

Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady

Eukleidovy Základy v arabském světě

In: Martina Bečvářová (author): Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady. (Czech). Praha: Prometheus, 2002. pp. 38–51.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401806>

Terms of use:

© Bečvářová, Martina

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

EUKLEIDOVY ZÁKLADY V ARABSKÉM SVĚTĚ

V osmém století si Eukleidovy *Základy* našly cestu do arabského světa.

Kálif al-Manšur (kálífem 754–775) vyslal k byzantskému císaři několik misí; jako výsledek jedné z nich získal řecké rukopisy, mezi nimi i kopii Eukleidových *Základů*. Jeho nástupce kálif Hárun-ar Rashid (kálífem 786–809) podporoval rozvoj vzdělanosti a vědy; za jeho vlády byla v Bagdádu založena velká knihovna, ve které se soustřeďovaly veškeré cenné spisy získané zejména z Byzance. Dalším významným panovníkem, který přispěl k rozkvětu arabské vědy, byl kálif al-Ma'mún (kálífem 813–833). Podporoval obchod s knihami a rukopisy, knihovnu podstatně rozšířil. Z Byzance získal řadu vzácných rukopisů, mezi nimi i další kopii *Základů*. Z jeho rozhodnutí bylo v Bagdádu zřízeno nové vědecké centrum *Bajt al hikma* neboli *Dům moudrosti*, kde byly pěstovány vědy, hlavně astronomie, a byla zde umístěna velkolepá knihovna.

Arabská matematika a především bagdádská matematická škola se zrodila z antické tradice. V osmém a devátém století se arabští matematici zaměřili hlavně na studium řeckých autorů, z řečtiny a syrštiny překládali nejvýznamnější spisy Eukleidovy, Archimédovy, Apollóniovy, Hérónovy, Ptolemaiovy a Diofantovy,episovali první komentáře a vytvářeli arabskou matematickou terminologii.⁴³

V desátém století již vznikala svébytná arabská matematická kultura, která vstřebala řecké geometrické poznatky a seznámila se i s indickými a babylonskými početními postupy. Od jedenáctého století narůstal v arabském světě počet původních matematických prací; řada z nich byla zaměřena na numerické a trigonometrické metody související s astronomií. Současně byla na blízkém a středním východě podrobena důkladnému studiu a kritickému rozboru díla Eukleidova, Archimédova a Ptolemaiova. Tato bádání silně ovlivnila další rozvoj matematiky. V arabském světě se v té době objevilo mnoho různých výkladů některých pasáží Eukleidových *Základů*, které byly založeny na předchozích překladech. Takovéto práce měly obyčejně didaktický cíl, měly pomáhat těm, kteří chtěli *Základy* studovat.

Od dvanáctého století opřeli arabští matematici své práce o řecké komentáře *Základů*, z nichž velkou pozornost přitahovaly hlavně partie týkající se pátého postulátu. Objevily se revidované edice jednotlivých knih *Základů* a především nové „důkazy“ pátého postulátu.

V dalším textu se budeme podrobněji věnovat osudu *Základů* v arabském světě; připomeneme několik nejvýznamnějších učenců, kteří se *Základům* věnovali. Podrobným studiem, rozbořem, překládáním a komentováním *Základů* se zabývalo více než padesát arabských učenců. Téměř všichni se je snažili

⁴³ O vztahu řecké, byzantské a arabské vědy viz [Vo].

zdokonalit, šlo jim hlavně o osvojení a rozvoj geometrie a o studium teorie rovnoběžek. Při svých pokusech o „důkaz“ pátého postulátu dospěli k řadě důležitých výsledků, které připravovaly cestu neeukleidovské geometrii.

Osmé a deváté století.

Prvním arabským překladatelem *Základů* byl Ibn Júsuif ibn Mařar al-Hajjáj (8. až 9. stol.) známý též jako Hadždžádž; *Základy* pravděpodobně přeložil dvakrát. První překlad známý jako *Hárúní* byl sepsán pro kálífa Háruna ar-Rashida, druhý překlad *al-Má'múní* pro kálífa al-Má'muna. Zachovalo se prvních šest knih a část sedmé knihy druhého překladu, který byl patrně kvalitnější než překlad první.⁴⁴

V arabském světě se *Základy* díky Hajjájově překladu staly nejdůležitější a nejpoužívanější matematickou učebnicí.

V době vlády kálífa al-Má'muna působil v Domě moudrosti matematik a astronom al-'Abbás ibn Sa'íd al-Džauhári, který napsal první arabský komentář k páté knize *Základů*. Je rovněž autorem první známé arabské práce o teorii rovnoběžek nazvané *Isláh li-kitáb al-ušúl* (*Zdokonalení knihy „Základů“*); známe ji z výkladu Našira ad-Dína ať-Ťúsího. Při svém „důkazu“ pátého postulátu však al-Džauhári použil následující tvrzení:

... jestliže jsou dvě přímky prořaty libovolnou přímkou tak, že střídavé úhly jsou stejné, pak tato vlastnost platí pro jakoukoliv příčku těchto dvou přímek. ([Ju], str. 274)

Al-Džauhári dokázal i tyto výsledky:

- úsečka spojující středy dvou stran trojúhelníka je rovna polovině třetí strany,
- libovolným bodem uvnitř daného úhlu lze vést přímkou, která protíná obě jeho ramena.

Odtud již snadno „dokázal“ platnost pátého postulátu.⁴⁵

Málo známým astronomem věnujícím se i geometrii byl konvertující Žid Sind ibn 'Alí Abú't Taiyib, který zemřel po roce 864. Kolem roku 830 se stal hlavou astronomické observatoře Domu moudrosti. Podle pozdějších arabských komentátorů prý napsal komentář k celým Eukleidovým *Základům*; ten se však nedochoval. Snad na této problematice spolupracoval i s al-Džauhárim.

Dalším komentátorem *Základů* byl Abú 'Abdallah Muḥammad ibn 'Isa al-Máhání (zemřel roku 874 nebo 884). Ve svém komentáři k první knize *Základů* nahradil všechny důkazy vedené sporem vlastními důkazy. Sepsal i komentář k páté knize *Základů* a provedl kritickou analýzu Eudoxovy teorie

⁴⁴ Rukopis je uložen v Leidenu, jde o tzv. Codex Leidensis 399.1. Část tohoto překladu (prvních šest knih) byla vydána s komentáři arabského matematika an-Najrízího (viz [BH]), které se dříve zdály být ztraceny. Někteří badatelé se domnívají, že se zachovala i devátá a jedenáctá až třináctá kniha. O překladu al-Hajjáje viz [Br1], [Br2] a [Yo1].

