KAPITOLA IV

PŘEVEDENÍ INTEGRACE $(r+s)$-ROZMĚRNÉ NA SLED INTEGRACE r-ROZMĚRNÉ A s-ROZMĚRNÉ

§ 1. Věta Fubiniova. Budiž μ_1 funkce s vlastností $\boldsymbol{S}_r$, budiž μ_2 funkce s vlastností $\boldsymbol{S}_s$, takže μ_1 dává míru v $\boldsymbol{E}_r$, μ_2 dává míru v $\boldsymbol{E}_s$. Z příkl. 7 v kap. I, § 6 víme toto: Jestliže pro omezené intervaly $I_1 \subset \boldsymbol{E}_r$, $I_2 \subset \boldsymbol{E}_s$ definujeme

(1) $$\mu_{12}(I_1 \times I_2) = \mu_1(I_1) \, . \, \mu_2(I_2) \, ,$$

má μ_{12} vlastnost $\boldsymbol{S}_{r+s}$, t. j. dává míru v $\boldsymbol{E}_{r+s}$. Naším cílem je pak důkaz této věty:

Věta 70 (Fubiniova). *Nechť μ_1 má vlastnost $\boldsymbol{S}_r$, nechť μ_2 má vlastnost $\boldsymbol{S}_s$. Definujme μ_{12} rovnicí* (1). *Potom jest*

(2) $$\int\limits_{\boldsymbol{E}_{r+s}} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_{12} = \int\limits_{\boldsymbol{E}_r} \Big(\int\limits_{\boldsymbol{E}_s} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_2\Big) \, \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\boldsymbol{E}_s} \Big(\int\limits_{\boldsymbol{E}_r} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_1\Big) \, \mathrm{d}\mu_2 \, ,$$

jestliže první z napsaných integrálů existuje.

Ježto jsme zde užili jisté „licence" v psaní (naše standardní označení je $\int\limits_{\boldsymbol{E}_{r+s}} f \, \mathrm{d}\mu_{12}$), je třeba vysvětlení. Body $z \in \boldsymbol{E}_{r+s}$ budeme zde obyčejně značiti $[x, y]$, kde $x = [x_1, \ldots, x_r] \in \boldsymbol{E}_r$, $y = [y_1, \ldots, y_s] \in \boldsymbol{E}_s$, načež $[x, y]$ značí bod $[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]$. V (2) je f funkcí $r + s$ proměnných; první integrál znamená $\int\limits_{\boldsymbol{E}_{r+s}} f \, \mathrm{d}\mu_{12}$. V druhém členu značí $\int\limits_{\boldsymbol{E}_s} f(x, y) \, . \, \mathrm{d}\mu_2$ integrál, kde se při pevně zvoleném x integruje „podle y", takže výsledek závisí na x, t. j. $\int\limits_{\boldsymbol{E}_s} f(x, y) \, \mathrm{d}\mu_2 = F(x)$. Druhý člen v rovnici (2) značí pak ovšem $\int\limits_{\boldsymbol{E}_r} F \, \mathrm{d}\mu_1$. Podobně je to ve třetím členu, kde „uvnitř" se při pevném y integruje „podle x" a výsledek (jenž je funkcí y) integrujeme „podle y".

Aby při důkazu nemohl nastati omyl, zaveďme důsledně označení z **D II**, kap. I, § 8, pozn. 3: Je-li $M \subset \boldsymbol{E}_{r+s}$ a zvolím-li libovolně $x \in \boldsymbol{E}_r$, značí $M^{x,*}$ množinu všech $y \in \boldsymbol{E}_s$, pro které je $[x, y] \in M$. Je-li f funkce $r + s$ proměnných v oboru M a zvolím-li libovolně $x \in \boldsymbol{E}_r$, značí $f^{x,*}$

funkci s proměnných v oboru $M^{x,*}$, definovanou rovnicí $f^{x,*}(y) = f(x, y)$ (populárně: $f^{x,*}$ je funkce $f(x, y)$, pojímaná jako funkce bodu y při pevném x). Symetricky definujeme $M^{*,y}$, $f^{*,y}$ (t. j. $f(x, y)$ jakožto funkci bodu x při pevném y). Při tomto označení $\int\limits_{E_s} f(x, y)\, d\mu_2$ značí $\int\limits_{E_s} f^{x,*}\, d\mu_2$. Vyslovme větu 70 ještě jednou v této symbolice:

Věta 70a. *μ_1, μ_2, μ_{12} jako ve větě 70. Nechť*

$$\int\limits_{E_{r+s}} f\, d\mu_{12} \tag{3}$$

existuje. Potom platí: Položíme-li

$$F(x) = \int\limits_{E_s} f^{x,*}\, d\mu_2\,, \quad \mathfrak{F}(y) = \int\limits_{E_r} f^{*,y}\, d\mu_1\,, \tag{4}$$

jest

$$\int\limits_{E_{r+s}} f\, d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} F\, d\mu_1 = \int\limits_{E_s} \mathfrak{F}\, d\mu_2\,. \tag{5}$$

Poznámka 1. V této větě je implicite obsaženo:

1. $F(x)$ je nutně (viz (5)) definováno μ_1-skoro všude v E_r, t. j. je definováno pro všechna $x \in E_r \dot{-} N$, kde $\mu_1(N) = 0$.

