiny C mají dimenzi 0, potom říkáme, že množina C má dimenzi 0

$$\dim C = 0.$$

Množinu dimenze 0 zavedl Sierpinski (viz obr. 6.6 d). Vyšší dimenze definuje Urysohn indukcí:

Definice. Bod x množiny C, který není bodem dimenze $< n$, ale pro každé ε může být ε–oddělitelný množinou B, $\dim B < n$, nazýváme bodem dimenze n

$$\dim_x C = n.$$

(Občas budeme říkat, že množina C má v bodě x dimenzi n.)

Definice. Množinu C mající ve všech bodech dimenzi $\leq n$ nazýváme množinou dimenze n

$$\dim C = n$$

pokud má dimenzi n alespoň v jednom bodě.

Po některých úvahách o definovaném pojmu dimenze uvádí důležité věty, z nichž některé vybíráme

Tvrzení. Dimenze je topologickým invariantem.[23]

Tvrzení. Každé uzavřené diskontinuum je množina dimenze 0.[24]

Tvrzení. Pro to, aby diskontinuum bylo homeomerfní podmnožině přímky je nutné a stačí aby bylo dimenze 0.[25]

V kapitole *Předběžné zkoumání dimenze. Eukleidovy dvojrozměrné a trojrozměrné prostory* se vrací k úvahám o křivkách:

Vnitřní bod množiny prostoru $\mathbb{E}_1$ je bod dimenze 1. Hraniční bod, který není limitním bodem vnitřních bodů, je bod dimenze 0. Hraniční bod, který je limitním bodem vnitřních bodů může mít dimenzi 0 i 1. [Ury51, str. 285]

Nechť $C \subset \mathbb{E}_2$. Každý vnitřní bod množiny C má dimenzi 2. Každý bod, který není vnitřním bodem ani limitou vnitřních bodů, má dimenzi 0 nebo 1 a konečně hraniční body, které jsou limitní body vnitřních bodů množiny C, mohou mít dimenzi 0, 1 nebo 2. [Ury51, str. 295]

Po zavedení pojmu dimenze přistupuje ke křivce jako ke kontinuu dimenze jedna, tj. křivkou se rozumí jednorozměrné kontinuum C, jehož každý bod má libovolně malé okolí, jehož hranice má nulovou dimenzi. Jinak řečeno pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze prostor C vyjádřit jako sjednocení konečného počtu uzavřených množin o průměru menším než ε, které mají tu vlastnost, že žádné tři z těchto množin nemají společný bod.

Snadno se přesvědčíme, že úsečka nebo kružnice jsou jednoduché příklady jednorozměrných kontinuí, tj. křivek ve smyslu Urysohna. Samotný Sierpinského koberec je křivkou ve smyslu Urysohna, tedy platí

Tvrzení. Každá Cantorova křivka je také křivkou ve smyslu Urysohna.

[23] Důkaz viz [Ury51, str. 271].
[24] Důkaz viz [Ury51, str. 278].
[25] Tato věta patří Sierpinskému. Viz [Ury51, str. 280].

A obráceně

Věta 6.4. Každá **rovinná** křivka ve smyslu Urysohna je Cantorovou křivkou.

Důkaz tohoto tvrzení plyne z toho, že žádná rovinná křivka ve smyslu Urysohnově neobsahuje jako svou podmnožinu část roviny s vnitřními body.

Sporem: Jestliže rovinné kontinuum C obsahuje vnitřní bod x, potom pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ náleží celé ε-ové okolí bodu x do kontinua C. Avšak potom hranice každé otevřené množiny ležící v ε-ové okolí bodu x obsahuje kontinuum, což je spor. Proto kontinuum, které je křivkou ve smyslu Urysohna, neobsahuje žádný vnitřní bod, tj. je křivkou ve smyslu Cantorově.

Důležitým rysem Urysohnovy definice křivky je jednorozměrnost kontinua. Nejen, že vystihuje podstatu tohoto pojmu, ale ukazuje cestu, kterou postupovat při studiu obecných vlastností křivky.

Urysohn klasifikuje podrobně body křivky podle jejich indexu větvení.

Definice. Minimální počet bodů na hranici otevřených množin O_x (z definice Urysohnovy křivky) se nazývá indexem větvení křivky v daném bodě a značíme ho I_v.

