Porovnávacie teorémy

In: Otakar Borůvka (author): Diferenciálne rovnice. [Vysokoškolské učebné texty. Univerzita Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta]. (Slovak). Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1961. pp. 52--57.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401390

Medzi riešeniami systému Y môže byť integrál g, definovaný v istom intervale, ktorý integrál je význačný tým, že jeho hodnoty v porovnaní s hodnotami ľubovoľného riešenia $y \in Y$ v číslach, v ktorých obidve riešenia g, y existujú, sú vždy menšie, lebo sa rovnajú hodnotám riešenia y. Integrál g sa potom nazýva najmenší integrál prechádzajúci bodom (ξ, η), stručne: najmenší integrál v bode (ξ, η).

Obdobne definujeme najväčší integrál G prechádzajúci bodom (ξ, η), stručne: najväčší integrál v bode (ξ, η), tým že jeho hodnoty v porovnaní s hodnotami ľubovoľného riešenia $y \in Y$ v číslach, v ktorých obidve riešenia G, y existujú, sú vždy väčšie, alebo sa rovnajú.

Integrály g, G nazývame súhrnne krajné, alebo extrémne integrály prechádzajúce bodom (ξ, η), stručne: krajné alebo extrémne integrály v bode (ξ, η).

Ľahko vidíme, že ak d. rovnica (a) má len jedno riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η), definované v nejakom intervale j, potom toto riešenie je súčasne najmenším a najväčším integrálom v bode (ξ, η); naopak, ak.d. rovnica (a) má riešenie prechádzajúce bodom (ξ, η), definované v nejakom intervale j, ktoré je súčasne najmenším a najväčším integrálom v bode (ξ, η) potom toto riešenie je jediné, ktoré prechádza bodom (ξ, η) a je definované, v intervale j.

Podobne, ako sme definovali krajné integrály v bode (ξ, η), definujeme tzv. krajné zložené integrály v bode (ξ, η).

Medzi riešeniami systému Y môže byť integrál h (H), definovaný v tom istom intervale, ktorý integrál je významný tým, že jeho časť v číslach $x \leq \xi$, pokiaľ existuje, je najmenším (najväčším) a v číslach $x \geq \xi$ pokiaľ existuje, najväčším (najmenším) integrálom systému Y. Integrál h (H) sa potom nazýva dolný (horný) zložený integrál prechádzajúci bodom (ξ, η) stručne: dolný (horný) zložený integrál v bode (ξ, η); súhrnne potom tieto integrály nazývame krajné alebo extrémne zložené integrály prechádzajúce bodom (ξ, η), stručne: krajné alebo extrémne zložené integrály v bode (ξ, η).

Vlastnosti krajných zložených integrálov v bode (ξ, η) sú samozrejme dané vlastnosťami najmenších a najväčších integrálov v bode (ξ, η).

4. Porovnávacie teorémy

23. Metóda indukcie v kontinuu

V dôkazoch porovnávacích teorém, ktoré sú hlavným obsahom tejto kapitoly, použijeme tzv. metódy indukcie v kontinuu. Túto metódu vynašiel O.Perron a v mnohých prípadoch preukázal jej užitočnosť.

Metóda indukcie v kontinuu je prevedením klasickej metódy úplnej indukcie z množiny prirodzených čísel na uzavretý interval.

Klasickú metódu úplnej indukcie používame, ako vieme, spravidla vtedy, ak máme ku každému prirodzenému číslu n priradený istý výrok V_n a ak ide o to dokázať, že všetky výroky

$$V_1, V_2, V_3, \dots \qquad (1)$$

sú správne. Postupujeme tým spôsobom, že dokážeme 1. správnosť výroku V_1, 2. že pre každé n (≥ 2), pre ktoré sú správne výroky $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$, je správny i výrok V_n. Že potom všetky výroky (1) sú správne, plynie z tejto úvahy:

Ak tomu tak nie je, sú nesprávne výroky priradené k istým prirodzeným číslam a z nich jedno, označme ho m, je najmenšie.

Pretože platí 1., je $m > 1$. Podľa definície čísla m sú výroky $V_1, V_2, \dots, V_{m-1}$ správne, avšak výrok V_m je nesprávny. To však je spor, pretože platí 2.

Majme teraz ku každému číslu x z ľubovoľného kompaktného intervalu $[a, b]$ priradený nejaký výrok V_x. Chceme dokázať, že všetky výroky, priradené k jednotlivým číslam $x \in [a, b]$ sú správne.

