

# Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938

---

## Bohuslav Hostinský a počátky teorie markovských procesů

In: Karel Mačák (author): Vývoj teorie pravděpodobnosti v českých zemích do roku 1938. (Czech). Praha: Prometheus, 2005. pp. 122–141.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401188>

### Terms of use:

© Mačák, Karel

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



Bohuslav Hostinský (1884–1951)

Na obrázku je fotografie portrétu B. Hostinského jako rektora Masarykovy univerzity v Brně; tuto funkci zastával Hostinský ve šk. r. 1929/30. Autorem portrétu je František Hlavica (1885–1952), profesor české techniky v Brně; portrét se nachází v Archivu Masarykovy univerzity v Brně.

## 7. Bohuslav Hostinský a počátky teorie markovských procesů<sup>295</sup>

### 7.1 Úvod

Autora této knížky se domnívá, že Bohuslav Hostinský byl v období před II. světovou válkou nejvýznamnějším českým badatelem zabývajícím se teorií pravděpodobnosti. Jeho hlavní přínos se týká teorie markovských procesů; v této oblasti sehrál ve dvacátých letech 20. století (podle našeho názoru) rozhodující roli v evropském měřítku. Tato skutečnost je dnes málo známá; teprve v posledních letech se začíná o Hostinském v této souvislosti opět mluvit (viz např. [Bru, HMŠ, Pla, Maz]<sup>296</sup>).

O přínosu Bohuslava Hostinského k teorii markovských procesů referoval autor této knížky na tradiční konferenci o historii matematiky v Jevíčku v létě 2003. V tomtéž roce 2003 vyšla rozsáhlá práce [Bru], která je věnována důkladnému rozboru vývoje teorie markovských procesů ve 20. letech 20. století a podrobně osvětluje i roli, kterou přitom sehrál B. Hostinský. Autor této knížky měl možnost seznámit se s prací [Bru] bohužel až ve druhé polovině roku 2004 a po jejím přečtení uvažoval o tom, že by do připravované knížky o historii teorie pravděpodobnosti v českých zemích nezařadil žádnou samostatnou kapitolu o B. Hostinském, pouze by odkázal na práci [Bru]. Nakonec se však autor rozhodl samostatnou kapitolu o B. Hostinském přece jenom napsat, i když v porovnání s prací [Bru] je nesrovnatelně stručnější a nepřináší nic podstatně nového; Hostinský však byl (jak už bylo řečeno) před druhou světovou válkou daleko nejvýraznější postavou v teorii pravděpodobnosti v českých zemích a v knížce o něm proto samostatná kapitola být musí. Navíc se autor domnívá, že pro ty čtenáře (budou-li jací), kteří se s historií teorie pravděpodobnosti v českých zemích seznamují poprvé, může být taková stručná základní informace i postačující.

Cílem této kapitoly tedy bude stručně dokumentovat podíl B. Hostinského na vzniku teorie markovských procesů a podat chronologický přehled jeho prvních publikací z této oblasti v návaznosti na publikace jiných autorů. Nebude zde prováděn podrobný matematický rozbor těchto prací; v tomto směru lze případnému zájemci doporučit již několikrát zmíněnou práci [Bru].

---

<sup>295</sup> Autor děkuje dr. J. Kalendovské z Archivu MU Brno a dr. P. Šišmovi z Přírodovědecké fakulty MU Brno za mnohé cenné informace a podněty k této kapitole.

<sup>296</sup> Hostinskému je rovněž věnováno několik stránek v práci [Sla], tato práce se však netýká teorie pravděpodobnosti.

## 7.2 Bohuslav Hostinský

### 7.2.1 Životopisný přehled

Základem pro tuto část příspěvku jsou články [Br1, Br2]<sup>297</sup>, [Lit]; i když v Archivu Masarykovy univerzity v Brně je uložen rozsáhlý fond týkající se B. Hostinského, nebyl prováděn jeho průzkum z hlediska případného doplnění nebo upřesnění životopisných údajů uvedených v citovaných pracích.

Bohuslav Hostinský se narodil 5. prosince 1884 v Praze jako syn významného hudebního vědce, esteta a profesora pražské univerzity Otakara Hostinského (1847–1910). Studoval matematiku a fyziku na filozofické fakultě Karlovy univerzity v Praze; doktorát získal v r. 1907<sup>298</sup> a poté působil krátkou dobu jako středoškolský profesor v Novém Bydžově a v Roudnici. Ve školním roce 1908–1909 studoval v Paříži, v r. 1912 se pak habilitoval na filozofické fakultě Karlovy univerzity jako soukromý docent pro vyšší matematiku<sup>299</sup>. Zde působil až do r. 1920<sup>300</sup>; kromě jiného v této době napsal učebnici „*Diferenciální geometrie křivek a ploch*“, která vyšla celkem třikrát<sup>301</sup>. V r. 1920 se Hostinský stal profesorem teoretické fyziky na přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity v Brně a v této funkci působil až do smrti; zemřel 12. dubna 1951.

Podívejme se nyní trochu blíže na rozhodující událost v odborné činnosti B. Hostinského, totiž na jeho jmenování profesorem teoretické fyziky na brněnské univerzitě.

Z publikační činnosti Hostinského<sup>302</sup> je zřejmé, že v první etapě své odborné činnosti byl „čistým“ matematikem a skutečnost, že byl v r. 1920 jmenován profesorem teoretické fyziky, je z tohoto hlediska poměrně překvapivá. V nekrologu [Br1] na str. 90 se o příklonu B. Hostinského k fyzice říká:

---

<sup>297</sup> Podle informací od dr. J. Kalendovské z Archivu MU Brno patřil autor citovaných článků Jiří Beránek k blízkým spolupracovníkům prof. Hostinského. Narodil se roku 1918 ve Vídni a od r. 1945 působil (zpočátku ještě jako student) na ústavu prof. Hostinského, u kterého také vykonal v r. 1947 rigorózum. Po smrti prof. Hostinského se stal vedoucím ústavu teoretické fyziky, v r. 1956 přešel na katedru fyziky Vojenské technické akademie v Brně.

<sup>298</sup> Podle [Br1], str. 90, byl název jeho disertační práce „*O útvarech určenými souměznými elementy prostorových křivek*“. Podle [HMŠ], str. 4, byl název práce „*O Lieově kulové geometrii*“.

<sup>299</sup> Podle [Br1], str. 90 byl název jeho habilitační práce „*O kvadratických komplexech kružnic v rovině*“. V [HMŠ], str. 4, je uveden název „*Sur les méthodes géométriques en théorie des fonctions*“.

<sup>300</sup> Podle [Tom], I, str. 506, byl Hostinský až do r. 1920 také středoškolským profesorem.

<sup>301</sup> 1. vydání v r. 1915, 2. vydání v r. 1942, 3. vydání v r. 1950.

<sup>302</sup> Vycházíme zde ze seznamu publikovaných prací B. Hostinského, který je připojen k [Br1].