Příklad 7. Index větvení může být jak konečný, tak nekonečný:

(a) Úsečka má v každém svém vnitřním bodě index větvení $I_v = 2$ a v koncových bodech $I_v = 1$.

(b) Příkladem kontinua, jehož všechny body mají $I_v = \infty$ je Sierpinského koberec.

(c) Uvažujme křivku složenou z úseček PQ_i, $i = 1, \ldots, n$ jednotkové délky, přičemž všech n úseček vychází z bodu P. Tato křivka má v bodě P index větvení $I_v = n$, ve vnitřních bodech jednotlivých úseček $I_v = 2$ a v koncových bodech $I_v = 1$.

(d) Uvažujme křivku složenou z úseček PQ_i, $i = 1, \ldots, n$ vycházejících z bodu P, které mají postupně délky $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ a svírají po řadě s osou x úhly $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, \ldots, \frac{\pi}{2^{n+1}}$. Délky těchto úseček i úhly, které svírají s osou x konvergují k nule. Bod P této křivky má tu zajímavou vlastnost, že při libovolně malém ε je v průniku ε-ového okolí bodu P s danou křivkou jen konečný počet bodů, který ale pro $\varepsilon \to 0$ roste do nekonečna. V tomto případě říkáme, že křivka má v bodě P konečný, ale neomezený index větvení.

(e) Křivku C budeme konstruovat z rovnostranného trojúhelníka. Sestrojíme spojnice středů stran, čímž rozdělíme trojúhelník na 4 shodné rovnostranné trojúhelníky a vyloučíme vnitřní oblast prostředního z nich. Stejný postup zopakujeme s každým ze zbylých trojúhelníků, obdržíme 9 rovnostranných trojúhelníků. Opakováním obdržíme v dalším kroku 27 trojúhelníku atd. (viz obr. 6.6(b)). Množina bodů, která vznikne v n-tém kroku, je kontinuum složené z 3^n trojúhelníků. Pro $n \to \infty$ má toto kontinuum rozměr 1, tj. je křivkou ve smyslu Urysohna. Vrcholy základního trojúhelníka mají index vetvení $I_v = 2$, vrcholy ostatních trojúhelníků $I_v = 4$ a všechny ostatní body $I_v = 3$.

(f) Modifikací příkladu (e) můžeme snadno dosáhnout toho, že výsledná křivka bude mít jen body s $I_v = 2$ nebo s $I_v = 3$. Stačí abychom uvažovali místo spojnic středů např. úsečky, které spojují body v třetinách každé strany, a abychom vylučovali vnitřní body šestiúhelníku (viz obr. 6.6(c)).

Uvedeme alespoň bez důkazu několik vět, které ilustrují, jak výstižně index větvení charakterizuje danou křivku:

Definice. Body, pro jejichž index větvení platí $I_v > 2$ nazýváme rozvětvovací body křivky.

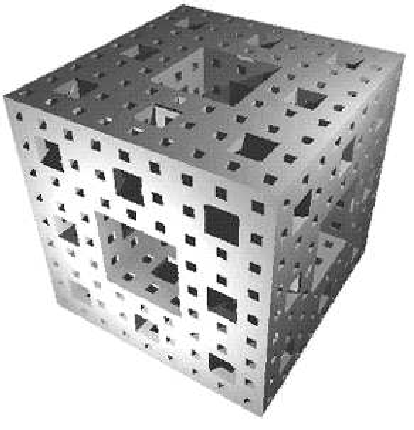
Tvrzení. Křivka, která nemá rozvětvovací body, je buď jednoduchou uzavřenou křivkou nebo jednoduchým obloukem. Jestliže $I_v = 2$ ve všech bodech křivky, pak je jednoduchou uzavřenou křivkou (tj. topologickým obrazem kružnice). Má-li křivka i koncové body, pro něž $I_v = 1$, pak je jednoduchým obloukem (tj. topologickým obrazem úsečky).

Tvrzení. Sestrojíme-li křivku C v prostoru dimenze n, pak můžeme vždy najít v trojrozměrném prostoru křivku C', která je s křivkou C homeomorfní.

