Kateřina Brabcová

Intuicionismus, první setkání

In: Jindřich Bečvář (editor); Eduard Fuchs (editor): Matematika v proměnách věků. I. Sborník. (Czech). Praha: Prometheus, 1998. pp. 169–174.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401618

INTUICIONISMUS, PRVNÍ SETKÁNÍ

KATEŘINA BRABCOVÁ

Když na sklonku roku 1873 německý matematik Georg Cantor pokládal základy nové matematické disciplíny, v jejímž jádru stálo připuštění aktuálního nekonečna do matematických úvah, jistě netušil, jak horké chvíle tím pro sebe a spoustu svých kolegů současnosti i budoucnosti připravuje. Nově vzniklá „teorie množin“ znamenala zásadní převrat v celém matematickém myšlení. Přesto, že nebyla zpočátku přijímána jednoznačně, koncem 19. století „přichází do módy“ a její metody jsou stále více a více přijímány v nejrůznějších oblastech matematiky. Na počátku 20. století pak teorie množin tvořila bázi celé matematiky.

Již na samém konci století 19. však byla objevena v této teorii antinomie. Spočívala v tom, že ordinální číslo dobře uspořádané množiny všech ordinálních čísel je větší než všechna ordinální čísla; že tedy existuje ordinální číslo, které je větší než ono samo. Byla to první antinomie teorie množin. Její objev ale důvěrou matematiků v teorii množin nikterak neotřásl. Převládal totiž názor, že je možné ji snadno odstranit. A kdyby to přece jen možné nebylo, nedotýkala se přece podstaty teorie a tak by bylo možné v případě nutnosti poškozenou část matematiky prostě odříznout .... Záhy po ní se však začaly objevovat antinomie další a další, až ani nejzarytějším optimistům nezbylo než přiznat, že nejen teorie množin, ale i celá matematika na ní vystavěná, je zpochybněna. Tento okamžik znamenal počátek 3. krize matematiky a úsilí vědců se tehdy nutně muselo začít orientovat jediným směrem - k analýze vzniklé situace, zjištění příčin krize a k navrhnutí způsobu jejich odstranění. Nastalo období zvýšeného zájmu o fundamentální problémy matematiky, jakými jsou: charakter matematických důkazů, vztahy mezi matematickým jazykem a matematickým myšlením, původ matematických objektů, úloha logiky v matematickém poznání, vztah logiky a intuice, význam intuice pro získávání nového matematického poznání a jiné. Podle toho, jaký byl přístup jednotlivých matematiků, či skupin matematiků, k těmto problémům a následná, z něj vyplývající, řešení krize v matematice, pozorujeme zvláště od té doby v matematice několik výrazných směrů či hnutí.

Mým záměrem je pojednat na tomto místě krátce o jednom z tehdy nově se formujících směrů, o intuicionismu. Chtěla bych připomenout okolnosti, za kterých se ustavil, zasadit jej do doby a prostředí, ve kterém se rozvíjel, formulovat jeho základní rysy a stanoviska a konstatovat některé významné momenty jeho života. Upozorňuji přitom hned úvodem, že intuicionismus zásadně vychází z filozofických a psychologických tezí a tudíž se místy jeho řeč podobá spíše než obvyklým matematickým šifrám jakémusi romantickému vyprávění. Pevně však doufám, že dnešní hloubavý čtenář-matematik kvůli tomu neodloží toto pojednání nespokojen ....

Bezesporu nejznámější z hnutí formujících se v matematice na přelomu století bylo hnutí formalistů, představované zejména svým zakladatelem, německým matematikem Davidem Hilbertem, ale i řadou dalších skvělých osobností, jakými byli například Paul Bernays, Wilhelm Ackermann nebo John von Neumann.