Pokúsme sa previesť uvedenú klasickú metódu na tento prípad. Postupujúc analogicky, najprv dokážeme správnosť výroku V_a. Potom by sme mali dokázať, že pre každé $x \in [a, b)$, pre ktoré sú správne všetky výroky priradené k jednotlivým číslam intervalu $[a, x]$, je správny aj výrok, priradený k číslu najbližšie väčšiemu než x. Avšak to nejde, nakoľko také najbližšie väčšie číslo neexistuje.

Tento spôsob prenesenia metódy úplnej indukcie z množiny prirodzených čísel na náš interval teda sklame. Avšak podstatnú časť tejto metódy môžeme preniesť, ak ju trocha inak formulujeme, a to takto:

Ak máme dokázať, že všetky výroky (1) sú správne, dokážeme najprv správnosť výroku V_1. Ak nie sú všetky výroky (1) správne, sú nesprávne výroky priradené k istým prirodzeným číslam a z nich jedno, označme ho m, je najmenšie.

Pretože výrok V_1 je správny, je $m > 1$. Podľa definície čísla m, sú výroky $V_1, V_2, \dots V_{m-1}$ správne, avšak výrok V_m je nesprávny. Z tohto úsudku sa snažíme odvodiť spor. (Spor dostaneme napr. vtedy, keď dokážeme, že pre každé prirodzené číslo n (≥ 2), pre ktoré sú správne výroky $V_1, V_2, \dots, V_{n-1}$, je správny i výrok V_n.)

Pri tejto formulácii je prenesenie metódy úplnej indukcie na uzavretý interval jednoduché:

Ak máme dokázať, že všetky výroky V_x priradené k jednotlivým číslam $x \in [a, b]$ sú správne, dokážeme najprv správnosť výroku V_a. Ak nie sú všetky výroky správne, sú nesprávne výroky priradené k určitým číslam intervalu $[a, b]$ a množina týchto čísel má dolnú hranicu $c \in [a, b]$. Je buď $a < c < b$, alebo $c = a$, alebo $c = b$. Z definície čísla c vyplýva:

V prípade $a < c < b$ sú všetky výroky V_x pre $x \in [a, c)$ správne a výrok V_c je alebo nie je správny; ak je správny, potom v každom rýdzom okolí sprava čísla c existuje aspoň jedno číslo x, pre ktoré výrok V_x je nesprávny.

V prípade $c = a$ existuje v každom rýdzom okolí sprava čísla c aspoň jedno číslo x také, že výrok V_x je nesprávny.

V prípade $c = b$, je výrok V_b nesprávny.

Z týchto úsudkov sa snažíme odvodiť spor.

24. Aplikácia metódy indukcie v kontinuu na dôkaz nerovnosti

$f(x) \leq g(x)$

Nech f, g sú funkcie spojité a majú deriváde v nejakom intervale $[a, b]$.

Máme dokázať, že platí:

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{pre} \quad x \in [a, b] \tag{1}$$

pričom znamienko $=$ má platnosť len pre $x = a$.

Použime k tomu metódu indukcie v kontinuu.

Usudzujeme takto:

Predovšetkým zistíme, že pre $x = a$ tvrdenie $f(a) = g(a)$ platí.

Ak neplatí nerovnosť $f(x) < g(x)$ vo všetkých číslach $x \in (a, b]$ má množina čísel, v ktorých nerovnosť neplatí, dolnú hranicu $c \in [a, b]$.

1. Nech $a \leq c < b$. V každom rýzdom okolí čísla c sprava existuje bod x, v ktorom naša nerovnosť neplatí. Teda existuje postupnosť čísel $\{x_\alpha\}_{\alpha=1}^{\infty}$ konvergujúca k c taká, že $c < x_\alpha$ a pre každé x_α je

$$f(x_\alpha) \geq g(x_\alpha)$$

Odtiaľ vzhľadom na spojitosť funkcií f, g vyplýva

$$f(c) \geq g(c)$$

Ak $a = c$ máme, ako sme už zistili, $f(c) = g(x)$. Ak $a < c$, máme pre $x \in (a, c)$: $f(x) < g(x)$ a odtiaľ vzhľadom na spojitosť funkcií f, g vyplýva $f(c) \leq g(c)$ a teda opäť $f(c) = g(c)$.