⁴⁵ Obdobný důkaz předložil v roce 1800 i francouzský matematik A. M. Legendre.

proporcí. Je autorem spisu *O větách*.⁴⁶ Al-Máhání sepsal i komentáře k desáté a pravděpodobně i ke třinácté knize *Základů*.⁴⁷

Velmi váženým a vzdělaným mužem své doby byl Abú Júsúf Ja'qúb ibn Isháq ibn as-Sabbáh al-Kindí (asi 800 – 873) z Basry, který byl nazýván „arabským filozofem“. Je autorem prací z logiky, filozofie, geometrie, aritmetiky, hudby, astronomie atd. Eukleidovým *Základům* věnoval tři práce; v první nazvané *O objektech Eukleidovy knihy* se objevilo tvrzení, že autorem *Základů* byl tesař Apollónios. Další dvě práce *O zdokonalení Eukleidovy práce* a *O zdokonalení XIV. a XV. knihy* věnoval výkladu některých obtížných míst *Základů*.

Na konci devátého století byl pořízen přímo z řečtiny nový překlad *Základů*; jeho autorem byl Abú Ja'qúb Isháq ibn Ĥunain ibn Isháq al'-Ibádí (zemřel kolem r. 910), syn slavného překladatele Ĥunaina ibn Isháqa al'-Ibádího (809 až 873), lékaře kálifa al-Mutawakkila (kálífem 847–861). Stejně jako otec, i on byl výborným znalcem řečtiny. Isháqův překlad se bohužel nezachoval.⁴⁸

Abú l-Ĥasan Thábit ibn Qurra (asi 826/36 – 901).

Isháqův překlad upravil a zdokonalil jeho přítel Abú l-Ĥasan Thábit ibn Qurra ibn Marwán al-Harrání, k úpravám pravděpodobně použil nějaký řecký rukopis. Svědčí o tom poznámky na okrajích hebrejské verze přeložené z Isháq-Thábitovy verze; ta je přisuzována jednomu ze dvou učenců pocházejících z rodiny Tibbonů; byli to Moses ben Samuel ibn Tibbon (asi 1240–1283) a Jakob ben Maĥir ibn Tibbon (1236–1304).⁴⁹

Thábitem upravený překlad se zachoval nejméně v devatenácti rukopisech. Nejstarší, který pochází z desátého století, je uložen v Teheránu.⁵⁰ Nejlépe prostudované rukopisy jsou uloženy v Oxfordu v tzv. Bodleian Library;⁵¹ obsahují třináct knih *Základů* Isháq-Thábitovy verze a čtrnáctou a patnáctou knihu v překladu Qusťy ibn Lúqá al-Ba'labakkího.⁵²

Poznamenejme ještě, že Axel Anthon Björnbo našel roku 1904 v Kodani neznámý rukopis, který obsahuje Thábitův překlad páté až desáté knihy *Základů*.

Thábitova arabská verze byla užita Gherardem z Cremony (1114–1187) k vytvoření latinského středověkého překladu.

⁴⁶ Je pravděpodobné, že jde o jedinou práci; její část se zachovala v Paříži (rukopis MS 2467).

⁴⁷ Fragment se zachoval v Paříži (rukopis No. 2457.39).

⁴⁸ O Isháqově překladu *Základů* viz [Yo2].

⁴⁹ Více o starožitovské verzi *Základů* viz [St2].

⁵⁰ Některé Isháq-Thábitovy verze jsou „kontaminovány“ Hajjájovými překlady; např. rukopisy v El Escorilu No. 907, v Petrohradě No. C 2145 a v Teheránu Majlis Šhúrá 200. Více o práci Thábita ibn Qurry, který se rovněž pokoušel dokázat pátý postulát, viz [Sa].

⁵¹ Rukopis No. 279 sepsaný kolem roku 1238 a rukopis No. 280, který vznikl kolem roku 1260.

⁵² Qusťa ibn Lúqá al-Ba'labakkí (zemřel r. 912) byl fyzik, filozof, astronom a matematik, který sepsal formou otázek a odpovědí tři další práce věnované *Základům: O obtížných pasážích Eukleidovy knihy, O řešení aritmetických problémů ze III. knihy Základů a Úvod do geometrie*. Více o jeho životě a díle viz [Ga].

Thábit ibn Qurra věnoval hodně času a energie studiu pátého postulátu. O této problematice sepsal dvě práce nazvané *Maqála fi burhám al-mušádara al-mašhúra min Uqlídis* (*Kniha o důkazu známého Eukleidova postulátu*) a *Maqála fi anna al-chaṭṭajjn idḥá uchrídža min záwijatajn allatajn aqall min qá'imatajn iltaqiín* (*Kniha o tom, jak se setkají dvě přímky, které jsou vedeny pod úhly menšími než dva pravé*), ve kterých vycházel z prací al-Džauháriho. Oba spisy ovlivnily práci dalších matematiků, al-Haiṭhama, Omara Chajjáma, aṭ-Túsiho i G. Saccheriho.⁵³ V otcově práci na *Základech* pokračoval později jeho syn Abú Sa'id Sinan ibn Thábit ibn Qurra (zemřel r. 943).

Informace o vývoji arabské vědy v osmém a devátém století se dnes přejímají z biograficko-bibliografické encyklopedie *Fihrist*, kterou v desátém století sepsal Muḥammad al-Nadín,⁵⁴ a z nedávno vydané biografické práce Abúl-Qasima Ghorbaniho [Gh].

Desáté století.

V desátém století zájem o studium geometrie v arabském světě podstatně vzrostl. Mimo jiné byla sepsána řada komentářů a kritických rozborů *Základů*. Připomeňme jen nejvýznamnější autory tohoto období.