„Ačkoli od r. 1915 Hostinský uveřejnil ještě další práce z diferenciální geometrie, jeho hlavní zájem se obrátil ke studiu kapitol matematiky, které mají význam pro základní otázky teoretické fyziky. Začal studovat podrobně kinetickou teorii plynů a začal se zajímat o směr, který měl dáti této teorii přesnější výraz, při čemž vycházel hlavně z prací E. Borela a M. Brillouina. Snaha Hostinského přispět k zdokonalení kinetické teorie byla mu podnětem, aby se zabýval důkladně počtem pravděpodobnosti<sup>303</sup>.“

V článku [Br2] se k témuž tématu říká (str. 443–444): „Původní zájem o geometrii tak Hostinského přiváděl k takovým problémům matematické fyziky, v nichž právě geometrické metody hrají význačnou úlohu. Vědecké dílo, které v té době k tomuto propojení geometrických a fyzikálních otázek výrazně přihlíželo, byla Borelova kniha „Introduction géométrique à quelques théories physiques“ z r. 1914, kterou Hostinský ve svých dalších pracích často cituje. Nemalý význam měl pro další orientaci badatelské práce Hostinského též oddíl věnovaný statistické mechanice v „Encyklopédie des sciences mathématiques“, jehož autoři byli P. a T. Ehrenfestovi a E. Borel. ... Hostinský, jak sám uvádí<sup>304</sup>, začal od r. 1915 studovat Boltzmannovy práce a zajímal se hlouběji o snahy, jež měly dát kinetické teorii látek přesnější matematický základ.“

Z uvedených textů je celkem zřejmé, jaké podněty přivedly matematika Hostinského k tomu, aby se začal zajímat o fyziku (přesněji řečeno: o některé otázky teoretické fyziky), nijak však nevysvětlují, proč se Hostinský stal profesorem teoretické fyziky na brněnské univerzitě. Podle seznamu publikací B. Hostinského, který je připojen k práci [Br1], vydal Hostinský do konce roku 1919 tiskem celkem 39 prací, z nichž (soudě podle názvů) má fyzikální motivaci nejvýše pět prací<sup>305</sup> a tato motivace je fyzikálně zcela klasická; s kinetickou teorií plynů a s teorií pravděpodobnosti nemá nic společného. Zdá se proto, že spolehlivou odpověď na otázku, proč vlastně byl B. Hostinský jmenován profesorem teoretické fyziky, by mohlo poskytnout

---

<sup>303</sup> Z hlediska této kapitoly zde tedy máme první informaci o tom, jakými cestami se ubíral Hostinského zájem o teorii pravděpodobnosti.

<sup>304</sup> Beránek zde bohužel neudává přesnou citaci práce, ve které Hostinský tuto informaci uvádí.

<sup>305</sup> Podle názvů v seznamu prací v [Br1] by před r. 1920 mohly mít fyzikální charakter následující práce B. Hostinského: *Užití integrálních rovnic k řešení problému fotometrického* (Věstník 5. sjezdu českých přírodopyců a lékařů, 234, 1915); *Studie odrazu světla* (Rozpravy ČAV, II. třída, č. 31, 10 stran, 1915); *Absolutní minimum při odrazu světla* (Čas. pěst. mat. fys. 46 (1917), 159-170); *O netlumených kmitech mechanických soustav* (Rozpravy ČAV, II. třída, č. 47, 15 stran, 1918); *O pružnosti atomů* (Čas. pěst. mat. fys. 49 (1919), 215-221). Podle [Ši] by do této skupiny mohla být přidána ještě práce „*O těžných křivkách*“ (Čas. pěst. mat. fys. 47 (1918), 112-121).

pouze studium archivních materiálů, které však (jak už bylo řečeno) zatím nebylo provedeno.

Jak už bylo uvedeno v paragrafu 6.3, v letech 1902–1939 působil jako profesor fyziky na brněnské české technice Vladimír Novák, který v r. 1939 vydal v Brně knihu vzpomínek [Nov]. Byl to tedy (do jisté míry) kolega B. Hostinského, podle Novákovy knihy se však zdá, že mezi těmito dvěma brněnskými vysokoškolskými profesory fyziky neexistovaly žádné osobní vztahy; Novák se ve své knize na několika místech zmiňuje o Hostinském, jsou to však vždy zcela neosobní (zdá se, že objektivní) konstatování. Pokud se Hostinského odborné práce týče, jsou podle Nováka ([Nov], str. 305) publikované práce Hostinského „převážnou většinou práce matematické“. Zdá se tedy, že mezi svými kolegy fyziky byl Hostinský považován spíše za matematika a že z celé fyzikální činnosti prof. Hostinského asi největší pozornost vzbudil jeho odmítavý postoj k teorii relativity<sup>306</sup>.

### 7.2.2 Bibliografie B. Hostinského

Jak už bylo řečeno, k práci [Br1] je připojen seznam publikací B. Hostinského. Tento seznam je takřka totožný se seznamem publikací, který zpracoval sám B. Hostinský a nyní je uložen v Archivu MU Brno (fond B. Hostinský, karton 1, složka č 3, dokument „b“<sup>307</sup>; rukopisný koncept seznamu je uložen jako dokument „c“ (9 listů A4)). Na archivním seznamu není uvedeno žádné datum, zdá se však, že ho lze datovat podle jiných dokumentů.

Ve zmíněném kartonu č. 1 ve složce č. 3 je jako dokument „a“ uložen dopis (asi cyklostylovaný) České akademie věd a umění v Praze; dopis začíná univerzálním oslovením „Slovutný pane profesore“, ale není v něm uvedeno ani datum ani konkrétní adresát. Na základě usnesení druhé třída Akademie ze dne 11. června t. r. (rok ovšem není uveden) je v dopisu požadováno curriculum vitae a podrobný seznam prací, což má sloužit pro sbírku životopisných údajů o členech Akademie. Lze se tedy domnívat, že zmíněný seznam uložený v téže složce jako dokument „b“ je požadovaným seznamem prací, není zde však žádné curriculum vitae. V tomtéž kartonu ve složce 1 je však jako dokument „a“ uložen životopis B. Hostinského (2 strojopisné stránky formátu A4) a jeví se nám jako pravděpodobné, že je to ono curriculum vitae, které chybí ve složce č. 3. Tento životopis je datován „V Brně dne 3. dubna

---

<sup>306</sup> O tomto tématu existuje několik článků; celkový přehled lze najít v [Ma7].

<sup>307</sup> Jedná se o strojopis (průklep, 12 listů formátu A4), který je totožný s Beránkovým seznamem až do publikace č. 143 včetně; dodatečně jsou strojem připsány publikace č. 144 (v Beránkově seznamu je to č. 145) a č. 145 (v Beránkově seznamu je to č. 147). Dále pokračuje Beránek opět podle strojopisu.

1951“, jedná se tedy o dokument, který B. Hostinský napsal těsně před svou smrtí. Jeví se nám proto jako možné, že i seznam prací uložený ve složce č. 3 pochází z konce života B. Hostinského.

Domníváme se proto, že seznam publikací připojený k [Br1] lze fakticky považovat za seznam vlastních prací zpracovaný B. Hostinským těsně před smrtí. Tento seznam obsahuje 147 původních prací matematických a fyzikálních (asi polovina z nich je napsána francouzsky), sedm nekrologů, článek o Purkyňovi, populární brožuru „O matematice“, a závěrečný souhrnný odstavec, podle kterého Hostinský napsal ještě asi dvacet článků historických, kritických, příležitostných a populárních<sup>308</sup> a více než tři sta recenzí<sup>309</sup>.

Pokud se tohoto závěrečného souhrnného odstavce týče, v Archivu MU Brno (fond B. Hostinský, karton 1, složka č 3) je jako dokument „d“ uložen stručný<sup>310</sup> rukopisný přehled recenzí, kritických článků a podobných prací obsahující vždy jen název a ročník časopisu nebo podobný stručný údaj uvádějící, kde byla recenze (kritický článek atd.) otištěna. Podle tohoto seznamu by asi bylo možné dohledat další práce B. Hostinského a doplnit Beránkem publikovaný seznam, při přípravě tohoto příspěvku však nebylo uvedeného dokumentu použito.

