In der Tat, die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ ist nach ihrer Konstruktion eine Verfeinerung von $\bar{A}$ und nach der Aussage a) auch eine solche von $\bar{B}$. Die Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$ stellt demnach eine gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ dar. Es sei nun $\bar{Y}$ eine beliebige gemeinsame Verfeinerung von $\bar{A}, \bar{B}$. Dann haben wir die Gleichheiten

$$(\bar{Y}, \bar{A}) = \bar{Y}, \qquad (\bar{Y}, \bar{B}) = \bar{Y}$$

und ferner, nach der Aussage c),

$$(\bar{Y},(\bar{A}, \bar{B})) = ((\bar{Y}, \bar{A}), \bar{B}) = (\bar{Y}, \bar{B}) = \bar{Y}.$$

Damit ist gezeigt, daß die Zerlegung $\bar{Y}$ eine Verfeinerung von $(\bar{A}, \bar{B})$ darstellt.

Jede gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ ist demnach eine Verfeinerung der Zerlegung $(\bar{A}, \bar{B})$, die selbst eine gemeinsame Verfeinerung von $\bar{A}$, $\bar{B}$ ist. Wir sehen, daß *die Zerlegung* $(\bar{A}, \bar{B})$ *die größte gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *darstellt.*

6. Beziehungen zwischen der kleinsten gemeinsamen Überdeckung und der größten gemeinsamen Verfeinerung zweier Zerlegungen. Es seien $\bar{A}$, $\bar{B}$ Zerlegungen auf G.

Zwischen der kleinsten gemeinsamen Überdeckung $[\bar{A}, \bar{B}]$ *und der größten gemeinsamen Verfeinerung* $(\bar{A}, \bar{B})$ *der Zerlegungen* $\bar{A}$, $\bar{B}$ *bestehen die Beziehungen*

$$[\bar{A},(\bar{A}, \bar{B})] = \bar{A}, \qquad (\bar{A},[\bar{A}, \bar{B}]) = \bar{A}.$$

Die Behauptung drückt nämlich die Beziehungen $\bar{A} \geqq (\bar{A}, \bar{B})$ und $[\bar{A}, \bar{B}] \geqq \bar{A}$ aus (Nr. 4 und 5).

7. Übungsaufgaben.

1. Für beliebige Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{B}$ auf G folgt aus $\bar{a} \in \bar{A}, \bar{b} \in \bar{B}, \boldsymbol{s}(\bar{a} \sqsubset \bar{B}) = \boldsymbol{s}(\bar{b} \sqsubset \bar{A}) = \bar{u}$ die Beziehung $\bar{u} \in [\bar{A}, \bar{B}]$.

2. Für je drei der Bedingung $\bar{X} \geqq \bar{A}$ genügende Zerlegungen $\bar{X}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ auf G gilt

a) $[\bar{X}, \bar{B}] \geqq [\bar{A}, \bar{B}]$, $(\bar{X}, \bar{B}) \geqq (\bar{A}, \bar{B})$; b) $(\bar{X},[\bar{A}, \bar{B}]) \geqq [\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})]$.

3. Der Leser möge an einem Beispiel zeigen, daß in der Beziehung b) von Aufgabe 2 das Gleichheitszeichen nicht zu gelten braucht.

§ 4. Spezielle Zerlegungen

In diesem Paragraphen werden wir uns mit einigen für die weiteren Ausführungen wichtigen Tatsachen befassen, in denen gewisse, aus Zerlegungen in bzw. auf der Menge G bestehende Gebilde mit speziellen gegenseitigen Beziehungen auftreten.

1. Halbverknüpfte und verknüpfte Zerlegungen. Es seien $\bar{A}$, $\bar{C}$ Zerlegungen in G.

Definitionen. Wir nennen die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ *halbverknüpft* und sagen, $\bar{A}(\bar{C})$ *sei mit* $\bar{C}(\bar{A})$ *halbverknüpft*, wenn es zu jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ höchstens ein mit ihm inzidentes Element $\bar{c} \in \bar{C}$ und zu jedem Element $\bar{c} \in \bar{C}$ höchstens ein mit ihm inzidentes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ gibt und wenn wenigstens für ein Paar von Elementen $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ die Inzidenz tatsächlich auftritt.