Za vlády kálifa al-Muqtadira (kálifem 908–932) žil v Bagdádu matematik a fyzik Abú 'Utham Sa'id ibn Ja'qúb al-Dimashqí, který přeložil desátou knihu *Základů* doplněnou o Pappovy komentáře.⁵⁵

O studium geometrie a především *Základů* se v desátém století zasloužil Abú Našr Muḥammad ibn Muḥammad ibn Tarkhán ibn Uzlaḡ al-Fárábí (asi 870 – 950), který se narodil ve městě Fárábu položeném při ústí řeky Aris do řeky Syrdar'ji. Pocházel z rodiny turecké vojenské aristokracie. Napsal komentáře k obtížným místům první a páté knihy *Základů*, které nazval *Šarḥ al-mustaghlaq min mušádara al-maqála al-úlá wa-l-chámisa min Uqlídis* (*Komentáře k obtížím v úvodech k první a páté knize Eukleidově*). Práce se zachovala v starohebrejském překladu, jehož autorem je pravděpodobně Moses ben Samuel ibn Tibbon. Vlastní al-Fárábího komentář však není z matematického hlediska příliš cenný, jeho význam je především metodický, neboť výrazně inspiroval ke studiu *Základů*.

Dalším komentátorem *Základů* byl Abu 'l-'Abbás al-Faḍl ibn Hátim an-Najrízí (zemřel kolem r. 922), známý pod latinizovaným jménem Anaritius. Narodil se v městečku Najrízí, které leží nedaleko města Širázu, za vlády kálifa al-Mu'tadila (kálifem 892–903) pracoval v Bagdádu.⁵⁶ Sepsal patrně komentáře ke všem knihám *Základů*; v arabské verzi se dochovaly komentáře k prvním šesti

⁵³ Více o spisech Thábita ibn Qurry viz [Ju] a [RJ1].

⁵⁴ Více viz [Ta].

⁵⁵ Více viz [Su1].

⁵⁶ Více o životě a díle an-Najrízího viz [Ma] a [Su2].

knihám,⁵⁷ v latinské verzi máme dnes k dispozici jeho komentáře k první až desáté knize *Základů*; zůstaly zachovány v překladu Gherarda z Cremony.⁵⁸

Význam an-Najrízího komentářů spočívá především v tom, že obsahují pasáže z děl Héróna a Simplikia. Je možné, že se an-Najrízí u Simplikia seznámil s Aganisovým pojetím rovnoběžek: *rovnoběžky jsou přímky, které leží v jedné rovině a při libovolném prodloužení na obě strany jsou stále stejně vzdáleny*. Z této definice rovnoběžek an-Najrízí odvodil tvrzení ekvivalentní s pátým postulátem.⁵⁹

Abú Dža'far al-Kházin (asi 920 – 961/71) narozený v Chórásánu byl jedním z předních matematiků své doby. Podle zpráv pozdějších matematiků napsal komentáře k celým *Základům*, zachoval se z nich však jen úvod k desáté knize.⁶⁰

Jeho současník 'Ali ibn Ahmad Abú 'l-Qásim al-Antákí (zemřel r. 987) napsal rovněž komentáře k celým *Základům*; jejich část, která je věnována páté knize, se dochovala v Oxfordu.⁶¹

Matematik Abú Dá'úd Sulaimán ibn 'Ugba (10. stol.) komentoval desátou knihu *Základů*; komentář je částečně zachován, je uložen v Leidenu.⁶²

Rozsáhlou a obtížnou desátou knihu o iracionalitách pečlivě komentovali i Ibn Ráhawaihi al-Arjání a Abú Júsúf Ja'qúb ibn Muḥammad ar-Rází.

O *Základech* a dalších geometrických knihách přednášel Yúhanná ibn Yúsuf ibn al-Háarith ibn al-Bitrúq al-Qass (zemřel r. 980), který prý překládal práce slavných starověkých matematiků přímo z řečtiny; napsal traktát o důkazech pátého postulátu. Z jeho matematických prací zůstal dochován v Paříži traktát věnovaný racionalitám a iracionalitám.⁶³

Slavný fyzik Nazíf ibn Yuman al-Qass (zemřel r. 990) prý přeložil do arabštiny jakousi verzi desáté knihy *Základů*, která měla o 40 vět více než ty, které běžně v arabském světě kolovaly (obvykle měly 109 vět). Fragment jeho překladu zůstal zachován v Paříži.⁶⁴

Abú'l-Wafá Muḥammad ibn Muḥammad ibn Yuḥyá ibn Ismá'íl ibn al-Abbás al-Búzdžání (940–997) se narodil ve městě Búzdžán ležícím mezi Herátem a Nišápúrem v Chórásánu. Dvacet let pracoval v Bagdádu, kde získal uznání jako astronom a matematik. Podle *Základů* sepsal učebnici praktické geometrie nazvanou *Knihá pro písaře*. Napsal rovněž obsáhlé komentáře k dílům Eukleidovým, Diofantovým a Ptolemaiovým.

⁵⁷ Codex Leidensis 399,1; viz [BH].

⁵⁸ Byly vydány podle krakovského rukopisu – viz [Cu]. O an-Najrízího komentářích viz [Tu].

⁵⁹ Více viz [PR]. Nejnovější výzkumy o vztahu prvních arabských překladatelů a komentátorů Eukleidových *Základů* lze najít v článku [Br3].

⁶⁰ Rukopisy obsahující torzo al-Kházinova komentáře jsou v Leidenu, Berlíně a Paříži.

⁶¹ Jde o rukopis označený jako II. 281.

⁶² Jde o rukopis označený jako No. 974.

⁶³ Jde o rukopis označený jako No. 48.

⁶⁴ Jde o rukopis označený jako No. 2457.

Vynikající geometr a astronom Abú Sahl Wíjan (či Waijan) ibn Rustam al-Kúhí (asi 940 – 1000) narozený v Kúh v Tabaristánu napsal podle Eukleida *Knihu Základů*. Jeho první a druhá kniha se dochovala v Káhiře, část třetí knihy v Berlíně. Napsal prý několik komentářů a doplňků ke starověkým autoritám.

Abú 'Alí al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṭham (asi 965 – 1039).