Hostinský byl většinu svého života profesorem teoretické fyziky, přesto byl v mezinárodním měřítku znám jako matematik zabývající se teorií pravděpodobnosti, hlavně pak náhodnými procesy. Jak už bylo řečeno, seznam jeho publikací připojený k [Br1] obsahuje 147 původních prací matematických a fyzikálních, a z nich je podle Beránka ([Br2], str. 444) více než šedesát věnována pravděpodobnostní problematice; první pravděpodobnostní práci sice B. Hostinský publikoval už v r. 1917<sup>311</sup> a další v r. 1920<sup>312</sup>, ale ve větším rozsahu začal pravděpodobnostní práce publikovat až v r. 1925.

---

<sup>308</sup> Není jasné, proč je článek o Purkyňovi a brožura „O matematice“ uvedena v seznamu zvlášť, když další Hostinského práce podobného charakteru jsou uvedeny jen souhrnně.

<sup>309</sup> V souvislosti s již zmíněným negativním vztahem B. Hostinského k teorii relativity považujeme za zajímavé, že mezi původními pracemi B. Hostinského není ve zmíněném seznamu uvedena ani jedna práce věnovaná teorii relativity; své kritické názory na teorii relativity vyjadřoval Hostinský hlavně v recenzích nebo v pracích, které měly spíše charakter filozofické diskuse.

<sup>310</sup> Jeden list formátu A4.

<sup>311</sup> *Nové řešení Buffonovy úlohy o jehle*. Rozpravy České akademie věd a umění, II. třída, sv. 26, č. 13.

<sup>312</sup> *Sur une nouvelle solution du problème d'aiguille*. Bulletin des sciences mathém. (2) 44, 126-136.

Podle Beránka ([Br2], str. 444 a násl.) lze pravděpodobnostní práce Hostinského rozdělit podle doby vzniku i tématicky do tří etap<sup>313</sup>. Do první etapy patří práce věnované geometrickým pravděpodobnostem; touto problematikou se Hostinský zabýval hlavně v letech 1917–1926 a své výsledky shrnul v knize „*Geometrické pravděpodobnosti*“<sup>314</sup>. Do druhé etapy patří práce věnované markovským procesům; touto problematikou se Hostinský zabýval hlavně v letech 1928–1935 a jeho hlavní publikací v této etapě představuje podle našeho názoru knížka „*Méthodes générales du calcul des probabilités*“<sup>315</sup>. Třetí etapu pravděpodobnostních prací B. Hostinského pak Beránek charakterizuje užíváním integrálních transformací při řešení diferenciálních rovnic, na něž vedou některé otázky z teorie difuze a teorie Brownova pohybu; touto problematikou se Hostinský zabýval hlavně v letech 1934–1939. Za hlavní publikaci Hostinského v této etapě by podle našeho názoru bylo možné považovat knihu napsanou společně s Vito Volterrou „*Opérations infinitésimales linéaires*“<sup>316</sup>.

Toto dělení je pochopitelně jen rámcové, domníváme se však, že vystihuje podstatné etapy Hostinského práce v oblasti teorie pravděpodobnosti jak z hlediska obsahového, tak z hlediska časového.

Jak už bylo řečeno v paragrafu 7.1, v této kapitole chceme dokumentovat podíl B. Hostinského na vzniku teorie markovských procesů<sup>317</sup> a podat chro-

---

<sup>313</sup> Časové vymezení jednotlivých etap, které zde podáváme, se poněkud odchyluje od časového vymezení Beránkova.

<sup>314</sup> Knížka vyšla jako 2. svazek edice „Kruh“, kterou vydávala Jednota čs. matematiků a fyziků, v Praze v r. 1926. Rozsah knížky je 87 stran.

<sup>315</sup> Kniha vyšla jako 52. svazek edice „Mémorial des sciences mathématiques“, kterou vydávala pařížská akademie věd, v nakladatelství Gauthier-Villars v Paříži v r. 1931; její rozsah je 66 stran. Francouzskému vydání předcházelo české vydání s názvem „*O pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy*“ (Sborník přírodovědecký sv. 6, str. 289 – 340. Praha 1929).

<sup>316</sup> Kniha vyšla v nakladatelství Gauthier-Villars v Paříži v r. 1938; rozsah knihy je 238 stran členěných do osmnácti kapitol. Vlastní text (tj. 18. kapitola) končí na str. 222, na str. 223 začínají „Notes bibliographiques“ a je zde uvedeno, že prvních patnáct kapitol této knihy (15. kapitola končí na str. 174) představuje novou edici jedné starší Volterrovy práce. Hostinský je tedy v uvedené knize autorem (nebo spoluautorem) 16. – 18. kapitoly na stranách 175–222 a souvisejících bibliografických poznámek. Podrobněji je o této knize pojednáno v [Sla], str. 160–161, 180–186; tam lze také najít podrobnější informace o V. Volterrovi.

<sup>317</sup> Pokud jde o počátky teorie markovských procesů, tato problematika je (kromě již zmíněné práce [Bru]) zpracována např. ve stati [Juš] a v knihách [Maj] a [Schn]. V knize [Pla] je citována údajně velice podrobná práce na toto téma: Antretter, G. (1989): *Von der Ergodenhypothese zu stochastischen Prozessen: Die Entfaltung der Theorie der Markov-Ketten und Prozessen von dem Hintergrund statistisch-mechanischer Probleme*, Schriftliche Hausarbeit aus dem Fach Mathematik, Universität München; tuto práci se nám však nepodařilo najít.



nologický přehled jeho prvních publikací z této oblasti v návaznosti na publikace jiných autorů. Těto problematice se budeme nyní věnovat.

## 7.3 B. Hostinský a markovské procesy

### 7.3.1 Vznik teorie markovských procesů

Jak známo, zakladatelem teorie markovských procesů je ruský matematik Andrej Andrejevič Markov (1856 Rjazaň – 1922 Petrohrad), který studoval a později celý život působil na petrohradské univerzitě (1874 student, 1880 soukromý docent, 1886 mimořádný profesor, 1893 profesor, 1905 profesor emeritus); byl rovněž členem petrohradské akademie věd (1886 adjunkt, 1890 mimořádný člen, 1896 řádný člen). Za počátek teorie markovských procesů (v dnešní terminologii přesněji: markovských řetězců) je všeobecně považována Markovova práce „*Rasprostraněnije zakona bolšich čísel na veličiny, zavisjaščije drug od druga*“, která byla publikována v časopise „*Izvestija fiziko-matematičeskogo občestva pri Kazanskom univerzitetě*“, sv. XV, č. 4 z r. 1906<sup>318</sup>.

Markov byl první, kdo studoval řetězce jako obecný matematický pojem, některé konkrétní případy markovských řetězců nebo i spojitých procesů však byly studovány již dříve nebo zhruba ve stejné době nezávisle na Markovovi. Juškevič ([Juš], str. 129) v této souvislosti uvádí biologicky orientovanou práci Francise Galtona z r. 1889 vedoucí k řetězci se spočetnou množinou stavů, práci L. Bacheliera z let 1900–1901 věnovanou burzovním spekulacím a vedoucí ke spojitému markovskému procesu, práce A. Einsteina a M. Smoluchovského z let 1905–1907 věnované Brownovu pohybu a vedoucí rovněž ke spojitému markovskému procesu, práci P. a T. Ehrenfestových z r. 1907 věnovanou modelu difuze, a nakonec druhé vydání knihy J. H. Poincarého „*Calcul des probabilités*“ z r. 1912, kde je studována úloha o míchání karet a v souvislosti s tím se objevují i výsledky z oblasti markovských řetězců<sup>319</sup>. Z této Poincarého úlohy<sup>320</sup> a jejího řešení vyšel později B. Hostinský a v této kapitole se k ní ještě vrátíme.