Formalisté věřili ve správnost již zbudované matematiky. Antinomie se v ní, podle nich, objevily jen kvůli nepřesnému vyjadřování se matematickým jazykem. Proto věřili i ve snadné odstranění krize za pomoci logiky a formálních metod. Hilbert v této souvislosti prohlásil, že logické vztahy existující mezi soudy, pojmy atd., jsou vyjádřeny ve formulích a právě díky zápisu prostřednictvím logických znaků a formulí jsou zbaveny nejrůznějších nejasností, které by mohly vzniknout při jejich slovním vyjádření. Formalismus jako směr tedy představuje v matematice a logice jistý kalkul, který umožňuje operace s objekty nahradit operacemi se znaky. Je pro něj charakteristický požadavek axiomatické výstavby matematiky, resp. formalizované axiomatiky. Pracuje tedy metodou čistě syntaktickou.

Cíle formalistů dostaly díky Hilbertovi i programový tvar ve formulaci tzv. *hilbertovského programu* na ozdravění matematiky. Roku 1930 však rakouský matematik a logik Kurt Gödel svou větou o neúplnosti ukázal, že úspěch podobných ambicí je principiálně nemožný. Poněkud méně významným vzhledem k formalismu, avšak neméně zajímavým, je *logicismus*. Jeho ideje byly vysloveny již v 17. století Leibnizem, který se domníval, že ideje a principy logiky leží v základech všech ostatních věd. Nejznámějším představitelem logicismu je německý matematik a logik Gottlob Frege, jenž se snažil formalizovat aritmetiku na základě rozpracovaného predikátového kalkulu.

Úsilí logicistů je možno charakterizovat takto: definovat výchozí pojmy matematiky pouze logickými termíny a poté dokázat zákony matematiky pouze na základě zákonů logiky. Snahy odvodit matematiku z logiky však větší ohlas mezi matematiky nenašly, i když ve své době měl logicismus značný význam při výstavbě matematické logiky.

Logicismus bývá často a nesprávně zaměňován s jiným logicistickým směrem, totiž s *teorií typů*. Jeho hlavním představitelem je Bertrand Russell, který usiloval o vyřešení antinomií logiky a teorie množin vznikajících v důsledku neomezeného užívání predikátových funkcí jakožto proměnných. Hlavní myšlenka Russellova přístupu spočívá v přesném rozdělení všech objektů logických úvah do různých skupin, tzv. typů, a v udání přesných pravidel pro jejich používání.

Teorie typů byla při odstraňování antinomií úspěšná, ovšem jen částečně. Podařilo se jí totiž odstranit pouze antinomie určitého, tzv. Russellova, typu.

Hnutí intuicionistů, rodící se v téže době, můžeme, ba musíme, na tomto pozadí chápat jako tendence zcela opačné.

Intuicionismus představoval opozici formalismu a jeho koncepci lze považovat za reakci na snahy formalistů a logicistů odstranit z matematiky intuici.

Příbuzným směrem je *konstruktivismus*. Jeho základy spočívají v pracích Hermanna Weyla a Jana Brouwera, za hlavní představitele můžeme považovat Andreje Andrejeviče Markova a Andreje Nikolajeviče Kolmogorova. Konstruktivisté definují konstruktivistickou matematiku jako abstraktní vědu o konstruktivních procesech a jejich výsledcích – konstruktivních objektech. Za zákonné přitom považují pouze ty procesy, které jsou určeny nějakým předpisem, algoritmem.

Bez zaváhání můžeme konstatovat, že intuicionismus se zrodil 19. února 1907. Tehdy byla totiž poprvé publikována disertační práce nizozemského matematika Luitzena Egbertuse Jana Brouwera, nazvaná *Over de grondslagen der wiskunde* (O základech matematiky). Brouwer byl jediným, kdo se při zrodu intuicionismu zasadil o rozpracování jeho filosofické báze a většina z jeho budoucích názorů je, i když často útržkovitě, formulována zde. Tato práce se stala základním dílem intuicionismu.

Zakladatelem intuicionismu je tedy Luitzen Egbertus Jan Brouwer. Kromě něj se na rozvoji tohoto hnutí výrazně podíleli zejména Arend Heyting a Hermann Weyl, dále pak Kleene, Troelstra, Kripke, Maichill, van Dalen, Belinfante aj.

Na rozdíl od formalistů intuicionisté nevěřili ve správnost teorie množin a matematiky na ní budované. Byli přesvědčeni, že jak samotná východiska, tak užívané metody jsou nesprávné. Jejich snahą o ozdravění existující matematiky tedy nutně vyústila v úsilí o její zcela zásadní přebudování, reorganizaci.