Snad nejvýznamnější postavou arabské vědy konce desátého a první poloviny jedenáctého století byl matematik, astronom, fyzik a lékař Abú 'Alí al-Ḥasan ibn al-Ḥasan ibn al-Haiṭham pocházející z Basry. V Iráku byl známý pod jménem Ibn al-Haiṭham či Abú 'Alí al-Basrí, v křesťanské Evropě jako Alhazen; zde byla oceňována především jeho kniha *Kitáb al-manázir (Kniha optiky)* věnovaná procesu vidění a základům optiky.⁶⁵

Haiṭham měl výborné znalosti geometrie, sepsal i práce o Eukleidovi a jeho spisech. K jeho nejvýznamnějším traktátům patří *Kitáb šarḥ musádrát kitáb Uqlídis fí 'l-ušúl (Kniha komentářů k úvodům Eukleidovy knihy „Základy“)* a spis *Fí hall šukúk kitáb Uqlídis fí 'l-ušúl (O vyřešení pochyb Eukleidovy knihy „Základy“)* obsahující komentáře k definicím, axiomům, postulátům i větám. První výše zmiňovaná kniha obsahuje mimo jiné novou teorii rovnoběžek (nová definice, úvahy o existenci a konstruovatelnosti rovnoběžek, „důkaz“ pátého postulátu), kterou později studovali Omar Chajjám a G. Saccheri. Z dalších Haiṭhamových prací připomeňme spis *Kolekce Základů geometrie a aritmetiky vypsáná z traktátů Eukleida a Apollonia, Kolekce Základů kalkulu vydedukovaná z principů položených Eukleidem v jeho Základech, Traktát o měření podle Eukleidových Základů, Komentář o řešení obtíží I. knihy Eukleidových Základů, Komentář o bezchybném řešení Eukleida v páté knize, Komentář o bezchybném řešení stereometrických proporcí a Komentář o dělení dvou velikostí připomínaný v desáté knize Eukleidových Základů*.

Některé Haiṭhamovy práce se v opisech dochovaly v Oxfordu (rukopis 908 a 262), v Alžíru (rukopis 1446.1), v Leidenu (rukopis 966) a v Petrohradě (rukopis 192.5).⁶⁶

Jedenácté století.

Velmi známým matematikem, astronomem, lékařem a filozofem byl Abu 'r-Rajḥán Muḥammad ibn Aḥmad al-Bírúní (973–1048), který prý přeložil *Základy* z arabštiny do sanskrtu, aby se staly přístupné matematikům v Indii.

Autorem slavného výtahu z Eukleidových *Základů* byl lékař, filozof a astronom Ibn Sína (980–1037) známý pod latinským jménem Avicenna. Ve své encyklopedii *Knihy uzdravení* uvedl přehled definic, postulátů, axiomů a vět všech patnácti knih *Základů* doplněný zkrácenými důkazy.⁶⁷

⁶⁵ Podrobněji o Alhazenovi a jeho optice viz I. Štoll: *Fyzika a astronomie ve středověku*, in J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, Dějiny matematiky sv. 19, Prometheus, Praha, 2001, str. 377–400.

⁶⁶ Více o Haiṭhamovi viz [He], [H], [Ro1] a [Ju].

⁶⁷ Více viz [Lo].

Skoro zapomenutým matematikem je Muḥammad ibn 'Abd al-Báqí al-Baghdádí (zemřel asi r. 1100), který prý studoval a pečlivě komentoval celé *Základy*.⁶⁸

Abú-l-Fatcha Omar ibn Ibrahim Chajjám (asi 1048 – 1128).

Významným matematikem, astronomem, filozofem a básníkem poslední třetiny jedenáctého a první třetiny dvanáctého století byl Abú-l-Fatcha Omar ibn Ibrahim Chajjám narozený v Nišapure (toto město dnes leží v severním Íránu). Působil na různých místech střední Asie, např. v Samarkandu, Mervě, Ispagonii, Ree. Kolem roku 1077 ukončil práci nazvanou *Risála fí šarḥ má aškál min mušádarát kitáb Uqlídís* (*Komentáře k obtížím v úvodech knihy Eukleidovy*), jejíž opis z roku 1281 se zachoval. V první knize Chajjám do značné míry navázal na al-Haiṭhama, měl však námitky k jeho teorii rovnoběžek. Ve shodě s Eukleidem odmítal v geometrii pohyb a byl v tomto směru dokonce důslednější než Eukleidés, neboť kritizoval jeho definice těles postavené na rotaci rovinných útvarů. Pátý postulát doporučil nahradit následujícím principem:

... dvě sbíhající se (tj. přibližující se) přímky se protínají a je nemožné, aby se ve směru svého sbíhání ... rozbíhaly.⁶⁹

Ve druhé a třetí knize zkoumal Chajjám Eudoxovu teorii proporcí a podrobně komentoval pátou a šestou knihu *Základů*. Přinesl nové závažné výsledky; k porovnávání poměrů veličin využil Eukleidova algoritmu a ukázal tak alternativní přístup k teorii proporcí využívající (v moderní terminologii) řetězové zlomky. Zabýval se i problematikou spojitosti, tvrdil, že veličiny je možno dělit do nekonečna.⁷⁰

Dvanácté století.

Chajjámův spolupracovník Abú Ḥatim al-Muzaḥfur ibn Ismá'íl al-Asfurzárí (zemřel r. 1122) napsal práci *Ikhrišár li-ušúl Uqlídís*, která obsahovala nejen text prvních třinácti knih *Základů*, ale i komentáře a navíc i čtrnáctou knihu *Základů*.⁷¹

Abú Muḥammad ibn 'Abd al-Báqí al-Baghdádí al-Faradí (zemřel r. 1141), Chajjámův současník, sepsal na počátku dvanáctého století výborné komentáře k desáté knize *Základů*, které doplnil příklady.

Je zajímavé, že v arabském světě psali práce o matematice i lidé, kteří se přímo matematikou nezabývali. Např. cordóbský filozof Ibn Rušd (1126–1198), známý v Evropě jako Averroes, napsal traktát, ve kterém uvedl, co je nutné znát z Eukleidových *Základů* při studiu Ptolemaiova *Almagestu*.

⁶⁸ Více viz [Su3].

⁶⁹ [Ju], str. 279. Podrobně o Chajjámově teorii rovnoběžek viz [Ju], str. 279–280; dále viz [AM], [RJ2] a [Sm]. Chajjámova práce, která vyšla arabsky tiskem v Teheránu až v roce 1936, evropské matematické myšlení neovlivnila. O Chajjámovi viz též [Be].