Wir nennen die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ *verknüpft* und sagen, $\bar{A}(\bar{C})$ *sei mit* $\bar{C}(\bar{A})$ *verknüpft*, wenn es zu jedem Element $\bar{a} \in \bar{A}$ genau ein mit ihm inzidentes Element $\bar{c} \in \bar{C}$ und zu jedem Element $\bar{c} \in \bar{C}$ genau ein mit ihm inzidentes Element $\bar{a} \in \bar{A}$ gibt.

Aus diesen Definitionen geht zunächst hervor, daß *zwei verknüpfte Zerlegungen stets halbverknüpft sind.*

Als Beispiel von verknüpften Zerlegungen wollen wir etwa das folgende anführen: Wenn für eine Teilmenge $X \subset G$ und eine Zerlegung $\bar{Y}$ in G die Beziehung $X \cap \mathbf{s}\bar{Y} \neq \emptyset$ besteht, so stellen die Hülle $X \sqsubset \bar{Y}$ und die Durchdringung $\bar{Y} \sqcap X$ verknüpfte Zerlegungen dar.

Wir wollen uns nun mit Eigenschaften von halbverknüpften und verknüpften Zerlegungen befassen.

Zunächst bemerken wir: Wenn die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ halbverknüpft sind, so gilt die Beziehung $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$; denn dann gibt es wenigstens zwei miteinander inzidente Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{c} \in \bar{C}$, so daß $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \supset \bar{a} \cap \bar{c} \neq \emptyset$ gilt.

Wir setzen im weiteren die Gültigkeit der Beziehung $\mathbf{s}\bar{A} \cap \mathbf{s}\bar{C} \neq \emptyset$ voraus. Der Einfachheit halber setzen wir $\mathbf{s}\bar{A} = A$, $\mathbf{s}\bar{C} = C$, so daß $A \cap C \neq \emptyset$ ist.

Die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ *sind genau dann halbverknüpft, wenn die beiden Durchdringungen* $\bar{A} \sqcap C$, $\bar{C} \sqcap A$ *zusammenfallen, also* $\bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A$ *ist.*

Beweis. a) Es seien $\bar{A}$, $\bar{C}$ halbverknüpft. Dann gelten zunächst wegen $A \cap C \neq \emptyset$ die Beziehungen $\bar{A} \sqcap C \neq \emptyset \neq \bar{C} \sqcap A$. Man betrachte z. B. ein Element $\bar{a}' \in \bar{A} \sqcap C$, so daß $\bar{a}' = \bar{a} \cap C$ gilt, wobei $\bar{a}$ ein geeignetes Element in $\bar{A}$ bedeutet. Wegen $\bar{a}' \subset C$ ist das Element $\bar{a}$ wenigstens mit einem und folglich nach Voraussetzung mit genau einem Element $\bar{c} \in \bar{C}$ inzident; $\bar{a}$ ist offenbar das einzige mit $\bar{c}$ inzidente Element in $\bar{A}$. Es gelten also die Beziehungen $\bar{a}' = \bar{a} \cap \bar{c} = \bar{c} \cap A \in \bar{C} \sqcap A$. Damit ist die Gültigkeit der Beziehung $\bar{A} \sqcap C \subset \bar{C} \sqcap A$ festgestellt. Offenbar gilt zugleich die Beziehung $\supset$ und folglich auch das Gleichheitszeichen.

b) Es sei $\bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A$ und $\bar{a} \in \bar{A}$ ein beliebiges Element. Dieses Element $\bar{a}$ ist entweder mit keinem oder wenigstens mit einem Element in $\bar{C}$ inzident. Ist es mit $\bar{c}_1$, $\bar{c}_2 \in \bar{C}$ inzident, so gilt $\bar{a} \cap (\bar{c}_1 \cup \bar{c}_2) \subset \bar{a} \cap C \in \bar{C} \sqcap A$, und es gibt ein Element $\bar{c} \in \bar{C}$, für das $\bar{a} \cap (\bar{c}_1 \cup \bar{c}_2) \subset A \cap \bar{c}$ ist. Daraus folgt, da je zwei verschiedene Elemente in $\bar{C}$ disjunkt sind, $\bar{c}_1 = \bar{c}_2 = \bar{c}$. Damit ist gezeigt, daß jedes Element in $\bar{A}$ höchstens mit einem Element in $\bar{C}$ inzident ist. Offenbar ist gleichzeitig auch jedes Element in $\bar{C}$ mit höchstens einem Element in $\bar{A}$ inzident. Wegen $A \cap C \neq \emptyset$ tritt die Inzidenz wenigstens für ein Paar von Elementen $\bar{a} \in \bar{A}$, $\bar{c} \in \bar{C}$ tatsächlich auf. Damit ist der Satz bewiesen.