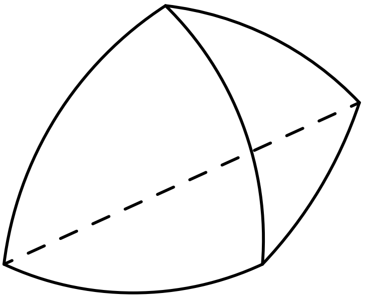
Podobně jako je Sierpinského koberec jakousi univerzální křivkou v rovině, existuje i podobná křivka v trojrozměrném prostoru, ale vzhledem k předchozí větě je univerzální křivkou nejen pro prostor dimenze 3:

Tvrzení. V trojrozměrném prostoru existuje jistá univerzální křivka, která obsahuje nejen topologický obraz každé křivky trojrozměrného prostoru, ale také topologický obraz každé křivky v libovolném n-rozměrném prostoru.

Konstrukce této univerzální křivky byla provedena rakouským matematikem K. Mengerem.[26] Křivka bývá nazývána ***Mengerova krychle*** nebo také ***Mengerova houba*** (viz obr. 6.7).



Obrázek 6.7: Mengerova krychle, resp. Mengerova houba zkonstruovaná pro první tři kroky.

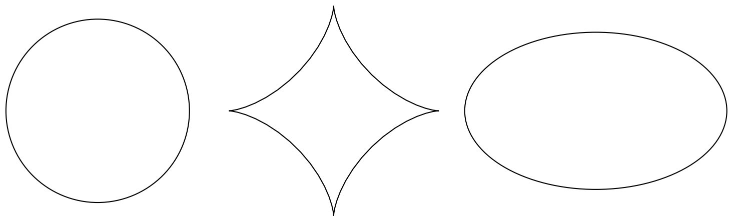


Obrázek 6.8: Příklad prostorové křivky, která není homeomorfní s žádnou křivkou v rovině.

Pokud lze všechny křivky sestrojené v prostoru libovolné dimenze topologicky zobrazit do Mengerovy krychle, přirozeně vzniká otázka, proč nemůžeme jít ještě o dimenzi níž, tj. proč nehraje tuto roli Sierpinského koberec, který je univerzální křivkou v rovině. Potíž je v tom, že v prostoru existují křivky, které nelze topologicky zobrazit na žádnou křivku v rovině, přesněji řečeno: které nejsou homeomorfní s žádnou křivkou v rovině (viz např. obr. 6.8).

Urysohn bezesporu dosáhl hlubokých a významných výsledků nejen v teorii křivek. My se však vrátíme k jeho definici. Přijmeme-li ji za onu hledanou optimální definici křivky, čeká nás jedno zklamání. Umíme sice vydělit odpovídající objekty, které intuitivně považujeme za křivky, a současně nezahrneme žádné jiné, máme definici matematicky precizní, ale neumíme od sebe vzájemně odlišit objekty na obrázku 6.9. Jinak řečeno Urysohnova definice neumožňuje zkoumat lokální vlastnosti křivek. Definicí křivky, která lokální vlastnosti zkoumat umožňuje, se budeme zabývat v odstavci 6.2.2.

[26] Karl Menger (1902–1985).



Obrázek 6.9: Topologicky ekvivalentní křivky – kružnice, asteroida a elipsa

Historické poznámky

Hlavní výsledky z teorie dimenze, jejichž součástí jsou i některé úvahy o definici křivky, obdržel Urysohn již na podzim 1921 a v zimě 1922. Na jaře připravil k vydání výtah, který vyšel v podobě dvou krátkých pojednání ještě téhož roku v *Comptes Rendus* Pařížské akademie věd:[27]

- *Les multiplicités Cantoriennes*, C. R. 175, 1922, str. 440–442.
- *Sur la ramification des lignes Cantoriennes*, C. R. 175, 1922, 481–483.

Po té připravoval Urysohn podrobný výklad těchto výsledků i s důkazy. První část byla dokončena 20. 3. 1923 a poslána do časopisu *Fundamenta Mathematicae*, kde vyšla až po Urysohnově smrti:

- *Fundamenta Mathematicae* 7, 1925, str. 30–139.
- *Fundamenta Mathematicae* 8, 1926, str. 225–359.