⁷⁰ Podrobněji viz [Ju], str. 248–251.

⁷¹ Více viz [Su4], [Su5].

Našír ad-Dín aṭ-Ṭúsí (1201–1274).

K novému pokroku ve studiu Eukleidových *Základů* v arabském světě došlo v první polovině třináctého století. Souvisel s pracemi, které napsal matematik a astronom Abú Dža'far Muḥammad ibn Muḥammad ibn al-Husan Našír ad-Dín aṭ-Ṭúsí, rodák z města Ṭúsí v Chórásánu.⁷²

S jeho jménem je spjata třetí arabská edice Eukleidových *Základů*, která existuje ve dvou odlišných verzích, první je kratší, druhá delší. Nejde o klasické překlady z řečtiny, ale o nové prepisy založené na starších arabských verzích a překladech; obě verze se řadou úprav odlišují od původního textu *Základů* a navíc obsahují aṭ-Ṭúsího dodatky, vsuvky a komentáře. Označovány jsou jako první a druhá verze *Výkladů Eukleida*.⁷³

Z dalších aṭ-Ṭúsího prací, které mají úzký vztah k *Základům*, připomeňme *Traktát o postulátech Eukleidových Základů*,⁷⁴ *Traktát o pátém postulátu*,⁷⁵ *Principy geometrie vzaté z Eukleida*⁷⁶ a *105 problémů z Eukleidových Základů*.⁷⁷

K *Základům* se do jisté míry váže i aṭ-Ṭúsího spis nazývaný nejčastěji *Traktát o úplném čtyřstranu* (*Kitáb aš-šakk al-qitá'*, *Knihla o útvaru tvořeném sečnamí*), který aṭ-Ṭúsí napsal původně persky a potom ho převedl do arabštiny. V této práci, jejíž podstatnou náplní je trigonometrie, aṭ-Ṭúsí mimo jiné vyložil teorii porporci s přihlédnutím k Chajjámovým výsledkům.

Se jménem aṭ-Ṭúsího je spojen velký pokrok v teorii rovnoběžek, který výrazně inspiroval pozdější matematiky. Před rokem 1251 aṭ-Ṭúsí sepsal práci *Ar-risála aš-šatíja 'an aš-šakk fí 'l-chuṭút al-mutawázija* (*Traktát zacelující pochybnosti v problematice rovnoběžek*), ve kterém vyložil teorii rovnoběžek podle Džauháriho, al-Haitḥama a Chajjáma; jejich přístupy rozebral, kriticky zhodnotil a v závěru uvedl svoji teorii, ve které se mimo jiné pokusil dokázat pátý postulát. Použil však tvrzení, které je s pátým postulátem ekvivalentní:

Jestliže se dvě přímky ležící v jedné rovině v jednom směru sbíhají, pak se nemohou v tomto směru rozbíhat, leda že by se protínaly. ([Ju], str. 281)

Tímto předpokladem nahradil aṭ-Ṭúsí pátý postulát ve své první verzi *Výkladů Eukleida*. Vyšetřoval vlastnosti tzv. Saccheriho čtyřúhelníka, který studoval již Omar Chajjám,⁷⁸ a přivedl ke sporu jak hypotézu tupého úhlu, tak hypotézu ostrého úhlu. Ve dvou variantách pak dokázal pátý postulát.

⁷² Více o aṭ-Ṭúsím viz [M], [Ro2], [Ro3], [RJ3], [Sul], [Th] a [Wi].

⁷³ Aṭ-Ṭúsího druhá verze Eukleidových *Základů* obsahující i aṭ-Ṭúsího komentáře vyšla arabsky tiskem roku 1594 v Římě (je uváděná pod latinským názvem *Euclidis Elementorum geometricorum Libri tredecim ex traditione doctissimi Nassireddini Tusini nunc primum Arabice impressi*); její neúplný latinský překlad vyšel v Římě roku 1657 pod názvem *Euclidis Elementorum Libri tredecim studio Nasserredini*. První verze vyšla v letech 1801 v Konstantinopolu, roku 1824 v Kalkatě a roku 1888 v Teheránu.

⁷⁴ Rukopis je dochován v Paříži pod číslem No. 2467.5.

⁷⁵ Rukopis je dochován v Paříži pod číslem No. 2467.6 a v Berlíně pod číslem 5942.

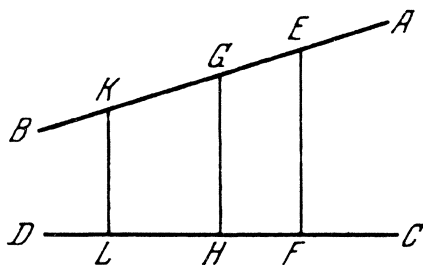
⁷⁶ Rukopis je uložen ve Florencii pod označením Pal. 298.

⁷⁷ Rukopis je uložen v Káhiře.

⁷⁸ Tzv. Saccheriho čtyřúhelník $ABCD$ je tvořen základnou AB , dvěma stejně dlouhými rameny AD a BC , která jsou kolmá k základně, a čtvrtou stranou CD . Dá se dokázat, že

Ve druhé verzi *Výkladů Eukleida* postupoval aṭ-Ṭūsī jinak. Vyšel z následujících dvou předpokladů, kterými pátý postulát nahradil:

1) *Nechť AB a CD jsou takové dvě přímky, že kolmice EF , GH , KL spuštěné z bodů přímky AB na přímku CD svírají s AB vždy nestejně vedlejší úhly, které však jsou vždy ve směru k B ostré a ve směru k A tupé. Potom se přímky AB a CD na straně ostrých úhlů neustále sblíží až se protnou a na straně tupých úhlů se rozbíhají, to znamená, že délky kolmic konstruovaných mezi AB a CD se směrem k B a D zmenšují a k A a C zvětšují.*



2) *Jestliže naopak tímto způsobem spuštěné kolmice se směrem k bodům B a D stále zkracují a k A a C prodlužují, takže se přímky AB a CD neustále přibližují ve směru B a D a oddalují v opačném směru, pak každá kolmice svírá s přímkou AB dva úhly, z nichž jeden je ostrý a druhý tupý. Přitom všechny ostré úhly jsou obráceny směrem k bodům B a D a všechny tupé směrem opačným. ([Ju], str. 282)*

Z těchto dvou předpokladů aṭ-Ṭūsī dokázal, že ve výše zmíněném čtyřúhelníku jsou všechny úhly pravé; i zde však, aniž si to uvědomil, použil při důkazu tvrzení ekvivalentní s pátým postulátem.