Die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ *sind genau dann halbverknüpft, wenn die beiden Hüllen* $(\mathrm{H}\bar{A} =)\, C \sqsubset \bar{A}$, $(\mathrm{H}\bar{C} =)\, A \sqsubset \bar{C}$ *verknüpft sind.*

Beweis. a) Es seien $\bar{A}$, $\bar{C}$ halbverknüpft. Dann gelten zunächst wegen $A \cap C \neq \emptyset$ die Beziehungen $\mathrm{H}\bar{A} \neq \emptyset \neq \mathrm{H}\bar{C}$. Man betrachte z. B. ein Element $\bar{a} \in \mathrm{H}\bar{A}$, so daß $\bar{a}$ wenigstens mit einem und folglich, nach der Voraussetzung, genau mit einem Element $\bar{c} \in \bar{C}$ inzident ist. Dieses Element $\bar{c}$ gehört offenbar der Hülle $\mathrm{H}\bar{C}$ an, also $\bar{c} \in \mathrm{H}\bar{C}$, und ist das einzige mit $\bar{a}$ inzidente Element in $\mathrm{H}\bar{C}$. Wir sehen, daß jedes Element in $\mathrm{H}\bar{A}$ genau mit einem Element in $\mathrm{H}\bar{C}$ inzident ist. Offenbar ist auch jedes Element in $\mathrm{H}\bar{C}$ genau mit einem Element in $\mathrm{H}\bar{A}$ inzident. Somit ist gezeigt, daß die beiden Hüllen $\mathrm{H}\bar{A}$, $\mathrm{H}\bar{C}$ verknüpft sind.

b) Die beiden Hüllen $\mathrm{H}\bar{A}$, $\mathrm{H}\bar{C}$ seien verknüpft. Dann ist ein beliebiges Element $\bar{a} \in \bar{A}$ entweder mit keinem oder wenigstens mit einem Element von $\bar{C}$ inzident. Im zweiten Fall gehört $\bar{a}$ der Hülle $\mathrm{H}\bar{A}$ an und ist folglich nach Voraussetzung mit genau einem Element $\bar{c} \in \mathrm{H}\bar{C}$ inzident. Offenbar gibt es außerhalb der Hülle $\mathrm{H}\bar{C}$ kein mit $\bar{a}$ inzidentes Element von $\bar{C}$. Somit ist gezeigt, daß jedes Element in $\bar{A}$ höchstens mit einem Element in $\bar{C}$ inzidiert. Aus analogen Gründen ist auch jedes Element in $\bar{C}$ höchstens mit einem Element in $\bar{A}$ inzident. Wir sehen also, daß die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ halbverknüpft sind.

Die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ sind genau dann verknüpft, wenn die folgenden Beziehungen gleichzeitig erfüllt sind:

$$\bar{A} \sqcap C = \bar{C} \sqcap A, \tag{1}$$

$$A = \mathbf{s}(C \sqsubset \bar{A}), \qquad C = \mathbf{s}(A \sqsubset \bar{C}). \tag{2}$$

Beweis. a) Es seien $\bar{A}$, $\bar{C}$ verknüpft. Dann ist jedes Element in $\bar{A}\,(\bar{C})$ mit höchstens einem und zugleich mit wenigstens einem Element in $\bar{C}\,(\bar{A})$ inzident. Folglich gilt nach dem obigen Resultat die Gleichheit (1) und zugleich wegen § 2, Nr. 6,6 die erste (zweite) Gleichheit (2).

b) Wir nehmen nun an, die Gleichheiten (1), (2) seien erfüllt. Wir wenden dieselben Sätze wie in a) an und sehen, daß die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ verknüpft sind.

Wenn die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ verknüpft sind, so ist jedes Element von $\bar{A}$ bzw. $\bar{C}$ mit wenigstens (und zugleich höchstens) einem Element von $\bar{C}$ bzw. $\bar{A}$ inzident. Folglich gelten die Gleichheiten $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ (§ 2, Nr. 6,6).