Rozpracovaná část druhá byla připravena do tisku Alexandrovem podle rukopisů. Alexandrov píše, že se při přípravě držel plánu Urysohna z léta 1922, do něhož začlenil některé pozdější výsledky.[28]

Druhá část poprvé vyšla pod názvem: *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (Pojednání o cantorových varietách)*, část druhá *Les lignes Cantoriennes (Cantorovy křivky)*.[29]

Co se týče teorie křivek, rozpracovával myšlenky související s Urysohnovými pracemi zejména K. Menger, který nezávisle na Urysohnovi podal také definici dimenze – viz [Men28], [Men32].

[27]Podané H. Lebesguem (1875–1941) na zasedání Pařížské akademie věd 25.9.1922.

[28]Viz [Ury51, str. 517–518].

[29]Verhandeligen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 1 sekce, 13, 4 (1928), str. 1–172.

6.2.2. Křivka jako jednorozměrná podvarieta

Ukázali jsme, že poprvé s pojmem varieta přišel B. Riemann (viz sekce 5.4) ve snaze popsat geometrickou strukturu jako jakési množství bodů mající jisté „rozměry“. Postupně se tento pojem vyvinul až do dnešní podoby topologických a diferencovatelných variet:[30]

Definice. Topologickou n-rozměrnou varietou rozumíme separovaný topologický prostor M se spočetnou bází, který je lokálně homeomorfní s $\mathbb{R}^n$, tj. pro každé $x \in M$ existuje jeho okolí U, otevřená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfismus $\varphi : U \to V$.

Přičemž topologický prostor se nazýváme separovaný, jestliže každé jeho dva různé body mají disjunktní okolí.

Uvažujme otevřenou množinu $U \subset \mathbb{R}^m$. Nechť $V \subset \mathbb{R}^k$ je další otevřená množina a $z = (y^1, \ldots, y^k) \in \mathbb{R}^k$. Zobrazení $f : U \to V$ je dáno k-ticí funkcí

$$y^1 = f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, y^k = f^k(x^1, \ldots, x^n)\,,$$

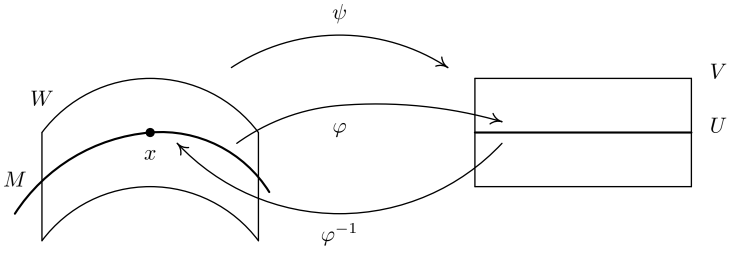
které nazýváme složky zobrazení f. Píšeme též

$$y^p = f^p(x^i)\,, \qquad i = 1, \ldots, n,\ p = 1, \ldots, k,$$

stručně také $y = f(x)$.

Říkáme, že f je diferencovatelné zobrazení třídy C^r jestliže všechny jeho složky jsou funkce třídy C^r, $r \in \mathbb{N}$. Hladké zobrazení znamená zobrazení třídy C^∞.

Difeomorfismem třídy C^s dvou n-rozměrných variet M_1, M_2 třídy C^r, $s \leq r$, rozumíme bijektivní zobrazení $f : M_1 \to M_2$ třídy C^s takové, že i inverzní zobrazení $f^{-1} : M_2 \to M_1$ je třídy C^s.



Obrázek 6.10: Definice podvariety

[30]Viz [Kol03].

Definice. Podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme m-rozměrnou podvarietou třídy C^r, $m \leq n$, jestliže pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí W a difeomorfismus $\psi : W \to V \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^r, který zobrazí $W \cap M$ na podmnožinu $U \subset V$ určenou rovnicemi $x^{m+1} = 0, \ldots, x^n = 0$.

Lokálně tedy m-rozměrná podvarieta M vypadá jako zakřivený m-rozměrný lineární podprostor v $\mathbb{R}^n$.[31]

V roce 1935 H. Whitney[32] dokázal, že každá n-rozměrná varieta třídy C^r je difeomorfní třídy C^r n-rozměrné podvarietě v prostoru $\mathbb{R}^{2n+1}$. V tomto smyslu „abstraktní“ variety nejsou nic jiného než abstraktně nazírané podvariety v číselných prostorech.