---

<sup>318</sup> Majstrov ([Maj], str. 254) upozorňuje, že na obálce časopisu je sice uveden rok 1906, Markov však na konci článku uvádí datum 25. března 1907.

<sup>319</sup> Schneider ([Sch], str. 444) uvádí v této souvislosti i Bernšteinovu práci „*Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel*“, Comptes rendus Acad. Sci. Paris 177 (1923), 528–531, zdá se však, že tato práce další vývoj teorie markovských procesů nijak neovlivnila. Z hlediska naší knížky je zmíněná práce zajímavá tím, že je věnována Mendelovi, o kterém už byla učiněna malá poznámka v paragrafu 1.10.1. Z historického hlediska je zajímavé, že Bernstein v tomto článku Markova vůbec necituje.

Je zajímavé, že zatímco řada badatelů došla k markovským řetězcům a procesům při studiu nejrůznějších aplikačních úloh, Markov sám pojímal tuto problematiku jako čistě teoretickou a (s jedinou výjimkou) se o žádné aplikace ani nepokusil. Onou jedinou aplikací bylo studium literárního textu<sup>321</sup>; přesněji řečeno, Markov studoval jednak řetězec tvořený posloupností samohlásek a souhlásek (tvrdý a měkký znak neuvažoval) v prvních 20000 písmenech Puškinova „*Evžena Oněgina*“ a jednak analogický řetězec tvořený 100000 písmeny v knize S. T. Aksakova „*Detskije gody Bagrova – vnuka*“<sup>322</sup>.

Pokud se dalšího rozvoje teorie markovských procesů týče, v literatuře bývá uváděna celá řada jmen, ale Bohuslava Hostinského jsme nikde nenašli a zdá se, že do jisté míry upadl v zapomnění. Juškevič ([Juš], str. 129) např. píše: „*V Markovovu studiu řetězců pokračovali S. N. Bernštejn*<sup>323</sup>, *M. Fréchet*, *V. I. Romanovskij*, *A. N. Kolmogorov*, *W. Doeblin*<sup>324</sup> a mnozí další. První přesné zpracování spojitého markovského procesu, procesu popisujícího Brownův pohyb, provedl N. Wiener v r. 1923. Základy obecné teorie markovských procesů byly podány ve třicátých letech Kolmogorovem. Moderní aspekty teorie markovských procesů, které se staly intenzivně se rozvíjející samostatnou částí matematiky, rozpracovali W. Feller, P. Lévy, J. Doob, E. B. Dynkin, K. Ito a další.“

V tomto výčtu se tedy Hostinský vůbec neobjevuje, my se však domníváme, že v seznamu pokračovatelů A. A. Markova by Hostinský v žádném případě neměl chybět, a uvedeme zde aspoň jeden z důvodů pro toto tvrzení.

---

<sup>320</sup> Poincaré rovněž upozornil na možnost použít analogického přístupu i k některým problémům statistické fyziky.

<sup>321</sup> Pro tyto své výzkumy bývá Markov považován za jednoho z předchůdců dnešní matematické lingvistiky (viz např. [Čer], str. 250), v této souvislosti však považujeme za nutné připomenout (viz paragraf 1.5 této knihy), že již v r. 1886 publikoval A. Seydler článek věnovaný pravděpodobnostnímu pohledu na některé otázky tzv. sporu o rukopisy, takže Markov nebyl první, kdo aplikoval teorii pravděpodobnosti při studiu literárního textu (podrobněji o Seydlerovu článku viz [Zi]).

<sup>322</sup> Výsledky Markovova studia uvedených problémů lze najít např. ve 4. vydání jeho učebnice „*Isčislenije verojatnostej*“ z r. 1924 na str. 566–577 (Puškin) a na str. 577–581 (Aksakov); výzkum Evžena Oněgina však Markov publikoval již v r. 1913 („*Primer statističeskogo ussledovanija nad tekstom ‚Evgenija Onegina‘, illjustrirujuščij svjaz ispytanj v cep*“). In: Izv. Akad. nauk SPb, VI. serija, t. 7, 1913, No. 3, 153–162). Z hlediska této naší kapitoly je zajímavé, že základní informaci o tomto Markovovu výzkumu podal Hostinský ve své přednášce „*O některých aplikacích počtu pravděpodobnosti*“ ([Sb], str. 1–15); této přednášce bude věnován paragraf 7.4.

<sup>323</sup> Juškevičova stať je psána anglicky, takže jméno tohoto ruského matematika je zde uvedeno ve tvaru „Bernstein“.

<sup>324</sup> V této souvislosti je zajímavý článek [Maz] o korespondenci mezi Doeblinem a Hostinským.

V r. 1934 přednesl A. N. Kolmogorov referát<sup>325</sup>, ve kterém podal přehled některých směrů tehdejší teorie pravděpodobnosti a uvedl i významné představitele jednotlivých směrů. Jedná se sice o Kolmogorovův osobní názor, protože však Kolmogorov patřil k nejvýznamnějším matematikům 20. století, jeví se nám tento názor jako natolik zajímavý, že zasluží citaci. Kolmogorov v r. 1934 tedy považoval za vhodné věnovat svůj příspěvek následujícím směrům v teorii pravděpodobnosti a jejich představitelům:

1) Analogie k teorii míry:

- a) axiomatika teorie pravděpodobnosti (Borel, Fréchet, Kolmogorov, Hopf);
- b) silný zákon velkých čísel (Borel, Cantelli, Slutskij, Fréchet, Chinčín, Kolmogorov, Glivenko, Lévy);

2) Nové přístupy ve fyzikálních a jiných aplikacích:

- a) teorie stochastických procesů (de Finetti, Hostinský, Hadamard, von Mises, Kolmogorov, Fréchet, Chinčín, Lévy);
- b) teorie náhodných funkcí (Wiener, Slutskij, Lévy);

3) Nový analytický aparát:

- a) rovnice stochastických procesů (Kolmogorov, Hostinský, Fréchet, Bernštejn, Pontrjagin);
- b) nové metody důkazů limitních vět (Kolmogorov, Petrovskij<sup>326</sup>, Bernštejn, Chinčín, Bavli<sup>327</sup>).

---

<sup>325</sup> Jednalo se o referát na II. všesvazovém matematickém sjezdu, který se konal v Leningradu ve dnech 24. – 30. VI. 1934; sborník příspěvků tohoto sjezdu vyšel v r. 1935 a Kolmogorovův příspěvek by v něm měl být na str. 349–358. Tento sborník se nám nepodařilo najít, proto citujeme podle knihy [Pla], str. 233.

<sup>326</sup> Asi je míněn Ivan Georgijevič Petrovskij (1901–1973), který je u nás znám hlavně svými učebnicemi týkajícími se diferenciálních a integrálních rovnic.