Wir setzen im weiteren voraus, daß die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ diese Gleichheiten $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ befriedigen; unter dieser Voraussetzung gilt natürlich auch die oben angenommene Beziehung $A \cap C \neq \emptyset$.

Wir betrachten nun eine gemeinsame Überdeckung $\bar{B}$ der beiden Zerlegungen $\bar{A} \sqcap C$, $\bar{C} \sqcap A$ der Menge $A \cap C$ und definieren die Zerlegung $\bar{\bar{A}}\;(\bar{\bar{C}})$ von $\bar{A}\,(\bar{C})$ in folgender Weise: Jedes Element in $\bar{\bar{A}}\,(\bar{\bar{C}})$ ist die Menge aller Elemente $\bar{a} \in \bar{A}$ $(\bar{c} \in \bar{C})$, die je mit demselben Element in $\bar{B}$ inzident sind. Es sei $\mathring{A}$ $(\mathring{C})$ die durch $\bar{\bar{A}}$ $(\bar{\bar{C}})$ erzwungene Überdeckung von $\bar{A}$ $(\bar{C})$; es ist also $\mathbf{U}\,\bar{a} \in \mathring{A}$ $(\mathbf{U}\,\bar{c} \in \mathring{C})$ genau dann, wenn $\mathbf{U}(\bar{a} \cap C) \in \bar{B}$ $(\mathbf{U}(\bar{c} \cap A) \in \bar{B})$ gilt.

Durch dieses Verfahren haben wir mit Hilfe von $\bar{B}$ die Überdeckungen $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ der Zerlegungen $\bar{A}$ bzw. $\bar{C}$ konstruiert. Wir sagen, die Überdeckungen $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ von $\bar{A}$, $\bar{C}$ seien durch die gemeinsame Überdeckung $\bar{B}$ der beiden Durchdringungen $\bar{A} \sqcap C$, $\bar{C} \sqcap A$ *erzwungen.* Wir möchten betonen, daß unsere Konstruktion auf der Gültigkeit der beiden Beziehungen $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$, $\bar{C} = \bar{A} \sqsubset \bar{C}$ beruht. Offenbar bestehen die Gleichheiten $\mathbf{s}\mathring{A} = \mathbf{s}\bar{A}$ $(= A)$, $\mathbf{s}\mathring{C} = \mathbf{s}\bar{C}$ $(= C)$.

Es gilt nun: *Die Zerlegungen $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ sind verknüpft und durchdringen sich in der Zerlegung $\bar{B}$, also $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{B}$.*

Beweis. Aus $\bar{A} = \bar{C} \sqsubset \bar{A}$ folgt $\mathring{A} = \mathring{C} \sqsubset \mathring{A}$ und ähnlich $\mathring{C} = \mathring{A} \sqsubset \mathring{C}$. Es genügt zu zeigen, daß

$$\mathring{A} \sqcap C = \mathring{C} \sqcap A = \bar{B}$$

gilt. In der Tat, wenn diese Beziehungen erfüllt sind, so sind nach dem obigen Ergebnis die $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ verknüpft, und wir erhalten (§ 2, Nr. 3) die Gleichheiten $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = (\mathring{A} \sqcap C) \sqcap (\mathring{C} \sqcap A) = \bar{B} \sqcap \bar{B} = \bar{B}$.

Nun gibt es zu jedem $\mathring{a}' \in \mathring{A} \sqcap C$ geeignete Elemente $\mathring{a} = \mathbf{U}\bar{a}$, $\mathring{a} \in \mathring{A}$, $\bar{a} \in \bar{A}$ derart, daß $\mathring{a}' = \mathring{a} \cap C = (\mathbf{U}\bar{a}) \cap C = \mathbf{U}(\bar{a} \cap C) \in \bar{B}$ ist. Daraus folgt $\mathring{A} \sqcap C \subset \bar{B}$. Umgekehrt ist jedes Element $\bar{b} \in \bar{B}$ von der Form $\bar{b} = \mathbf{U}(\bar{a} \cap C)$ mit $\bar{a} \in \bar{A}$, $\mathring{a} = \mathbf{U}\bar{a} \in \mathring{A}$, und es gilt

$$\bar{b} = \mathbf{U}(\bar{a} \cap C) = (\mathbf{U}\bar{a}) \cap C = \mathring{a} \cap C \in \mathring{A} \sqcap C.$$

Daraus folgt $\bar{B} \subset \mathring{A} \sqcap C$. Wir haben also $\mathring{A} \sqcap C = \bar{B}$ und aus analogen Gründen $\mathring{C} \sqcap A = \bar{B}$.