Jednorozměrnou podvarietu variety M nazveme křivka na M:

Definice křivky (diferenciálně–geometrická). Podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$ nazveme ***křivkou*** nebo-li 1-rozměrnou podvarietou třídy C^r, jestliže pro každý bod $x \in M$ existuje jeho okolí W a difeomorfismus $\psi : W \to V \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^r, který zobrazí $W \cap M$ na podmnožinu $U \subset V$ určenou rovnicemi $x^2 = 0, \ldots, x^n = 0$ (viz obr. 6.10).

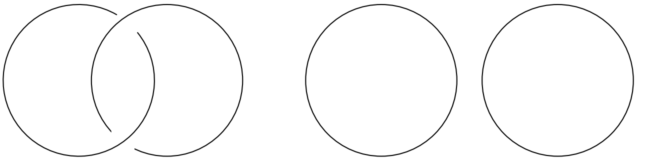
Tato definice pohlíží tedy na křivku *lokálně* jako na zakřivený 1-rozměrný lineární podprostor v $\mathbb{R}^n$ (tj. jednoduchý oblouk). Lokální systém souřadnic a diferencovatelná zobrazení nám dávají silný nástroj k vyšetřování vlastností křivky.

Z globálního hlediska se však mohou některé objekty v rámci uvedené definice odlišovat nesnadno. Např. dvě kružnice zaklesnuté do sebe a dvě kružnice vedle sebe (viz obr. 6.11) jsou z pohledu této definice křivky až na parametrizace tytéž objekty – po částech jednoduché oblouky s konstantní křivostí. Naopak z pohledu topologie je zde podstatný rozdíl. Z topologického hlediska považujeme dva objekty za „totožné“ (topologicky ekvivalentní), pokud jsou homeomorfní, tj. pokud lze převést jeden na druhý spojitým zobrazením, aniž bychom je „roztrhli“ nebo „slepili“. Je evidentní, že kružnice zaklesnuté do sebe takovým způsobem převést na dvě kružnice vedle sebe nemůžeme, tj. tyto objekty nejsou topologicky ekvivalentní.

Na druhou stranu křivky na obrázku 6.9 jsou ve smyslu topologie totožné, ale z hlediska diferenciální geometrie je ihned rozlišíme – čtyři singulární body u asteroidy versus hladkost kružnice a elipsy, kružnice jako křivka s konstantní křivostí versus elipsa jako křivka s křivostí proměnlivou apod.

[31] Z globálního hlediska se však M může od $\mathbb{R}^m$ podstatně odlišovat, tj. topologicky řečeno, m-rozměrná podvarieta není obecně homeomorfní s $\mathbb{R}^m$.

[32] Hassler Whitney (1907–1989).



Obrázek 6.11:

Literatura

[Aul97] Aull, C. E.–Lowen, R., ed. *Handbook of the History of General Topology*, svazek 1. Kluwer Academic Publishers, London, 1997.

[Can85] Cantor, G. *Trudy po tĕorii množestv.* Nauka, Moskva, 1985. (pod redakcí A. N. Kolmogorova a A. P. Juškeviče).

[Kol03] Kolář, I. *Úvod do globální analýzy.* Masarykova univerzita, Brno, 2003.

[Luz48] Luzin, I. I. *Tĕorija funkcij dĕjstvitĕlnovo peremenovo.* Gosizdat, Moskva, 1948.

[Men28] Menger, K. *Dimensiontheorie.*, svazek 1. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1928.

[Men32] Menger, K. *Mengentheoretische Geometrie in Einzeldarstellungen. Kurventheorie.*, svazek 2. Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1932. (reprint 1967, Bronx, Chelsea Publ.).

[Pul86] Pultr, A. *Podprostory euklidovských prostorů.* SNTL, Praha, 1986.

[Ury27] Urysohn, P. S. *Mémoire sur les multiplicités Cantoriennes (Les lignes Cantoriennes)*, svazek 2. Akademie, Amsterdam, 1927.

[Ury51] Urysohn, P. S. *Trudy po topologii i drugim oblasťam matĕmatiki*, svazek 1. Tĕchnicko-teoreticeskaja literatura, Moskva, 1951. (s poznámkami a dodatky P. S. Alexandrova).

[Vop89] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií.* Academia, Praha, 1989.