<sup>327</sup> Autor této knížky se přiznává, že mu toto jméno nic neříká. Plato uvádí v poznámce, že jedině, co ví o tomto autorovi, je to, že G. M. Bavli v r. 1936 přeložil Kolmogorovovu knihu do ruštiny, neuvádí však, o jako knihu se jednalo. Podle dalších dostupných údajů se jednalo o překlad Kolmogorovova pojednání „*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*“ (německý originál vyšel v r. 1933, první vydání ruského překladu z r. 1936 se nám nepodařilo najít), ve druhém vydání (1974) ruského překladu uvedeného Kolmogorovova pojednání, které máme k dispozici, však není o překladateli žádná zmínka. O G. M. Bavlim se nám nepodařilo nic zjistit, pouze v učebnici B. V. Gněděnka „*Kurs teorii verojatnostej*“ (ve vydání z r. 1965 na str. 393) jsme našli citaci jedné Bavliho práce z r. 1936. Podle údaje na internetové adrese <http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/index.html> byl Bavli žákem A. N. Kolmogorova (tj. Kolmogorov vedl jeho disertaci); jestliže Kolmogorov považoval za nutné jmenovat ho v sousedství předních světových představitelů teorie pravděpodobnosti, muselo se jednat o žáka mimořádně nadaného.

Pokud Kolmogorov považoval za vhodné uvést Hostinského ve svém přehledu dokonce dvakrát, lze to považovat za vysoké ocenění B. Hostinského.

### 7.3.2 První práce B. Hostinského o markovských řetězcích a procesech

Několik prvních prací, o kterých zde bude řeč, bylo publikováno v časopisu „Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences ....“ vycházejícím v Paříži.

Za počáteční impuls pro práce Hostinského lze považovat článek M. Hadamarda „*Sur le battage des cartes*“ otištěný v Comptes rendus ve sv. 185 (druhé pololetí 1927) na str. 5–9; článek je datován „Séance du 4 Juillet 1927“. Článek se zabývá úlohou, kterou publikoval a řešil H. Poincaré ve 2. vydání své učebnice „*Leçons sur le Calcul de probabilités*“ v r. 1912; Hostinský později nazval tuto úlohu „Poincaréova úloha o míchání karet“<sup>328</sup> a formuluje ji takto ([Hos], II, str.75):

*„Je dano  $q$  karet, které jsou původně uspořádány v určité počáteční sestavě  $S_1$ ; ostatní sestavy (neboli permutace) označíme  $S_2, S_3, \dots, S_r$ , kde  $r = q!$ . ... Operaci, která převádí počáteční sestavu  $S_1$  do  $S_k$ , označíme  $S_k$ “<sup>329</sup>. Hráč míchá karty opětovně. Každé zamíchání spočívá v tom, že hráč provede jednu z operací  $S_i$ . Budiž  $p_i$  pravděpodobnost, že provede  $S_i$ . Jak velká je pravděpodobnost, že po  $n$  postupně provedených operacích budou karty tvořit sestavu  $S_k$ ?“*

Poincaré dokázal, že pro velký počet míchání karet je hledaná pravděpodobnost stejná pro všechny sestavy  $S_k$  a nezávisí ani na počáteční sestavě karet, ani na způsobu míchání.

Uvedený Hadamardův článek odstartoval sérii článků v Comptes rendus, sv. 186 (první pololetí 1928) v lednu – únoru 1928, ve kterých Hostinský a Hadamard diskutovali o různých zobecněních uvedeného problému. Nejprve reagoval Hostinský článkem „*Sur les probabilités relatives aux transformations répétées*“, který vyšel na str. 59–61 s datem „Séance du 9 Janvier 1928“; hned za článkem je na následující str. 62 kratička (6 řádků) poznámka „*Observations de M. Hadamard sur la Note précédente*“. V tomto svazku se pak objevily dvě obsírnější Hadamardovy reakce na uvedený Hostinského článek, první s názvem „*Sur les opérations itérées en Calcul des Probabilités*“ na str. 189–192 s datem „Séance du 23. Janvier 1928“ a druhá

---

<sup>328</sup> V téže knize na str. 77 je uvedena ještě „Lévyova úloha o míchání karet“.

<sup>329</sup> Hostinský skutečně značí operaci stejným symbolem jako sestavu.

s názvem „*Sur la principe ergodique*“ na str. 275–276 s datem „Séance du 30 Janvier 1928“<sup>330</sup>. Diskusi dočasně uzavřel Hostinský článkem „*Complément à la Note sur les Probabilités relatives aux transformations répétées*“, který vyšel na str. 487–489 s datem „Séance du 20 Février 1928“. Na tyto své a Hadamardovy články z r. 1928 publikované v *Comptes rendus* navázal Hostinský v tomtéž roce ve dvou „tuzemských“ článcích „*Sur les transformations itérées des variables aléatoires*“ (Spisy vydávané přírodovědeckou fakultou Masarykovy university (red. B. Hostinský). Č. 93, Brno 1928, 24 str.) a „*O základních úlohách počtu pravděpodobnosti*“ (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 57 (1928) str. 267–275).

Jak už bylo řečeno, v této kapitole nám nepůjde o rozbor jednotlivých prací, ale o chronologický přehled publikací B. Hostinského z oblasti markovských procesů v návaznosti na publikace jiných autorů. Z tohoto hlediska považujeme za podstatné, že v žádné z dosud uvedených prací vůbec nepadlo jméno A. A. Markova; zdá se být zřejmé, že ani Hadamard ani Hostinský na začátku roku 1928 o Markovových pracích nevěděli a vlastně objevovali Markovovy řetězce znovu.

V tomto směru znamenala rozhodující změnu další práce B. Hostinského, která vyšla v *Comptes rendus*, sv. 189 (druhé pololetí 1929) na str. 78–80 pod názvem „*Sur les probabilités des phénomènes liés en chaîne de Markoff*“. Hostinský zde píše<sup>331</sup>:

„*Markoff (Bull. de la Société phys. math. de Kasan, 2<sup>e</sup> série, 15, 1907) ... a démontré un théorème ... En écrivant mes Notes précédentes, je ne connaissais pas le travail de Markoff de 1907. Certains résultats que j'y démontre (Comptes rendus, 186, 1928, p. 59 et 487) peuvent être déduits du théorème de Markoff.*“

Domníváme se, že zde Hostinský učinil rozhodující krok ve vývoji problematiky: povšiml si Markovových prací a upozornil na ně francouzské matematiky; až do té doby zřejmě ani Hostinský, ani francouzští matematici Markovovy práce neznali. Z historického hlediska je to zajímavé, protože již

---

<sup>330</sup> Hostinského a Hadamardovy články z ledna 1928 jsou citovány v práci A. N. Kolmogorova „*Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*“ (Mathematische Annalen 104 (1931), str. 415–458); příslušné citace tam jsou na str. 426 a 428.

<sup>331</sup> „*Markov (Bull. de la Société phys. math. de Kasan, 2<sup>e</sup> série, 15, 1907) ... dokázal větu ... Když jsem psal své předešlé poznámky, neznal jsem tuto Markovovu práci z r. 1907. Některé výsledky, které jsem dokázal (Comptes rendus, 186, 1928, p. 59 a 487), lze odvodit z Markovovy věty.*“

v r. 1926 vyšel v Německu článek (dokonce francouzsky psaný) S. Bernštejna „*Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes*“ (Math. Annalen 97 (1926), str. 1–59), ve kterém jsou citovány Markovovy práce; zdá se, že ani Hostinský, ani žádný z jeho francouzských kolegů si tohoto článku nepovšiml<sup>332</sup>.