Máme teda

$$\frac{f(x_\alpha) - f(c)}{x_\alpha - c} \geq \frac{g(x_\alpha) - g(c)}{x_\alpha - c}$$

a odtiaľ limitným prechodom $x_\alpha \to c$ dostaneme

$f'(c) \geq g'(c)$.

V čísle c platia teda vzťahy:

$$f(c) = g(c), \quad f'(c) \geq g'(c) \tag{2}$$

pritom v prípade $c = a$ ide o deriváciu sprava.

2. Nech $c = b$. Potom pre $x \in (a, b)$ je $f(x) < g(x)$, z čoho opäť vzhľadom na spojitosť funkcií f, g vyplýva $f(c) \leq g(c)$, avšak $f(c) \geq g(c)$. Teda je $f(c) = g(c)$. Okrem toho je pre $x \in (a, c)$:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{g(x) - g(c)}{x - c}$$

a teda tiež

$$f'(c) \geq g'(c)$$

takže v čísle c platia opäť vzťahy (2), pričom ide o deriváciu zľava.

Vidíme, že k prevedeniu dôkazu platnosti vzorca (1) stačí dokázať, že platí rovnosť $f(a) = g(a)$ a že vzťahy (2) spolu s vlastnosťami funkcií f, g obsahujú spor.

25. Porovnávacie teorémy

Nech sú dané dve diferenciálne rovnice,

$$\text{(a)} \quad y' = f(x, y); \quad Y' = F(x, Y) \quad \text{(A)}$$

ktoré majú spoločný nejaký definičný obor σ. Ak v niektorom bode $(x, y) \in \sigma$ platí nerovnosť $f(x, y) < F(x, y)$ alebo $f(x,y) \leq F(x, y)$, spĺňajú v tomto bode smernice dotyčníc každých dvoch int. kriviek d. rovníc (a), (A) prechádzajúcich bodom (x, y), pokiaľ existujú, tú istú nerovnosť. Z toho môžeme očakávať, že ak jedna alebo druhá nerovnosť platí v každom bode oboru σ, majú int. krivky d. rovníc (a), (A) prechádzajúce ľubovoľným bodom $(\xi, \eta) \in \sigma$, pokiaľ existujú, túto vzájomnú polohu:

Časti int. kriviek d. rovnice (a) vpravo (vľavo) od bodu (ξ, η) ležia pod (nad) príslušnými časťami int. kriviek d. rovnice (A), alebo aspoň nie sú nad (pod) nimi pokiaľ, pravda, tieto časti existujú. Porovnávacie teorémy vyjadrujú presný popis tejto situácie.

<u>Prvá porovnávacia teoréma</u>. Nech v každom bode $(x, y) \in \sigma$ platí nerovnosť

$$f(x, y) < F(x, y)$$

Potom každé dva integrály y, Y d. rovníc (a), (A) definované v nejakom spoločnom intervale j, prechádzajúce spoločným bodom $(\xi, \eta) \in \sigma$, spĺňajú v každom čísle $x \in j$ nerovnosti:

$$y(x) > Y(x) \quad \text{pre} \quad x < \xi$$

$$y(x) < Y(x) \quad \text{pre} \quad x > \xi$$

Obsah tejto vety môžeme názorne vyjadriť tým, že za uvedeného predpokladu majú každé dve int. krivky y, Y d. rovníc (a), (A) prechádzajúce tým istým bodom (ξ, η) spoločný práve len tento bod; vľavo od bodu (ξ, η) leží krivka y nad krivkou Y, vpravo od nej krivka Y nad krivkou y, pokiaľ, pravda, tieto časti kriviek y, Y existujú.

Nech teda y, Y sú ľubovoľné integrály d. rovníc (a), (A) definované v nejakom spoločnom intervale j, prechádzajúce spoločným bodom $(\xi, \eta) \in \sigma$. V dôkaze sa môžeme obmedziť na zistenie, že pre $\xi < x \in j$ je $y(x) < Y(x)$. Zvyšujúca časť dôkazu sa prevedie na tento prípad tým, že sa d. rovnice (a), (A) transformujú substitúciami $X = -x$, $z = y$; $X = -x$, $Z = Y$.

Nech $(\xi <)\ x \in j$ je ľubovoľné číslo. Zrejme stačí zistiť platnosť nerovnosti

$$y(t) < Y(t) \quad \text{pre} \quad t \in (\xi, x)$$

Podľa predpokladu máme $(\eta =)\ y(\xi)$ a $Y(\xi)$.