Jeho práce sehrála důležitou roli, patří do prehistorie neeukleidovské geometrie. Aṭ-Ṭūsī, podobně jako Omar Chajjám, se pokoušel pátý postulát dokázat pomocí vět, které mu připadaly jednodušší a názornější. Objevil přitom nové souvislosti (např. vztah pátého postulátu a tvrzení o součtu úhlů v čtyřúhelníku, resp. trojúhelníku).

Tyto aṭ-Ṭūsího výsledky znali např. John Wallis⁷⁹ a Girolamo Saccheri, který objevil její nedostatky a roku 1733 navázal na aṭ-Ṭūsího myšlenky ve svém spise *Euclides ab omni naevo vindicatus* (*Eukleidés vši poskvrny zbavený*).

Aṭ-Ṭūsího komentované *Základy* sehrály v arabském světě důležitou roli. Na jejich základě vznikaly další komentáře, často anonymní, které poskytují cenné informace o arabském přístupu k *Základům*. Ukazují, jak se Arabové snažili odstranit nejrůznější nejasnosti a obtíže, jak na patřičná místa vkládali

vnitřní úhly při vrcholech C a D se rovnají, jsou proto oba buď ostré, pravé, nebo tupé; hypotézy ostrého či tupého úhlu se tehdejší matematici pokoušeli vyloučit.

⁷⁹ Roku 1619 byla na univerzitě v Oxfordu zřízena stolice, jejíž profesor měl povinnost každoročně alespoň jednu přednášku věnovat Eukleidovým *Základům*. Jedním z prvních profesorů této stolice byl právě Wallis (1616–1703), který dobře chápal chybnost „důkazů“ pátého postulátu, ve kterých je vždy využito nějaké ekvivalentní tvrzení.

objasňující příklady, vynechávali některé obtížné partie i triviální věci. Někteří autoři prováděli úpravy přímo v textu, jiní je zaznamenávali na okrajích rukopisů. Všechny tyto úpravy značně komplikovaly rekonstrukci *Základů* v raném novověku i později.

Třinácté století.

V první polovině třináctého století napsal Yaḥyá ibn Muḥammad ibn 'Abdán ibn Abdawáhid (1210–1268) známý jako Ibn al-Lubúdí *Kompendium Eukleidovo*, ve kterém rozebíral Eukleidovy postuláty a vysvětloval jejich smysl.

Hispánsko-muslimský matematik a astronom Muḥyí al-milla wal-dín Yaḥyá ibn Muḥammad ibn Abú-l-Shukr al-Maghribí al-Andalusí (zemřel mezi roky 1268 až 1286) sestavil edici klasických řeckých prací nazvanou *Tahdhíb*; objevily se v ní úryvky z Eukleidových *Základů*, z Apollóniových *Kuželoseček* a Theodosiovy *Sféricky*.

Aṭ-Ṭúsího žák, perský matematik, astronom, optik, fyzik a filozof Maḥmud ibn Mas'úd ibn Mušliḥ Quṭb ad-Dín aš-Šírází (1236–1311) je pravděpodobně autorem perské verze Túsího překladu *Základů*.⁸⁰

Muḥammad ibn Ashraf Šams ad-Dín as-Samarkandí (13. stol.), známý též pod jménem Šams ad-Dín Muḥammad ibn Ashraf al-Chusajni as-Samarkandí, rodák ze Samarkandu, matematik, fyzik a astronom, napsal práci *Aškál at-tá sís*⁸¹ (*Základní věty*), ve které vysvětlil 35 vět z první knihy *Základů*. Tato jeho práce se značně rozšířila; svědčí o tom i ta skutečnost, že zůstala zachována v řadě exemplářů.⁸² As-Samarkandí se zabýval i problematikou pátého postulátu. Provedl kritický rozbor prací Asira ad-Dína al-Abchariho (13. století), Džauháriho a Simplikia a na závěr uvedl svůj „důkaz“ pátého postulátu založený na studiu tečen, sečen a kolmic. Jeho práce je důležitým zdrojem informací o prehistorii neeukleidovské geometrie na blízkém Východě.⁸³ Zájem o pátý postulát a o as-Samarkandího práci dokládá i komentář, který roku 1413 sepsal Šaláh ad-Dín Músá ibn Muḥammad Qádí-záde ar-Rúmí (zemřel po r. 1413), syn soudce pocházejícího z Malé Asie. Jeho komentář se zachoval jako součást as-Samarkandího spisu *Základní věty*.

Pátým postulátem se ve třináctém století zabýval i Chusam ad-Dín as-Salar (popraven r. 1262), astronom mongolského chána Chulara. Napsal spis *Mukaddamat li-tabjín al-musadara allati zakaracha Uqlidis fí sadr al-makala al-ula fí ma jat' aku, bi-l-chutut al matawazijja* (*O zkrácení první knihy Eukleidových Základů*), ve kterém se pokusil zlepšit důkaz pátého postulátu Omara Chajjáma; zdá se však, že Chajjámovu postupu příliš nerozuměl.⁸⁴

Ve třináctém století projevovali zájem o matematiku i západní muslimové. Marocký matematik a astronom Abú-l-'Abbás Aḥmad ibn Muḥammad ibn

⁸⁰ Překlad se zachoval v knihovně v Istanbulu, jde o rukopis Yani Jámi 796.

⁸¹ Tato práce je známá i pod názvy *Kitáb akhál al-ta'sis* a *Risála al-riyáđiyá*.

⁸² Např. Gotha – rukopisy 1496 a 1497, Oxford – rukopis 967.2, Petrohrad – rukopisy 133 a 241, Istanbul – rukopis 2712/1.

⁸³ Více o životě a díle as-Samarkandího viz [HD] a [RJ1].

⁸⁴ Rukopis této práce je uložen v Mešchedu v tzv. knihovně imáma Rizy. Více viz [RCh].

’Uthamán al-Azdí ibn al-Banná (asi 1256 – 1321), autor řady spisů z aritmetiky,⁸⁵ geometrie, algebry, astronomie, astrologie atd., sepsal práci *Risála fí ’ilm al-musáha*, která obsahovala úvod ke studiu *Základů* a výklad o výpočtech povrchů těles. Více viz [Sch].