Na základě práce [Bru] lze soudit, že pro seznámení Hostinského s Markovovými pracemi byla rozhodující účast Hostinského na mezinárodním matematickém kongresu v Bologni, který se konal ve dnech 3. – 10. IX. 1928. Když později shrnul své výsledky v práci „*O pravděpodobnosti zjevů, jež jsou spojeny v Markovovy řetězy*“ (Sborník přírodovědecký, sv. 6, str. 289–340. Praha 1929), říká zde (str. 289) o návaznostech svých výzkumů na Markovovy práce:

„*Ve své práci nadepsané ‘O základních úlohách počtu pravděpodobnosti’ ... uvedl jsem výsledky svých úvah o některých úlohách, které, jak se domnívám, mají zvláštní důležitost pro teorii Brownova pohybu a pro kinetickou teorii hmoty vůbec. Když jsem pak, po uveřejnění onoho článku, podrobně studoval práce, které vydal v letech 1907–1918 znamenitý ruský matematik A. A. Markov, shledal jsem, že právě v nich jsou obsaženy nejobecnější základy k řešení těch úloh, o které jsem se zajímal.*“

Hostinský neuvádí na konci práce souhrnný seznam použité literatury, ale uvádí citace literatury formou poznámky pod čarou. Protože z historického hlediska považujeme za zajímavé zjistit, co Hostinský v r. 1929 o markovských procesech mohl znát „odjinud“, uveďme zde, které práce o markovských procesech (kromě prací A. A. Markova a již uvedených prací Hadamardových a svých) Hostinský v těchto poznámkách cituje<sup>333</sup>:

Romanovskij, V.: *Sur les chaînes de Markoff*. Dokl. Ak. Nauk, Laningrad, A, No. 9, 1929, str. 203–208.

Bernstein, S.: *Sur les sommes de quantités dépendantes*. Izv. Ak. Nauk, 1926, str. 1459–1478;

Bernstein, S.: *Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes*. Math. Annalen 97 (1926), str. 1–59;

Bernstein, S.: *Sur les sommes de quantités dépendantes*. Dokl. Ak. Nauk, Leningrad, A, 1928, str. 55–60.

---

<sup>332</sup> V letech 1926–1929 vyšly v Sovětském svazu i další práce S. Bernštejna a V. Romanovského o markovských procesech, je však otázkou, nakolik byly známe v cizině; Hostinský je citoval ve své souhrnné práci o markovských procesech, která vyšla v r. 1929.

<sup>333</sup> Citace uvádíme v té podobě, v jaké je uvádí Hostinský.

Tato souhrnná práce Hostinského pak vyšla i ve francouzském překladu pod názvem „*Méthodes générales du calcul de probabilités*“ (Mémorial des sciences mathématiques, fasc. 52. Paris 1931, 63 str.)<sup>334</sup>. Hostinský sám nikde ve francouzském textu neuvádí, že by se jednalo o překlad české práce, ale v seznamu Hostinského publikací v článku [Br1]<sup>335</sup> není tato francouzská práce uvedena samostatně, pouze je připsána k předešlé české práci jako „Francouzské zpracování, rozšířené“.

Provedeme-li alespoň základní porovnání obsahů obou prací, pak můžeme vyjít z toho, že český text (51 stránek + obsah) je rozčleněn do 34 bodů, francouzský text (59 stránek + seznam literatury + obsah) do 39 bodů. Na první pohled je zřejmé, že ve francouzské práci je (v porovnání s prací českou) přidána celá první kapitola „*Méthodes des fonctions arbitraires*“ (str. 1–13, body 1–4). Pokračování francouzského textu na str. 13–56 (body 5–35) obsahově odpovídá (podle názvů jednotlivých bodů) takřka přesně textu českému s tím, že některé body jsou více či méně pozměněné. Závěr francouzské práce (str. 56–59, body 36–39) je opět nový (v porovnání s českou prací); jsou zde učiněny malé zmínky o Smoluchovského rovnici pro Brownův pohyb (bod 36) a Chapmanově rovnici difuze (bod 39). Seznam literatury připojený k francouzskému textu je nesrovnatelně bohatší než seznam prací obsažených v českém textu v poznámkách pod čarou; ještě o něm bude řeč v závěrečném paragrafu této kapitoly.

Bylo by možná zajímavé porovnat tuto práci B. Hostinského s jeho prací „*Application du calcul des probabilités à la théorie du mouvement Brownien*“ (Annales de l'Institut H. Poincaré 3, 1932, str. 1–74)<sup>336</sup>. Tato práce sice podle roku vydání následuje za prací předešlou, ale na jejím konci (před obsahem) je uvedeno „*Conférences faites à l'Institut Henri-Poincaré en Janvier et Février 1930*“, z čehož lze soudit, že obě zmíněné francouzské práce vznikaly prakticky současně.

Domníváme se, že uvedené dvě francouzské práce představují jakýsi závěr první etapy vědecké práce B. Hostinského v oblasti markovských procesů. Podle našeho názoru hlavní přínos B. Hostinského spočívá v tom, že od sa-

---

<sup>334</sup> Tuto francouzskou verzi cituje A. N. Kolmogorov ve své známé práci „*Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*“ (Springer, Berlin 1933) na str. 13 v poznámce pod čarou. V téže poznámce je v téže souvislosti citována kniha R. v. Misese „*Wahrscheinlichkeitsrechnung*“ (Deuticke, Leipzig u. Wien, 1931), § 16.

<sup>335</sup> Jak už bylo uvedeno v paragrafu 7.2.2, podle našeho názoru lze seznam Hostinského prací publikovaný v [Br1] považovat za seznam vypracovaný přímo Hostinským.

<sup>336</sup> Citovno podle seznamu v [Br1] a podle exempláře uloženého v knihovně MU AV ČR v Praze. Tento exemplář nemá žádnou titulní stránku, asi se jedná o separát. Na první stránce nahoře je přípisek: „Knihovně Jednoty čsl. matematiků a fysiků v Praze věnuje B. Hostinský.“

mého začátku práce v této oblasti tíhl k vyšetřování spojitých případů, které mají zřetelnou fyzikální motivaci. Tím se dostal do oblasti, kde k řešení fyzikálně motivovaných matematických problémů potřeboval zcela nový matematický aparát; za vyvrcholení jeho práce v této oblasti lze považovat společnou knihu Hostinský, B. – Volterra, V.: *Opérations infinitésimales linéaires* (Gauthier-Villars, Paris 1938, VII + 238 str.)<sup>337</sup>.

#### 7.4 Středoškolský referát

Ve dnech 26. III. – 1. IV. 1931 proběhly v Brně matematicko-přírodovědecké kurzy pro středoškolské profesory. Zúčastnilo se jich 223 středoškolských profesorů, kterým přednášeli brněnští vysokoškolské profesoři, a jejich přednášky pak vyšly tiskem ve sborníku [Sb]. Mezi přednášejícími byl i Bohuslav Hostinský, který přednesl čtyřhodinovou přednášku „*O některých aplikacích počtu pravděpodobnosti*“ ([Sb], str. 1–15) a z našeho hlediska je zajímavé, že do této přednášky zařadil i výklad o markovských řetězcích; Hostinský tedy považoval za vhodné a možné podat středoškolským profesorům výklad o problematice, která tehdy patřila do oblasti nejnovějších matematických výzkumů<sup>338</sup>. Tento Hostinského „středoškolský“ výklad o markovských řetězcích pochopitelně neobsahuje žádné původní výsledky a z hlediska dějin matematiky je tedy zcela nezajímavý, protože však markovské řetězce dodnes nepatří do základního kurzu vysokoškolské matematiky (a to ani u nastávajících učitelů matematiky), jeví se nám jako zajímavé z hlediska historie vyučování matematice podívat se na představy B. Hostinského z r. 1931 o tom, jak by mohl vypadat středoškolský úvod do této problematiky. Navíc Hostinský do této své přednášky zařadil i výklad o Markovových výzkumech textu „*Evžena Oněgina*“; tyto Markovovy výzkumy se u nás sice občas citují (viz např. [Čer], str. 250), ale pokud víme, tato přednáška B. Hostinského je asi jedinou českou publikací, ve které se objevuje aspoň základní konkrétní informace o tom, co Markov s Puškino-vým textem vlastně dělal.