2. Pro každé $x \in E_r \dot{-} N$ plyne z existence prvního integrálu v (4), že $f^{x,*}$ (t. j. funkce f jakožto funkce bodu y při pevném x) je μ_2-měřitelná v E_s.

3. Je možno dále vysloviti symetrická tvrzení, týkající se funkcí $\mathfrak{F}$, $f^{*,y}$ — nebudu je uvádět.

4. Z (5) je vidět, že existují integrály $\int\limits_{E_r} F\, d\mu_1$, $\int\limits_{E_s} \mathfrak{F}\, d\mu_2$.

To všechno tedy plyne z existence $\int\limits_{E_{r+s}} f\, d\mu_{12}$.

Ve větě 70a máme dokázati rovnost prvního a druhého integrálu v (5) a potom rovnost prvního a třetího. Kdekoliv v důkazu se mně naskytne nutnost dokázati dvě taková symetrická tvrzení odděleně, *dokazuji většinou jen jedno z nich a druhé přenechávám beze slova čtenáři.*

Dokažme napřed větu 70a za předpokladu, že je $f(x, y) \geqq 0$ všude (nejenom skoro všude) v E_{r+s}[1]) — přechod k obecnému případu bude pak již snadný. T. j. dokažme tuto (pomocnou) větu:[2])

---

[1]) K existenci prvního integrálu v (5) stačí pak μ_{12}-měřitelnost funkce f v E_{r+s}.

[2]) μ_1, μ_2, μ_{12} mají v § 1 a 2 stále týž význam jako ve větě 70.

Věta 71. *Budiž f funkce $r + s$ proměnných, jež má tyto vlastnosti:*

Vlastnost α. Pro všechna $[x, y] \in \mathsf{E}_{r+s}$ je $f(x, y) \geqq 0$.

Vlastnost β. f je μ_{12}-měřitelná v E_{r+s}.

Potom má f také tuto

Vlastnost γ. Definuji-li F, $\mathfrak{F}$ rovnicemi (4), *platí rovnice* (5).

Pro zkrácení budeme říkati, že f má vlastnost V, jestliže má vlastnosti α, β, γ.

Pomocná věta. *Nechť funkce $f, g, f_1, f_2, \ldots$ mají vlastnost V. Potom platí:*

1. Funkce $f + g$ má vlastnost V.

2. Nechť je všude $g(x, y) \leqq f(x, y) < +\infty$ a nechť $\int\limits_{\mathsf{E}_{r+s}} g \,\mathrm{d}\mu_{12} < +\infty$. Potom $f - g$ má vlastnost V.

3. Budiž c konečné kladné číslo; potom cf má vlastnost V.

4. Nechť je všude $f_n(x, y) \leqq f_{n+1}(x, y)$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ Potom funkce $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x, y) = \varphi(x, y)$ má vlastnost V.

Důkaz. Začněme tvrzením 2. Podle předpokladů má rozdíl

$$I = \int\limits_{\mathsf{E}_{r+s}} f \,\mathrm{d}\mu_{12} - \int\limits_{\mathsf{E}_{r+s}} g \,\mathrm{d}\mu_{12} \tag{6}$$

smysl, takže podle věty 59 je

$$I = \int\limits_{\mathsf{E}_{r+s}} (f - g) \,\mathrm{d}\mu_{12} \,. \tag{7}$$

Ježto f, g mají vlastnost V, je podle (5)

$$I = \int\limits_{\mathsf{E}_r} F \,\mathrm{d}\mu_1 - \int\limits_{\mathsf{E}_r} G \,\mathrm{d}\mu_1 \,, \tag{8}$$

kde

$$F(x) = \int\limits_{\mathsf{E}_s} f^{x,*} \,\mathrm{d}\mu_2 \,, \quad G(x) = \int\limits_{\mathsf{E}_s} g^{x,*} \,\mathrm{d}\mu_2 \tag{9}$$