Označení tohoto směru, jak se dá tušit, je odvozeno od pojmu „intuice", který je fundamentálním pojmem celého intuicionistického učení. V prvních desetiletích své existence představoval intuicionismus, vzhledem k tomu, že intuicionistická matematika v té době ještě nebyla dostatečně rozpracovaná, především filosofické hnutí. V tomto faktu pak můžeme spatřovat důvod, proč se i v dnešní době setkáváme s názorem, že intuicionismus je filosofické hnutí, že je výlučně, nebo téměř výlučně, směrem ve filosofii matematiky. Postupem času však filosofický aspekt intuicionistických prací, který vystupoval do popředí v první etapě rozvoje tohoto hnutí, ustoupil pod tlakem reálných vědeckých úloh do pozadí, a proto zmíněný názor není správný.

Intuicionistický program se soustřeďoval na tři základní požadavky:

1. Nahradit aktuální nekonečno nekonečnem potenciálním.
2. Pojem „existence" ztotožnit s pojmem „být sestrojen".
3. Vyloučit zákon vyloučeného třetího z operací s nekonečnými množinami.

Jak jsem již uvedla, byl fundamentálním pojmem intuicionismu pojem „intuice". Intuicionisté byli přesvědčení, že základním zdrojem a principem veškerého matematického poznání, kritériem pravdivosti matematických teorií, je intuice, intuitivní zřejmost. Na tomto pozadí se pak zdají požadavky intuicionistů zcela přirozené. Matematika podle nich měla být přirozenou činností člověka, což je pro většinu z nás představa nejen že nepřijatelná, ale dokonce myslím, že nepředstavitelná.

Přijímání aktuálního nekonečna v matematice považovali intuicionisté za vnášení metafyziky do matematiky stejně tak jako jiné než konstruktivní pojímání matematických objektů. Odmítání principu vyloučeného třetího z operací s nekonečnými množinami pak vysvětlovali velice jednoduše. Tvrdili totiž, že zákony klasické logiky byly vyvozeny z výzkumu konečných množin, byly potvrzovány praktickou činností lidí, čehož výsledkem bylo, že se víra v jejich univerzální platnost stala axiomem. Avšak, zdůrazňují, axiomem pouze v oblasti operací nad konečnými množinami. Poté byla logice připsána nezávislá existence, apriorní existence a na základě této apriornosti byla logika nezdůvodněným způsobem použita v matematice nekonečných množin, což byl krok podle intuicionistů neoprávněný. Intuicionisté srovnávají víru v univerzální platnost zákona vyloučeného třetího s vírou v racionalitu čísla π nebo s vírou v otáčení oblohy kolem Země.

Jmenujme nyní některé pojmy či principy, kterými se intuicionistická matematika zásadně liší od matematiky formalistické.

V prvé řadě rozpracovával Brouwer celou svoji koncepci nové matematiky jakožto vnitřní nejazykové činnosti člověka, založené na prvotní intuici, na jasnozření každého z nás. Tento předpoklad musíme brát jako neotřesitelné východisko, které s sebou ovšem hned na první pohled nese viditelné a těžko překonatelné problémy. Například předurčuje matematiku, jako nejazykovou činnost mysli, být jakousi nesdělnou osobní záležitostí člověka, o níž by se nikdo jiný nemohl dozvědět.

Jinou zvláštností byl například pojem *volně* či *svobodně se stanovující posloupnosti* (freely proceeding sequence), který představoval základní konstruktivní objekt celé intuicionistické matematiky. Posloupnost zde představovala něco, co vzniká postupně, krok za krokem, jako výsledek svobodných výběrů tvůrčího individua, jinými slovy pojem posloupnosti předpokládá, že:

a) postavení libovolného členu posloupnosti, určeného svobodným výběrem, se nemění v důsledku následujících výběrů;
b) v libovolném kroku je možné výběr přerušit.