Celý text Hostinského přednášky je rozdělen do devíti částí; markovským řetězcům je věnována osmá a devátá část (str. 10–15). Sedmá část má název „*Nespojitý Brownův pohyb*“ a osmá část nazvaná „*Markovovy řezězy*“ začíná odkazem na tuto část:

---

<sup>337</sup> O této knize již byla řeč v paragrafu 7.2.2.

<sup>338</sup> Sborník obsahuje ještě jednu „pravděpodobnostní“ přednášku, která byla rovněž čtyřhodinová, přednesl ji doc. J. Kaucký a měla název „*Několik kapitol z počtu pravděpodobnosti, přímkykajících se k středoškolské látce*“ ([Sb], str. 16–24). O J. Kauckém už byla zmínka v paragrafu 6.5.



„Vraťme se ještě k Brownovu pohybu po přímce. ... Podobně je tomu při Brownově pohybu ve třech směrech... Smoluchowski rozřešil některé speciální úlohy sem spadající. Shledal jsem, když jsem srovnával jeho úvahy s Markovovými pracemi z počtu pravděpodobnosti (vyšlé v letech 1908–1917), že t. zv. Markovovy řetězcy vedou k obecné teorii Brownova pohybu.“

Tento odkaz se nám jeví jako zajímavý, protože opět ukazuje fyzikální motivaci Hostinského zájmu o náhodné procesy. Dále se Hostinský věnuje výkladu o markovském řetězci se dvěma stavy<sup>339</sup>. Z hlediska tohoto výkladu je podstatné, že již ve druhé části své přednášky Hostinský zavedl (v dnešní terminologii) binomické rozdělení diskrétní náhodné veličiny a odvodil vzorce pro střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny, protože jeho výklad o markovském řetězci se dvěma stavy úzce navazuje na výklad o binomickém rozdělení; v dnešní terminologii by se dalo říci, že Hostinský zde zobecňuje vzorce pro střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení na případ, kdy jednotlivé pokusy jsou jistým způsobem závislé.

Formulace problému u Hostinského je následující:

„Jednoduchý řetěz o dvou alternativách jest určen takto: Hodnota proměnné veličiny  $x$ , která je vždy rovna jednomu ze dvou čísel  $a_1, a_2$ , závisí na výsledku pokusu; zdaří-li se pokus, je  $x = a_1$ , nezdaří-li se, je  $x = a_2$ . Konáme řadu pokusů a činíme tento předpoklad: zdaří-li se  $n$ -tý pokus, je  $p_{11}$  resp.  $p_{12}$  pravděpodobnost, že následující pokus se zdaří resp. nezdaří; nezdaří-li se  $n$ -tý pokus, je  $p_{21}$  resp.  $p_{22}$  pravděpodobnost, že následující se zdaří resp. nezdaří. Patrně jest  $p_{11} + p_{12} = 1, p_{21} + p_{22} = 1$ ; předpokládáme, že všechny čtyři  $p_{ik}$  (nezávislé na  $n$ ) jsou kladné. Budiž dále  $P_{ik}(n)$  pravděpodobnost, že, když po  $m$ -tém pokusu bylo  $x = a_i$ , bude po  $(m + n)$ -tém pokuse  $x = a_k$  ( $i, k = 1, 2$ ).“

Hostinský pak nejprve dokazuje, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{11}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{21}(n) = P_1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P_{12}(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{22}(n) = P_2, \quad P_1 + P_2 = 1$$

a připojuje komentář: „To je první hlavní výsledek Markovův: po nekonečně velickém počtu pokusů je pravděpodobnost  $P_1$ , že se pokus zdaří, nezávislá na tom, jak dopadl pokus první.“

Dále pak definuje  $a_1 = 1, a_2 = 0$ ,  $m$  = počet zdařených pokusů v sérii  $n$  pokusů a dokazuje, že

<sup>339</sup> Hostinský nepoužívá maticové symboliky.

- limita střední hodnoty zlomku  $\frac{m}{n}$  pro  $n \rightarrow \infty$  je rovna  $P_1$ ,

- limita střední hodnoty zlomku  $\frac{(m - nP_1)^2}{n}$  pro  $n \rightarrow \infty$  je rovna

$$P_1(1 - P_1) \frac{1 + p_{11} - p_{21}}{1 - p_{11} + p_{21}}$$

a komentuje souvislost těchto vztahů se vztahy pro střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení.

Devátá (poslední) část přednášky B. Hostinského má název „Příklad řetězu; Markovova statistika hlásek v daném textu“ a obsahově navazuje na předešlou část, ve které byl odvozen limitní vztah pro výpočet rozptylu v sérii pokusů tvořících markovský řetězec; hlavní cíl, ke kterému Hostinský míří v deváté části, je experimentální posouzení tohoto limitního vztahu.

Hostinský zde vychází ze 4. vydání Markovovy učebnice „*Isčislenije verojatnostej*“ (Moskva 1924); uvádí, že Markov vybral z Puškinova „*Evžena Oněgina*“ část textu o 20000 hláskách a bez porušení daného pořadí hlásek ji rozdělil na 200 skupin po 100 hláskách. Pak spočítal, kolik je v které skupině samohlásek, a dostal tento výsledek:

Počet samohlásek ve skupině	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
Počet skupin	3	1	6	18	12	31	43	29	25	17	12	2	1

Aritmetický průměr počtu samohlásek ve skupině je roven 43,19 a rozptyl počtu samohlásek ve skupině je roven 5,1139. Na základě aritmetického průměru tedy můžeme odhadnout pravděpodobnost jevu, že náhodně vybraná hláska je samohláska, jako  $p = 0,432$ , spočítáme-li však nyní rozptyl pro binomické rozdělení s parametry  $n = 100$  a  $p = 0,432$ , dostaneme hodnotu 24,5376, což se podstatně liší od rozptylu, který byl zjištěn experimentálně<sup>340</sup>.

Hostinský okamžitě vysvětluje, v čem je problém: „*Skupiny po 100 hláskách jsou vzaty z textu, ve kterém pořadí hlásek je dáno smyslem básně. Hlázky*

<sup>340</sup> Je sice pravda, že Hostinský počítá rozptyl z daných dat pomocí vzorce s  $n$  ve jmenovateli, tj. jako v popisné statistice, nikoli jako odhad neznámého rozptylu nějaké náhodné veličiny; tato skutečnost však jeho závěry nijak neovlivňuje.

nejsou zde vybrány tak, jako se vybírají koule tahem z osudí<sup>341</sup>. Podle Markova střídají se samohlásky a souhlásky v textu s určitými pravděpodobnostmi ...“. Hodnoty těchto pravděpodobností stanovil Markov na základě zkoumaného textu takto:

– pravděpodobnost, že po samohlásce následuje samohláska:

$$p_{11} = \frac{1104}{8638} \doteq 0,128 ;$$

– pravděpodobnost, že po souhlásce následuje samohláska:

$$p_{21} = \frac{7534}{11362} \doteq 0,663 ;$$

použijeme-li nyní vztahu odvozeného v předešlém bodu, měla by limitní hodnota rozptylu být rovna

$$np(1-p) \frac{1+p_{11}-p_{21}}{1-p_{11}+p_{21}} \doteq 7,433 ,$$

což se přibližně shoduje s experimentálně zjištěným údajem<sup>342</sup>.

