

Základy teorie matic

12. Poznámka o maticích převádějících danou matici v sebe

In: Otakar Borůvka (author): Základy teorie matic. (Czech). Praha: Academia, 1971. pp. 82--83.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401340>

Terms of use:

© Akademie věd ČR

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

12. POZNÁMKA O MATICÍCH PŘEVÁDĚJÍCÍCH DANOU MATICI V SEBE

12.1. Definice. Nechť \mathbf{A} je daná čtvercová matice stupně n . Má-li nějaká čtvercová matice \mathbf{P} řádu n takovou vlastnost, že

$$\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{A}, \quad (45)$$

říkáme, že matice \mathbf{P} *převádí* matici \mathbf{A} *v sebe*.

Je-li přitom determinant $|\mathbf{P}| = +1$, říkáme, že transformace matice \mathbf{A} v sebe je *vlastní*. Je-li však $|\mathbf{P}| = -1$, mluvíme o *nevlastní* transformaci matice \mathbf{A} v sebe.

Všimněme si nyní některých vlastností matice \mathbf{P} , která převádí *regulární* matici \mathbf{A} v sebe.

12.2. Věta. Nechť matice \mathbf{P} převádí regulární matici \mathbf{A} v sebe. Pak platí tato tvrzení:

1. determinant $|\mathbf{P}| = \pm 1$;
2. matice \mathbf{P} a $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'$ jsou zaměnitelné, takže platí

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'); \quad (46)$$

3. matice $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'$ převádí matici \mathbf{A} v sebe transformací vlastní.

Důkaz: 1. Z relace (45) plyne

$$|\mathbf{P}'||\mathbf{A}||\mathbf{P}| = |\mathbf{A}|$$

neboli

$$|\mathbf{P}|^2 |\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|.$$

Protože $|\mathbf{A}| \neq 0$, máme $|\mathbf{P}|^2 = 1$, takže $|\mathbf{P}| = \pm 1$.

2. Z relace (45) dostáváme jednak

$$(\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \quad \text{neboli} \quad \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}'^{-1} = \mathbf{A}^{-1},$$

jednak

$$(\mathbf{P}'\mathbf{A}\mathbf{P})' = \mathbf{A}' \quad \text{neboli} \quad \mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{P} = \mathbf{A}' .$$

Vynásobením posledních dvou rovnic obdržíme

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}'^{-1})(\mathbf{P}'\mathbf{A}'\mathbf{P}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'$$

neboli

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{P}'^{-1}\mathbf{P}')\mathbf{A}'\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}' ,$$

takže

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}' .$$

Odtud násobením zleva maticí \mathbf{P} dostáváme vztah (46).

3. Dosadíme-li vlevo v (45) $\mathbf{P} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'$, obdržíme

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}')' \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}') &= \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})' (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A}' = \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})' \mathbf{A}' = \\ &= \mathbf{A}(\mathbf{A}'^{-1} \mathbf{A}') = \mathbf{A}\mathbf{E} = \mathbf{A} . \end{aligned}$$

Dále je

$$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}^{-1}| |\mathbf{A}'| = |\mathbf{A}|^{-1} |\mathbf{A}| = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|} = +1 .$$

12.3. Poznámky. 1. Zvolíme-li ve vztahu (45) za matici \mathbf{A} matici jednotkovou \mathbf{E} , vidíme že všechny matice \mathbf{R} , které převádějí matici \mathbf{E} v sebe, vyhovují vztahu

$$\mathbf{R}'\mathbf{E}\mathbf{R} = \mathbf{E}$$

neboli

$$\mathbf{R}'\mathbf{R} = \mathbf{E} .$$

Jsou tedy \mathbf{R} matice ortogonální. Proto každá ortogonální matice má vlastnosti 1, 2, 3 uvedené ve větě 12.2; vidíme však, že vlastnosti 2 a 3 jsou pro ortogonální matice triviální.

2. Kdybychom definici transformace matice \mathbf{A} v sebe maticí \mathbf{Q} definovali vztahem

$$\overline{\mathbf{Q}}'\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{A} ,$$

obdrželi bychom podobné výsledky a jako zvláštní případ pro $\mathbf{A} = \mathbf{E}$ dostali bychom (místo ortogonálních matic) matice unitární.