Jako příklad vznikání nekonečné posloupnosti volných výběrů můžeme uvést následující proces:

Prší. Pod okap postavíme otevřenou nádobu a vždy po nějaké chvíli tuto nádobu s napršenou vodou zvážíme. Výsledky vážení pak tvoří posloupnost aktů výběru: přitom platí, že tato posloupnost vzniká krok za krokem, doba vážení je vybírána svobodně, konkrétní výsledky nejsou ovlivňovány výsledky následujícími a tuto činnost můžeme v libovolném okamžiku ukončit.

Prostřednictvím předchozího pojmu jsme se dostali k fenoménu tvořícího subjektu (creating subject). Jeho funkci opět ilustrujme na příkladu.

Nechť je dáno tvrzení φ. V návaznosti na tvrzení φ rozviňme následujícím způsobem konstrukci určité volně jdoucí posloupnosti α. Pevně stanovme nějakou diskrétní posloupnost časových momentů $0, 1, 2, \ldots$, která může ubíhat neomezeně do budoucna. Může to být například odpočet dní začínající od nějakého pevně stanoveného dne. Hodnotu $\alpha(n)$ budeme určovat postupně podle následujícího pravidla. Jestliže bylo do okamžiku n dokázáno tvrzení φ, položíme $\alpha(n) = 1$. V opačném případě položíme $\alpha(n) = 0$. Bude-li v určitém okamžiku n dokázáno tvrzení $\neg\varphi$, pak budeme automaticky pro všechna $m > n$ klást $\alpha(m) = 0$. Hodnota $\alpha(n)$ bude tedy určována vždy v momentě n. Takto vytvořená volně jdoucí posloupnost α pak bude posloupností hledanou. Vidíme, že konstrukce posloupnosti a závisí na tvůrčí činnosti nějakého subjektu (či nějakých subjektů). Tento tvořící subjekt se zabývá dokazováním tvrzení. Předpokládá se přitom, že je nesmrtelný a že pracuje v libovolném okamžiku. Tvořící subjekt je podle Brouwera „ideálním matematikem“.

Nutno podotknout, že uvedená specifika, zavedená do matematiky výhradně

Brouwerem, byla příkře odmítána ze strany odpůrců hnutí, ovšem často i ze strany jeho stoupenců. Ať už se jednalo o výtky ohledně nevědeckosti, nesmyslnosti nebo vůbec nemožnosti jim porozumět. Proto se Brouwerovi následníci vrhli v prvé řadě na zprůhlednění a zformalizování východisek intuicionismu tak, aby jim mohly porozumět každý, což se jim postupem času opravdu podařilo.

V prvé řadě byla vytvořena ***specifická intuicionistická logika***, což vyvrací názor, že intuicionismus je směr zcela alogický. Zabývá se výhradně matematickými tvrzeními, obsahuje nejobecnější matematická tvrzení. Vzhledem k tomu, že intuicionisté chtěli budovat matematiku pro náš rozum zcela bezprostřední a pochopitelnou, nemohla být jejich logika jiná, než na matematice závislá. Brouwer chápal logiku pouze jako věrnou, mechanickou, stenografickou imitaci matematického jazyka, která nemůže žádným způsobem zpřesnit (původně nepřesný) matematický jazyk, ani nám říci o matematice něco nového.

Hlavní rozdíl mezi ní a logikou klasickou se týká negace a principu vyloučeného třetího (zde rovněž nazývaného principle of judgeability). Intuicionisté například definují negaci takto:

Negace $\neg A$ určitého tvrzení A představuje uskutečnění konstrukce B, která vede ke sporu s tvrzením, že je možné uskutečnit konstrukci A.

V intuicionistické logice pojem negace souvisí s konstruktivním chápáním matematických objektů a je vykládán jako proces odrážející proces konstrukce. Uveďme příklad:

Důkaz nemožnosti nějaké vlastnosti nemusí být vždy důkazem této vlastnosti. Vysvětlení: zapisujme desetinný rozvoj čísla π a pod ním desetinný rozvoj čísla $\varrho = 0{,}333\ldots$, který přerušíme v okamžiku, kdy se posloupnost číslic 0123456789 poprvé objeví v desetinném rozvoji π. Bude-li cifra 9 z prvního výskytu posloupnosti 0123456789 v desetinném rozvoji π k-tým znakem za desetinnou čárkou, pak položíme

$$\varrho = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}.$$

Nyní předpokládejme, že ϱ nemůže být číslo racionální. Z toho vyplývá, že nemůže nastat rovnost

$$\varrho = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$$

a zároveň, že se posloupnost 0123456789 v desetinném rozvoji π nikdy neobjeví. Pak ale musí být $\varrho - \frac{1}{3}$, což také není možné. Předpoklad, že ϱ není racionální, nás tedy přivedl ke sporu.