2. Adjungierte Zerlegungen. Es seien $\bar{A}$, $\bar{C}$ Zerlegungen und B, D Untermengen in G. Wir nehmen an, daß $B \in \bar{A}$, $D \in \bar{C}$ und $B \cap D \neq \emptyset$ ist, und setzen $A = \mathbf{s}\bar{A}$, $C = \mathbf{s}\bar{C}$.

Aus den Voraussetzungen folgt $B \in D \sqsubset \bar{A}$, $D \in B \sqsubset \bar{C}$, und wegen $B \subset A$, $D \subset C$ haben wir $\emptyset \neq B \cap D \subset B \cap C$, $D \cap A$. Also sind (vgl. § 2, Nr. 6,5)

$$D \sqsubset \bar{A} \sqcap C, \qquad B \sqsubset \bar{C} \sqcap A$$

Zerlegungen in G.

Wenn für diese Zerlegungen die Gleichheit

$$\mathbf{s}(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = \mathbf{s}(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A) \tag{1}$$

gilt, so sagen wir, *die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ sind in bezug auf B, D adjungiert* oder *die Zerlegung $\bar{A}$ $(\bar{C})$ ist zu $\bar{C}$ $(\bar{A})$ in bezug auf B, D adjungiert.*

Wegen $D \sqsubset \bar{A} \sqcap C = (D \cap A) \sqsubset (\bar{A} \sqcap C)$, $B \sqsubset \bar{C} \sqcap A = (B \cap C) \sqsubset (\bar{C} \sqcap A)$ kann (1) durch

$$\mathbf{s}((D \cap A) \sqsubset (\bar{A} \sqcap C)) = \mathbf{s}((B \cap C) \sqsubset (\bar{C} \sqcap A)) \tag{1'}$$

ersetzt werden.

Zum Beispiel sind die Zerlegungen $\bar{A}$, $\bar{C}$ in bezug auf B, D adjungiert, wenn $\bar{A}$ die größte oder die kleinste Zerlegung von A ist.

Wir setzen nun voraus, daß $\bar{A}$, $\bar{C}$ in bezug auf B, D adjungiert sind. Dann sind

$$\bar{A}_1 = C \sqsubset \bar{A}, \qquad \bar{A}_2 = D \sqsubset \bar{A},$$
$$\bar{C}_1 = A \sqsubset \bar{C}, \qquad \bar{C}_2 = B \sqsubset \bar{C}$$

Zerlegungen in G. Wir setzen $A_1 = \mathbf{s}\bar{A}_1$, $A_2 = \mathbf{s}\bar{A}_2$, $C_1 = \mathbf{s}\bar{C}_1$, $C_2 = \mathbf{s}\bar{C}_2$ und erhalten die Beziehungen

$$\bar{A} \supset \bar{A}_1 \supset \bar{A}_2 \supset \{B\}, \qquad A \supset A_1 \supset A_2 \supset B,$$
$$\bar{C} \supset \bar{C}_1 \supset \bar{C}_2 \supset \{D\}, \qquad C \supset C_1 \supset C_2 \supset D.$$

Nun wollen wir zeigen, daß *es verknüpfte Überdeckungen* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ *von* $\bar{A}_1$, $\bar{C}_1$ *mit der Eigenschaft* $A_2 \in \mathring{A}$, $C_2 \in \mathring{C}$ *gibt;* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ sind durch die in Teil a) des folgenden Beweises beschriebene Konstruktion definiert. *Die Mengen* A_2, C_2 *sind inzident.*

Beweis. a) Jedes Element in $\bar{A}_1$ ($\bar{C}_1$) ist in $\bar{A}$ ($\bar{C}$) enthalten und ist mit $C(A)$, also auch mit einem mit $A(C)$ inzidenten Element in $\bar{C}(\bar{A})$ inzident; dieses Element in $\bar{C}(\bar{A})$ ist also in $\bar{C}_1(\bar{A}_1)$ enthalten. Folglich haben wir

$$\bar{A}_1 = \bar{C}_1 \sqsubset \bar{A}_1, \qquad \bar{C}_1 = \bar{A}_1 \sqsubset \bar{C}_1.$$