Zájemcům o arabskou matematiku, překladatelskou práci arabských matematiků a osud jednotlivých překladů Eukleidových *Základů* je možno doporučit práce [A], [B], [Bu], [Dj], [E], [Fo], [HLL], [Ja], [Ju], [Ke], [L], [Na], [Pl], [S], [Se1], [Se2], [Su6], [Su7], [CV], [Wa], [Hei], [Kl], [St1], [St2], [St3], [To], [Yo3] a [Wo].

LITERATURA

- [A] Abattouy M., *The History of Arabic Sciences*, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Preprint No. 53, Berlin, 1996.
- [AM] Amir-Móez Ali R. (transl.), *Omar Ibn Abraham al-Khayyami. Discussion of Difficulties in Euclid*, Scripta Mathematica **24** (1959), 275–303.
- [Be] Bečvář J., *Omar Chajjám – matematik, astronom, filozof, básník*, Učitel matematiky **5** (1996/97), 120–127.
- [B] Bergen J. L., *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, New York, 1986.
- [BH] Besthorn R. O., Heiberg J. L. (ed.), *Euclidis Elementa ex interpretatione al-Hadschdschadschii cum Commentariis al-Nairizii*, Kodaň, 1893, 1897, 1900, 1905, 1910 a 1932.
- [Br1] Brentjes S., *Varianten einer Haggag-Version von Buch II der Elemente*, in Vestigia Mathematica, Studies in medieval and early modern mathematics in honour of H. L. L. Busard, Amsterdam, Rodopi B. V., 1993, 47–67.
- [Br2] Brentjes S., *Textzeugen und Hypothesen zum arabischen Euklid in der Überlieferung von al-Ḥaǧǧāǧ b. Yūsuf b. Maǧar (zwischen 786 und 833)*, Archive for History of Exact Sciences **47** (1994), 53–92.
- [Br3] Brentjes S., *Two comments on Euclid’s „Elements“? On the relation between the Arabic text attributed to al-Nayrizi and the latin text ascribed to Anaritius*, Centaurus **43** (2001), 17–55.
- [Bu] Butzer P. L., Lohrmann D., *Science in Western and Eastern Civilization in Carolingian Times*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1993.
- [Cu] Curtze M. (ed.), *Anaritii in decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569*, Leipzig, 1899.
- [CV] Carra de Vaux B., *Astronomy and mathematics*, in T. W. Arnold, A. Guillaume: *The Legacy of Islam*, Oxford, 1931.
- [Dj] Djebbar A., *Quelques Commentaires sur les Versions arabes des Eléments d’Euclide et sur leur Transmission à l’Occident Musulman*, in *Mathematische Probleme im Mittelalter*, Harrassowitz Verlag, Wiesbaden, 1996, 91–114.
- [E] Engroff J. W., *The Arabic translation of Euclid’s Elements: Book V*, Ph.D. thesis, Harvard University, Cambridge, 1980.
- [Fo1] Folkerts M., *Euclid in Medieval Europe, Questio II. de rerum natura*, Mnichov, 1989.
- [Fo2] Folkerts M., *Mathematische Probleme im Mittelalter: Der lateinische und arabische Sprachbereich*, Harrassowitz, Wiesbaden, 1996.
- [Ga] Gabrieli G., *Nota bibliografica su Questá*, Rendiconti dei Accademia dei Lincei, classe d. sci. moral. **21** (1912), 341–382.
- [Gh] Ghorbani Abúl-Qasim, *Biographie des mathématiciens de l’époque islamique de 3e à 11e siècle de l’hégire*, Presses Universitaires de l’Iran, Teheran, 1995.

⁸⁵ Např. *Krátké objasnění aritmetických operací (Talchís fí a’-mál al-ḥisáb)*.

- [HD] Hâmid Dilgan, *Démonstration du V^e Postulat d'Euclid par Schams-ed-Din Samarkandi*; Traduction de l'ouvrage *Aschkâlüt-teesis de Samarkandi*, Revue d'histoire des sciences et de leurs applications **13** (1960), 191–196.
- [He] Heath T. L., *A History of Greek Mathematics, Vol. I., From Thales to Euclid*, Oxford, 1921.
- [Hei] Heiberg J. L., *Die arabische Tradition der Elemente Euklid's*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, hist.-lit. Abt. **29** (1884), 1–23.
- [H] Hermelik H., *Ibn al-Haytam (Alhazen)*, in *Die Großen der Weltgeschichte*, Band 3, Zürich, 1973, 158–173.
- [HLL] Holt P. M., Lambton A. K. S., Lewis B., *The Cambridge History of Islam*, Volume 2, University Press, Cambridge, 1970.
- [Ja] Jaouiche K., *La théorie de parallèles en pays d'Islam*, Paris, 1986.
- [Ju] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.
- [Ke] Kennedy E. S., *Studies in the Islamic Exact Sciences*, Beirut, 1983.
- [Kl] Klamroth M., *Über den arabischen Euklid*, Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft **35** (1881), 270–326, 788.
- [L] Lorch R., *Greek-Arabic-Latin: the Transmission of Mathematical Texts in the Middle Ages*, Preprint No. 82, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin, 1997.
- [Lo] Lokotsch K., *Avicenne. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik: Avicenna als Mathematiker, besonders die planimetrischen Bücher seiner Euklidübersetzung*, Erfurt, 1912.
- [M] Mamedbejli G. D., *Muhammed Nasireddin Tusi o teorii paralelnych linij i teorii otnošenij*, Baku, 1959.
- [Ma] Mansion P., *Sur le commentaire d'Anaritus relatif aux Éléments d'Euclide*, Annales de la société scientifique Bruxelles **24** (1900), 47–49.
- [Na] Nasr S. H., *Science and Civilization in Islam*, Cambridge, Mass., 1968.
- [Pl] Plooijs E. B., *Euclid's Conception of Ratio and his Definition of Proportional Magnitudes as Criticised by Arabian Commentators*, W. J. van Hengel, Rotterdam, 1950.
- [PR] Petrosjan G. B., Rozenfeld B. A., *Dokazatelstvo Aganisa pjatogo postulata Evklida*, Izvestija Akademii Nauk Armenskoj SSR, série f-m, část Istorija matematiky **13** (1960), 153–164.
- [RCh] Rozenfeld B. A., Chajretdinovoj N. G., *Predposylki dlja dokazatelstva postulata o paralelnych linijach, privedennogo Evklidom v načale pervoj knigi. Chusam ad-Din as-Salar*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **19** (1974), 285–293.
- [RJ1] Rozenfeld B. A., Juškevič A. P., *Dokazatelstva pjatogo postulata Evklida u Sabita ibn Korri a Šams ad-Dina as-Samarkandi*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **14** (1961), 587–592, překlad důkazu Samarkandiho je na str. 598–602.
- [RJ2] Rozenfeld B. A., Juškevič A. P., *Matematičeskie traktaty Omara Chajjama*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **6** (1953), 11–173, o komentářích k *Základům* na str. 67–107 a 143–167.
- [RJ3] Rozenfeld B. A., Juškevič A. P., *O traktate Nasir ad-Dína at-Tusi o paralelnych linijach*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **13** (1960), 475–482, o komentářích k *Základům* na str. 67–107 a 143–167.
- [Ro1] Rozenfeld B. A., *Dokazatelstva pjatogo postulata Evklida srednevekovych matematikov Hasana Ibn al-Hajsama i Lva Gersonida*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **11** (1958), 733–742.
- [Ro2] Rozenfeld B. A., *O matematičeskich rabotach Nasireddina Tusi*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **4** (1951), 489–512.
- [Ro3] Rozenfeld B. A., *Nasir ad-Dín at-Túsí: Traktat isceljajuščij somnenie po povodu paralelnych linij*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **13** (1960), 483–532.
- [S] Sarton G., *Introduction to the History of Science*, Vols. I.–III., Baltimore, 1931–1947.
- [Sa] Sabra A. I., *Thābit Ibn Qurra on Euclid's parallels postulate*, Journal of the Warburg and Courtauld Institutes **31** (1968), 12–32.