Přesto však nemůžeme tvrdit, že ϱ je racionální. To by totiž znamenalo, že můžeme vyčíslit čitatele i jmenovatele nějakého zlomku $\frac{p}{q}$, který je roven ϱ. Ale k tomu, jak je vidět, musíme mít možnost buď ukázat umístění posloupnosti 0123456789 v π, nebo dokázat, že toto neexistuje.

Závěr: v klasické matematice bychom v popsané situaci konstatovali, že ϱ je racionální číslo, že se rovná některému z racionálních čísel $\frac{1}{3}$; 0,3; 0,33; 0,333;

atd. V intuicionistické matematice řekneme, že ϱ nemůže být různé od všech čísel $\frac{1}{3}$; 0,3; 0,33; 0,333; atd.

Další rozpracovávání konkrétních matematických problémů se rozbíhalo po období úvodních filozofických disputací a komentářů převážně od 20. let tohoto století. O tom, že využití některých, a pro většinu z nás neobvyklých, přístupů vede v matematice k platným závěrům, svědčí i krátký přehled intuicionistických výsledků:

- teorie množin – Brouwer (1924, 1925, 1926, 1942)
- topologie – Brouwer (1925, 1926, 1952, 1954), Freudenthal (1936)
- projektivní geometrie – Heyting (1925)
- algebra – Heyting (1927, 1941)
- teorie hilbertovského prostoru – Heyting (1951)
- formalizace intuicionistické logiky – Heyting (1930)
- nekonečné progrese – Belinfante (1929, 1930, 1938), Deikman (1946, 1948)
- funkce reálné proměnné – Brouwer (1923, 1926), van Dantzig (1942), van Rootselaar (1954)
- funkce komplexní proměnné – Belinfante (1938, 1941)
- n základní věta algebry – de Loor (1924, 1925), Weyl (1924), van der Corput (1946)

V šedesátých a sedmdesátých letech se v pracích Kleeneho, Kripkeho, Troelstry, Maichilla a jiných objevily pro ostatní matematiky přijatelné teorie, charakterizující některé druhy volně se stanovující posloupnosti.

Na zkoumání vzájemných vztahů mezi klasickou a intuicionistickou matematikou se úspěšně podíleli takoví vědci jakými byli Kurt Gödel, Alfred Tarski, E .W. Beth, S. C. Kleene nebo A. N. Kolmogorov. Mezi mimořádně zajímavé Gödelovy výsledky v této souvislostipatří například důkaz, že intuicionistická aritmetika a teorie čísel, přestože se na první pohled zdají „užší" než odpovídající klasické systémy, ve skutečnosti tyto systémy obsahují.

LITERATURA

[1] Brouwer,·L. E. J., *Collected works, Volume 1: Philosophy and foundations of mathematics, edited by A. Heyting*, North-Holland Publishing Company,, Amsterdam, 1975.

[2] Fuchs, E., *Světonázorové problémy matematiky IV*, SPN, Praha, 1987.

[3] Fuchs, E., *Základy teorie množin*, SPN, Praha, 1986.

[4] Heyting, A., *Intuicionizm. Vvedenije*, Mir, Moskva, 1965.

[5] Kleene, S. C., *Vvedenije v metamatematiku*, Izdatelstvo inostrannoj literatury, Moskva, 1957.

[6] Panov, M., *Metodologičeskije problemy intuicionistskoj matematiki*, Nauka, Moskva, 1984.

[7] Stight, Walter P. van, *Brouwer's Intuitionism*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1990.

[8] Weyl, H., *Matematičeskoje myšlenije*, Nauka, Moskva, 1989.