Ebenso leicht ist es einzusehen, daß $A_1 \cap C_1 = A \cap C$ ist. Folglich sind die $A_1 \sqcap \bar{C}_1$, $C_1 \sqcap \bar{A}_1$ Zerlegungen auf $A \cap C$. Wir bezeichnen mit $\bar{\bar{U}}$ ihre kleinste gemeinsame Überdeckung. *Die* $\mathring{A}$, $\mathring{C}$ *sind die durch diese kleinste gemeinsame Überdeckung* $\bar{\bar{U}}$ *der beiden Durchdringungen* $A_1 \sqcap \bar{C}_1$, $C_1 \sqcap \bar{A}_1$ *erzwungenen Überdeckungen von* $\bar{A}_1$, $\bar{C}_1$. Es ist also $\mathring{A} \sqcap \mathring{C} = \bar{\bar{U}}$, und jedes Element in $\mathring{A}(\mathring{C})$ stellt die Summe aller je mit einem Element in $\bar{\bar{U}}$ inzidenten Elemente in $\bar{A}_1(\bar{C}_1)$ dar.

b) Es ist $A_2 \in \mathring{A}$, $C_2 \in \mathring{C}$. In der Tat, aus den Beziehungen $B \in \bar{A}$, $D \in \bar{C}$ folgt

$$C \cap B \in C \sqcap \bar{A}, \qquad A \cap D \in A \sqcap \bar{C},$$

und da die $\bar{A}$, $\bar{C}$ in bezug auf B, D adjungiert sind, gilt (1′). Es ist also $\bar{u} \in \bar{\bar{U}}$ nach § 3, Nr. 7,1, wobei $\bar{u}$ die beiderseits in (1′) stehende Menge bedeutet. Die einzelnen Elemente in $\mathring{A}(\mathring{C})$ sind die Summen aller je mit einem Element in $\bar{\bar{U}}$ inzidenten Elemente in $\bar{A}_1(\bar{C}_1)$. Zur Feststellung der Beziehung $A_2 \in \mathring{A}$ ($C_2 \in \mathring{C}$) genügt es also zu beweisen, daß $A_2(C_2)$ die Summe aller mit $\bar{u}$ inzidenten Elemente in $\bar{A}_1(\bar{C}_1)$ ist. Nun ist aber

$$\bar{u} = \mathbf{s}(D \sqsubset \bar{A} \sqcap C) = \mathbf{s}(\bar{A}_2 \sqcap C) = A_2 \cap C.$$

Ein Element in $\bar{A}_1$ ist zugleich in $\bar{A}$ enthalten und ist inzident mit C; es ist gleichzeitig dann und nur dann in $\bar{A}_2$ enthalten, wenn es sogar mit D, also auch mit $A_2 \cap C = \bar{u}$ inzident ist. Es sind also mit $\bar{u}$ genau diejenigen Elemente in $\bar{A}_1$ inzident, die in $\bar{A}_2$ enthalten sind; ihre Summe ist somit A_2. Ähnlich folgt aus

$$\bar{u} = \mathbf{s}(B \sqsubset \bar{C} \sqcap A) = \mathbf{s}(\bar{C}_2 \sqcap A) = C_2 \cap A,$$

daß die Summe der mit $\bar{u}$ inzidenten Elemente in $\bar{C}_1$ die Menge C_2 ist.

c) Aus $\emptyset \neq B \cap D \subset A_2 \cap C_2$ folgt $A_2 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Der Begriff von adjungierten Zerlegungen kann auf denjenigen von adjungierten Ketten von Zerlegungen erweitert werden.

Es sei $(\emptyset \neq) B \subset A \subset G$, $(\emptyset \neq) D \subset C \subset G$, und

$$([\bar{K}] =) \quad \bar{K}_1 \to \cdots \to \bar{K}_\alpha,$$
$$([\bar{L}] =) \quad \bar{L}_1 \to \cdots \to \bar{L}_\beta$$

seien Ketten von Zerlegungen von A nach B und von C nach D.