Hostinský ještě pokračuje ve výkladu Markovova rozboru. Uvádí Markovem zjištěné údaje pro stejný text uspořádaný do 100 řádků po 200 hláskách, ze kterého pak byly utvořené stočlenné skupiny po sloupcích; tím byla odstraněna závislost mezi dvěma za sebou následujícími hláskami. Uvažujeme-li nyní náhodnou veličinu „počet samohlásek ve skupině“, pak experimentálně zjištěný rozptyl této náhodné veličiny bude 28, 9439, což se (podle Hostinského) dosti dobře shoduje s rozptylem vypočítaným pro binomické rozdělení.

V závěru své přednášky pak Hostinský říká: „*V teoretické fysice vyskytuje se řada problémů, které dojdou přesného vyjádření, až na ně Markovova teorie, dosud takřka neznámá, bude aplikována. ... Řešení takovýchto problémů vyžaduje doplniti Markovovu teorii zavedením spojitě proměnných veličin.*“ a odkazuje na jiné své práce.

## 7.5 Maurice René Fréchet

Tuto kapitolu ukončíme krátkým paragrafem věnovaným Maurici René Fréchetovi (1878 Maligny – 1973 Paříž)<sup>343</sup>, který byl podle našeho názoru

<sup>341</sup> Jinak řečeno, náhodná veličina „počet samohlásek ve skupině“ nemá binomické rozdělení, protože jednotlivé „pokusy“ nejsou nezávislé.

<sup>342</sup> Tak hodnotí situaci Hostinský; Hostinský zde ovšem v závěru výpočtu zaokrouhluje až příliš brutálně a vyšel mu rozptyl rovný 6, což by odpovídalo lepší shodě s experimentem, než je ve skutečnosti.

hlavním pokračovatelem B. Hostinského v oblasti markovských procesů. Nejstarší Fréchetovou prací na toto téma, kterou se nám podařilo najít, je článek „*Compléments à la théorie des probabilités discontinues ‘en chaîne’*“ otištěný v „Estratto dagli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (Scienze Fisiche e Matematiche). Serie II – Vol. II (1933 – XI)“<sup>344</sup>. Článek má rozsah 33 stránek a začíná následujícím úvodem:

„*La théorie des probabilités discontinues ‘en chaîne’ a été conçue et magistralement développée par Markoff. On la trouvera résumée dans un excellent ouvrage de M. Hostinsky (I), voir aussi (I<sup>bis</sup>), avec quelques additions dues à différents mathématiciens (Poincaré, M. Hadamard, M. Hostinsky et ses élèves, M. von Mises, M. Romanovsky, etc.).*“

Poprve se zde setkáváme s tím, že je uváděn nejen B. Hostinský (a to na prvním místě), ale také „jeho žáci“. Pro zjištění, kteří „žáci“ jsou míněni, a pro posouzení toho, kým byl Fréchet fakticky ovlivněn, je možná zajímavější než citovaný úvod bibliografie na konci práce. Obsahuje osm citací: třikrát práce B. Hostinského, tři práce dalších brněnských matematiků (J. Kaucký<sup>345</sup>, M. Konečný<sup>346</sup>, J. Potoček<sup>347</sup>; ve všech případech se jednalo o články otištěné ve sborníku přírodovědecké fakulty brněnské univerzity), a dvě práce dalších autorů (V. Romanovskij, M. Lublin).

V r. 1938 vyšla v Paříži Fréchetova kniha „*Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles*“ (Edice „*Traité du calcul des probabilités et de ses applications*. T. 1. Les principes de la théorie des probabilités. Fasc. 3. Recherches théoriques modernes sur la théorie des probabilités. Livre 2“). Její rozsah byl 300 stránek a v oblasti teorie markovských procesů se stala klasickou. Z hlediska této naší kapitoly je zajímavá poznámka na str. 301 na začátku závěrečná bibliografie:

---

<sup>343</sup> Podrobnější informace o něm lze najít např. ve stati B. Bru a S. Hertze v knize [HS], str. 331–334; počátkům spolupráce mezi Fréchetem a Hostinským je věnován článek [HMŠ].

<sup>344</sup> Citujeme podle exempláře uloženého v knihovně fyzikálních ústavů MU Brno pod signaturou K-1125.

<sup>345</sup> O Josefu Kauckém už byla řeč v paragrafu 6.5.

<sup>346</sup> Miroslav Konečný (1904 Blansko – 1937 Brno) studoval na přírodovědecké fakultě brněnské univerzity. Od r. 1927 byl asistentem u prof. K Čupra a současně učil na obchodní akademii v Brně.

<sup>347</sup> Jan Potoček (1904 Sarajevo – 1990 Praha) studoval na přírodovědecké fakultě brněnské univerzity. V r. 1931 se stal asistentem u prof. B. Hostinského, za války (až do svého zatčení v r. 1944) a po válce působil jako středoškolský učitel. Od r. 1949 působil jako profesor nejprve na brněnské technice, později na Vojenské technické akademii; v r. 1955 odešel na pražskou univerzitu do Matematického ústavu.

*„L'ouvrage de M. Hostinsky<sup>348</sup> cité plus loin, contient, aux pages 60–63, une liste bibliographique étendue. Pour abréger, nous n'avons fait figurer ci-après que les publications citées dans le présent volume et ne se trouvant pas dans la liste de M. Hostinsky. Les numéros entre crochets dans notre index font suite, pour un même auteur, à ceux de la liste de M. Hostinsky.“<sup>349</sup>*

Jinak řečeno, Fréchet považoval zmíněnou práci Hostinského za natolik zásadní, že nepovažoval za nutné znovu citovat práce, které cituje Hostinský, a odvolává se na ně zprostředkovaně přes práci Hostinského; kdo tedy chce sledovat bibliografické odkazy ve Fréchetově práci, musí mít po ruce i zmíněnou práci Hostinského<sup>350</sup>. Domníváme se, že tento fakt zřetelně dokumentuje význam B. Hostinského pro rozvoj teorie markovských procesů v one době.

---

<sup>348</sup> Je míněna práce B. Hostinského „*Méthodes générales du calcul de probabilités*“.

<sup>349</sup> „*Práce pana Hostinského, citovaná v dalším, obsahuje na stranách 60–63 rozsáhlý bibliografický seznam. Pro stručnost jsme v dalším uvedli pouze publikace, které nejsou uvedené v seznamu pana Hostinského a jsou citované v tomto svazku. Čísla v hranatých závorkách v našem seznamu navazují na seznam pana Hostinského u téhož autora.*“

<sup>350</sup> Takže např. najdeme-li ve Fréchetově knize na str. 4 odkaz : Poincaré [7], a podíváme-li se do seznamu literatury na konci Fréchetovy knihy, nenajdeme tam nic. Teprve podíváme-li se do seznamu literatury na konci zmíněné práce B. Hostinského, zjistíme, že je míněna Poincaréova kniha „*Calcul des probabilités*“.