- [Se1] Sezgin F. (ed), *Islamic Mathematics and Astronomy*, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, Frankfurt, 1997–1999.
- [Se2] Sezgin F., *Geschichte des arabischen Schrifttums*, Band V., E. J. Brill, Leiden, 1974, o Eukleidových Základach na str. 83–120.
- [SCH] Suter H., Cheneb M. ben, *Encyclopaedia of Islam*, Vol. 2, 1907, o al-Banná na str. 805–810.
- [Sm] Smith D. E., *Euclid, Omar Khayyám, and Saccheri*, Scripta Mathematica **3** (1935), 5–10.
- [St1] Steinschneider M., *Die arabischen Übersetzungen aus dem Griechischen*, Graz, 1960.
- [St2] Steinschneider M., *Euklid bei den Arabern*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, historische-literarische Abtheilung **31** (1886), 81–110.
- [St3] Steinschneider M., *Die arabischen Uebersetzungen aus dem Griechischen*, Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft **50** (1896), 153–293.
- [Su1] Suter H., *Der Kommentar des Pappus zum X. Buche des Euklides*, Abhandlungen zur Geschichste der Naturwissenschaften, Heft 4 (1922), 9–78.
- [Su2] Suter H., *Zur Frage des von Nairizi zitierten Mathematikers „Diachasimus“*, Bibliotheca Mathematica **7** (1906), 396.
- [Su3] Suter H., *Über den Kommentar des Muhammed ben 'Abdelbâqî zum zehnten Buche des Euklides*, Bibliotheca Mathematica **7** (1906), 234–251.
- [Su4] Suter H., *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig, 1900.
- [Su5] Suter H., *Nachträge und Berichtigungen zu "Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke"*, Leipzig, 1902.
- [Su6] Suter H., *Beitrag zur Geschichte der Mathematik bei den Griechen und Arabern*, Erlangen, 1922.
- [Su7] Suter H., *Das Mathematiker-Verzeichniss im Fihrist des Ibn Abi Jakub an-Nadim. Zum ersten Mal vollständig ins Deutsche Übers. und mit Anm.*, Leipzig, 1892.
- [Su8] Suter H., *Einiges aus Nassir-ed-Dins Euklidausgabe*, Bibliotheca Mathematica **6** (1892), 234–251.
- [Sul] Sultanov R. M., *Nasireddin o postulate paralelnosti*, Izvestija A. N. Azerb. SSR, No. 10 (1951).
- [Ta] Tajaddud R. (ed.), *Al-Fihrist [Le catalogue]*, Téhéran, 1971.
- [Th] Thaer C., *Die Euklid-Überlieferung durch al-Ṭūsī*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik **3** (1936), 116–121.
- [To] Toomer J. G., *Lost Greek Mathematical Works in Arabic Translation*, Mathematical Intelligencer **6** (1984), 32–38.
- [Tu] Tummers P. M. J. E., *Anaritius. The Latin Translation of Anaritius' Commentary on Euclid's Elements of Geometry Book I-IV*, Ingenium Publishers, Nijmegen, 1994.
- [Vo] Vogel K., *The role of Byzantium as an intermediary in the transmission of ancient and Arabic mathematics to the west*, Actes du X⁰ Congrès International d'Historie des Sciences, Ithaca 1962 (1964), Paris, 537–539.
- [Wa] Walzer R., *Greek into Arabic*, Oxford, 1962.
- [Wi] Wiedemann E., *Zu der Redaction von Euklids Elementen durch Naṣīr al-dīn al-Ṭūsī*, Sitzungsberichte der Phys. med. Sozietät **58** (1928), 228–236.
- [Wo] Woepcke F., *Notice des traductions arabes de deux ouvrages perdus d'Euclide*, Journal Asiatique, 4. série, **18** (1851), 217–247.
- [Yo1] Young G. De, *New traces of the lost al-Ḥajjāj arabic Translations of Euclid's Elements'*, Physis **28** (1991), 647–666.
- [Yo2] Young G. De, *Ishaq ibn Hunayn, Hunayn ibn Ishaq, and the Third Arabic Translation of Euclid's Elements*, Historia Mathematica **19** (1992), 188–199.
- [Yo3] Young G. De, *The Arabic Textual Traditions of Euclid's Elements*, Historia Mathematica **11** (1984), 147–160.