Die Ketten $[\bar{K}]$, $[\bar{L}]$ heißen *adjungiert*, wenn a) die Enden von $[\bar{K}]$ und $[\bar{L}]$ dieselben sind, also $A = C$, $B = D$; b) je zwei Glieder $\bar{K}_\gamma$, $\bar{L}_\delta$ von $[\bar{K}]$ bzw. $[\bar{L}]$ in bezug auf $\boldsymbol{s}\bar{K}_{\gamma+1}$, $\boldsymbol{s}\bar{L}_{\delta+1}$ adjungiert sind, und zwar für $\gamma = 1, \ldots, \alpha$ und $\delta = 1, \ldots, \beta$; dabei ist $\boldsymbol{s}\bar{K}_{\alpha+1} = B$, $\boldsymbol{s}L_{\beta+1} = D$.

3. Modulare Zerlegungen. Wir betrachten nun Zerlegungen *auf* der Menge G. Es seien $\bar{X}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$ der Bedingung $\bar{X} \geqq \bar{A}$ genügende Zerlegungen auf G.

Der Leser dürfte festgestellt haben (§ 3, Nr. 7,2), daß die Zerlegung $(\bar{X},[\bar{A}, \bar{B}])$ eine Überdeckung von $[\bar{A},(\bar{X}, \bar{B})]$ darstellt, ohne daß die beiden Zerlegungen gleich zu sein brauchen.

Wenn in speziellen Fällen diese Zerlegungen gleich sind, wenn also

$$[\bar{A},(\bar{X}, \bar{B})] = (\bar{X},[\bar{A}, \bar{B}])$$

ist, so nennen wir die Zerlegung $\bar{B}$ *modular in bezug auf die Zerlegungen* $\bar{X}$, $\bar{A}$ (in dieser Anordnung).

Ist etwa $\bar{X} = \bar{A}$ oder $\bar{X} = \bar{G}_{\max}$, so ist $\bar{B}$ in bezug auf $\bar{X}$, $\bar{A}$ modular.

Wir betrachten nun beliebige, den Bedingungen $\bar{X} \geqq \bar{A}$, $\bar{Y} \geqq \bar{B}$ genügende Zerlegungen $\bar{X}$, $\bar{Y}$ und $\bar{A}$, $\bar{B}$ auf G und setzen voraus, daß die Zerlegung $\bar{B}$ in bezug auf $\bar{X}$, $\bar{A}$ und die Zerlegung $\bar{A}$ in bezug auf $\bar{Y}$, $\bar{B}$ modular sind. Dann gilt

$$(\mathring{A} =) \quad [\bar{A},(\bar{X}, \bar{B})] = (\bar{X},[\bar{A}, \bar{B}]),$$
$$(\mathring{B} =) \quad [\bar{B},(\bar{Y}, \bar{A})] = (\bar{Y},[\bar{B}, \bar{A}]),$$

wobei wir die durch die erste (zweite) Formel definierte Zerlegung auf G mit $\mathring{A}$ $(\mathring{B})$ bezeichnet haben.

In diesem Fall gelten offenbar die Beziehungen

$$\bar{X} \geqq \mathring{A} \geqq \bar{A}, \qquad \bar{Y} \geqq \mathring{B} \geqq \bar{B},$$

und wir sehen, daß $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ die beiden Zerlegungen $\bar{X}$, $\bar{A}$ bzw. $\bar{Y}$, $\bar{B}$ in dem durch diese Formeln definierten Sinn interpolieren.

Ferner verhalten sich die Zerlegungen $\mathring{A}$, $\mathring{B}$ *nach den Formeln*

$$[\mathring{A}, \mathring{B}] = [\bar{A}, \bar{B}], \quad [\bar{X}, \mathring{B}] = [\bar{X}, \bar{B}], \quad [\bar{Y}, \mathring{A}] = [\bar{Y}, \bar{A}], \tag{1}$$
$$(\mathring{A}, \mathring{B}) = (\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A}) = ((\bar{X}, \bar{Y}), [\bar{A}, \bar{B}]). \tag{2}$$

Diese Formeln ergeben sich unmittelbar bei Anwendung der Eigenschaften der kleinsten Überdeckung und der größten Verfeinerung zweier Zerlegungen. Zum Beispiel erhält man die erste Formel von (1) mit Rücksicht auf die