Pripustíme, že nerovnosť $y(t) < Y(t)$ neplatí vo všetkých číslach $t \in (\xi, x)$. Z výsledkov v predchádzajúcom odseku usudzujeme, že existuje číslo $c \in [\xi, x]$ spĺňajúce vzorce:

$$y(c) = Y(c)$$

$$y'(c) \geqq Y'(c)$$

pričom v prípade $c = \xi$ $(c = x)$ ide o deriváciu sprava (zľava). Z týchto vzorcov a z toho, že funkcie y, Y vyhovujú d. rovniciam (a), (A), vychádza:

$$f\big(c, y(c)\big) = y'(c) \geqq Y'(c) = F\big(c, Y(c)\big) = F\big(c, y(c)\big)$$

takže máme:

$$f\big(c, y(c)\big) \geqq F\big(c, y(c)\big)$$

Táto nerovnosť nie je možná, lebo podľa predpokladu je v každom bode oboru σ a teda i v bode $\big(c, y(c)\big)$ hodnota funkcia f menšia ako hodnota funkcie F. Tým je teoréma dokázaná.

Druhá porovnávacia teoréma. V tejto teoréme sú oproti prvej porovnávacej teoréme predpoklady rozšírené tým, že sa v každom bode $(x, y) \in \sigma$ pripúšťa platnosť nerovnosti $f(x, y) \leqq F(x, y)$, alebo nerovnosti $f(x, y) \geqq F(x, y)$, avšak súčasne sú obmedzené požiadavkou spojitosti jednej z oboch funkcií napr. funkcie F.

Dôkaz druhej porovnávacej teorémy vyžaduje omnoho hlbšie úvahy než v predchádzajúcom prípade. Tu sa obmedzíme len na popis situácie, v ktorej druhá porovnávacia teoréma platí, avšak od dôkazu upustíme.

Nech $(\xi, \eta) \in \sigma$ značí ľubovoľný bod.

Vychádzame z nasledujúcej situácie:

Majme ohraničený interval k obsahujúci číslo ξ, kompaktnú množinu $K \subset \sigma$, obsahujúcu bod (ξ, η), ďalej postupnosť funkcií $F_\alpha(x,y)$ definovaných aspoň na množine K a postupnosť bodov $(\xi_\alpha, \eta_\alpha) \in K$ s limitou (ξ, η), pričom je $\xi_\alpha \in k$, $\alpha = 1, 2, \ldots.$

Predpokladajme, že tieto útvary sú v nasledujúcich vzťahoch:

1. Funkcia F je na množine K spojitá a d. rovnica (A) má v bode (ξ, η) dolný (horný) zložený integrál h_F (H_F) definovaný v intervale k;

2. pre $(x, y) \in K$, $\alpha = 1, 2, \ldots$, platí nerovnosť:

$$F(x, y) < F_\alpha(x, y), \quad \big(F(x, y)\big) > F_\alpha(x, y)\big);$$

3. postupnosť funkcií F_α konverguje na množine K rovnomerne k funkcii F;

4. každá d. rovnica $y' = F_\alpha(x, y)$, $\alpha = 1, 2, \ldots$ má integrál y_α prechádzajúci bodom $(\xi_\alpha, \eta_\alpha)$, definovaný v intervale k a int. krivka y_α leží v množine K.

Za týchto predpokladov platí druhá porovnávacia teoréma: Nech v každom bode $(x, y) \in \sigma$, platí nerovnosť

$$f(x, y) \leqq F(x, y) \quad \big(f(x, y) \geqq F(x, y)\big)$$

Potom každý integrál y d. rovnice (a) prechádzajúci bodom (ξ, η), definovaný v nejakom intervale j spĺňa v každom čísle $x \in j \cap k$ nerovnosť:

$$y(x) \geqq h_F(x) \text{ pre } x \leqq \xi \;;\; y(x) \leqq h_F(x) \text{ pre } x \geqq \xi$$

$$\big(y(x) \leqq H_F(x) \text{ pre } x \leqq \xi \;;\; y(x) \geqq H_F(x) \text{ pre } x \geqq \xi\big)$$

Obsah tejto vety môžeme názorne vyjadriť tým, že za uvedených predpokladov, v prípade $f \leqq F$, $(f \geqq F)$, leží každá int. krivka y d. rovnice (a) prechádzajúca bodom (ξ, η), vľavo od tohto bodu nad (pod) a vpravo od nebo pod (nad) int. krivkou h_F (H_F), pokiaľ samozrejme tieto časti kriviek y, h_F, H_F existujú.