Beziehungen $(\bar{X}, \bar{B}) \leqq \bar{B} \leqq [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]$, $(\bar{Y}, \bar{A}) \leqq \bar{A} \leqq [\bar{A}, \bar{B}]$ folgendermaßen:

$$[\mathring{A}, \mathring{B}] = [[\bar{A}, (\bar{X}, \bar{B})], [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]] = [\bar{A}, [(\bar{X}, \bar{B}), [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]]]$$
$$= [\bar{A}, [\bar{B}, (\bar{Y}, \bar{A})]] = [[\bar{A}, \bar{B}], (\bar{Y}, \bar{A})] = [\bar{A}, \bar{B}];$$

die anderen Formeln findet man auf ähnliche Art.

Die in den obigen Ausführungen besprochenen Eigenschaften der modularen Zerlegungen haben den Charakter „im Großen" oder sind, wie man zu sagen pflegt, global, da sie ohne Bezugnahme auf einzelne Elemente der betrachteten Zerlegungen beschrieben werden können. Außer diesen globalen Eigenschaften ist die folgende, die „lokale" Struktur der modularen Zerlegungen beschreibende Eigenschaft für unsere Zwecke von besonderer Bedeutung:

Für je zwei inzidente Elemente $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$ sind die beiden Hüllen $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$, $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ verknüpft.

Beweis. Es seien $\bar{x} \in \bar{X}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$ inzidente Elemente. Wir betrachten ein Element $\mathring{a} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}$ und wollen zeigen, daß es mit genau einem Element der anderen Hülle inzident ist. Da das Element $\mathring{a} \in \mathring{A}$ mit $\bar{x} \cap \bar{y}$ gemeinsame Punkte besitzt und $\bar{X} \geqq \mathring{A}$ ist, haben wir $\mathring{a} \subset \bar{x}$, $\bar{y} \cap \mathring{a} \neq \emptyset$. Wegen dieser letzten Beziehung kommt $\bar{y} \cap \mathring{a}$ als Element in $(\bar{Y}, \mathring{A})$ vor, und aus der Formel $(\bar{X}, \mathring{B}) = (\bar{Y}, \mathring{A})$ schließen wir auf die Existenz eines der Gleichheit $\bar{x} \cap \mathring{b} = \bar{y} \cap \mathring{a}$ genügenden Elements $\mathring{b} \in \mathring{B}$. Wir sehen, daß das Element $\mathring{b}$ mit $\mathring{a}$ inzident ist: $\mathring{b} \cap \mathring{a} \neq \emptyset$. Da ferner $\mathring{b}$ mit $\bar{x} \cap \bar{y}$ gemeinsame Punkte besitzt, haben wir $\mathring{b} \in (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$. Hiermit ist gezeigt, daß das Element $\mathring{a}$ wenigstens mit dem Element $\mathring{b}$ der Hülle $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ inzident ist. Nun gibt es aber keine weiteren mit $\mathring{a}$ inzidenten Elemente der letztgenannten Hülle, da jedes Element dieser Art in $\bar{y}$ enthalten und mit $\bar{y} \cap \mathring{a} = \bar{x} \cap \mathring{b}$ inzident ist und folglich mit $\mathring{b}$ übereinstimmt. Aus analogen Gründen ist auch jedes Element in $(\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B}$ mit genau einem Element der anderen Hülle inzident. Damit ist der Satz bewiesen.

4. Übungsaufgaben.

1. Zwei endliche verknüpfte Zerlegungen haben dieselbe Anzahl von Elementen.

2. In Zusammenhang mit dem letzten Satz von Nr. 3 möge sich der Leser von der Gültigkeit der folgenden Beziehungen überzeugen:

$$((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}) \sqcap \boldsymbol{s}\, ((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B})) = ((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{B})) \sqcap \boldsymbol{s}\, ((\bar{x} \cap \bar{y}) \sqsubset \mathring{A}) = (\bar{x} \cap \bar{y}) \sqcap [\bar{A}, \bar{B}].$$

§ 5. Komplementäre Zerlegungen

Eine weitere Art von Zerlegungen auf der Menge G (mit speziellen gegenseitigen Beziehungen) stellen die sogenannten komplementären Zerlegungen dar. Wegen der großen Wichtigkeit von komplementären Zerlegungen für