existují pro μ_1-skoro všechna x. Opět podle věty 59 je

$$I = \int\limits_{\mathsf{E}_r} (F - G) \,\mathrm{d}\mu_1 \,. \tag{10}$$

Pro μ_1-skoro všechna x má tedy rozdíl

$$F(x) - G(x) = \int\limits_{\mathsf{E}_s} f^{x,*} \,\mathrm{d}\mu_2 - \int\limits_{\mathsf{E}_s} g^{x,*} \,\mathrm{d}\mu_2 \tag{11}$$

smysl, jeho hodnota je pak podle věty 59 rovna $\int\limits_{E_s}(f^{x,*} - g^{x,*})\,d\mu_2$. Tedy lze (10) psáti ve tvaru

$$I = \int\limits_{E_r}(\int\limits_{E_s}(f^{x,*} - g^{x,*})\,d\mu_2)\,d\mu_1\,. \tag{12}$$

Srovnáme-li (12) s (7), vidíme, že $f - g$ má vlastnost V.

Důkaz tvrzení 1 je obdobný; ježto však v něm jde o **součty** nezáporných čísel, nevyžaduje tolik opatrnosti.

Důkaz tvrzení 3. Uvědomme si, že symbol $\int cf\,d\mu$ značí totéž jako $c\int f\,d\mu$ (věta 54). Ježto f má vlastnost V, plyne ihned

$$\int\limits_{E_{r+s}} cf\,d\mu_{12} = c\int\limits_{E_{r+s}} f\,d\mu_{12} = c\int\limits_{E_r}(\int\limits_{E_s} f^{x,*}\,d\mu_2)\,d\mu_1 =$$
$$= \int\limits_{E_r}(c\int\limits_{E_s} f^{x,*}\,d\mu_2)\,d\mu_1 = \int\limits_{E_r}(\int\limits_{E_s} cf^{x,*}\,d\mu_2)\,d\mu_1\,.$$

Důkaz tvrzení 4. Položme

$$F_n(x) = \int\limits_{E_s} f_n^{x,*}\,d\mu_2\,; \tag{13}$$

ježto f_n mají vlastnost V, existují integrály $F_n(x)$ μ_1-skoro všude, řekněme pro $x \in E_r \dot{-} N$, kde $\mu_1(N) = 0$. Pro tato x je $0 \leqq f_n^{x,*}(y) \leqq$ $\leqq f_{n+1}^{x,*}(y)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{x,*}(y) = \varphi^{x,*}(y)$, takže podle věty 57 a 43 existuje

$$\Phi(x) = \int\limits_{E_s}\varphi^{x,*}\,d\mu_2 = \lim_{n\to\infty} F_n(x)\,, \quad 0 \leqq F_n(x) \leqq F_{n+1}(x) \tag{14}$$

pro každé $x \in E_r \dot{-} N$. Dále je podle předpokladu

$$\int\limits_{E_{r+s}} f_n\,d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} F_n\,d\mu_1\,, \tag{15}$$

načež podle (14) a podle věty 57 máme

$$\int\limits_{E_r}\Phi\,d\mu_1 = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_r} F_n\,d\mu_1\,,\ \int\limits_{E_{r+s}}\varphi\,d\mu_{12} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{E_{r+s}} f_n\,d\mu_{12}\,, \tag{16}$$

načež z (16), (15), (14) plyne hledaný vztah

$$\int\limits_{E_{r+s}}\varphi\,d\mu_{12} = \int\limits_{E_r}\Phi\,d\mu_1 = \int\limits_{E_r}(\int\limits_{E_s}\varphi^{x,*}\,d\mu_2)\,d\mu_1\,.$$

Důkaz věty 71 provedeme postupně.

A) Buďte $I_1 \subset E_r$, $I_2 \subset E_s$ omezené intervaly, $I = I_1 \times I_2$. Tvrdím, že charakteristická funkce χ_I má vlastnost V. Důkaz: Předně je (viz (1))

$$\int\limits_{E_{r+s}}\chi_I\,d\mu_{12} = \int\limits_I d\mu_{12} = \mu_{12}(I) = \mu_1(I_1)\,.\,\mu_2(I_2)\,. \tag{17}$$

Za druhé: Je-li $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} I_1$, je $\chi_I(x, y) = 0$ pro každé y, tedy $F(x) = \int_{\mathbf{E}_s} \chi_I^{x,*} \, d\mu_2 = 0$. Je-li však $x \in I_1$, je $\chi_I(x, y) = 1$ pro $y \in I_2$, ale $\chi_I(x, y) = 0$ pro $y \in \mathbf{E}_s \dot{-} I_2$, tedy $F(x) = \int_{\mathbf{E}_s} \chi_I^{x,*} \, d\mu_2 = \int_{I_2} d\mu_2 = \mu_2(I_2)$. Tedy

$$\int_{\mathbf{E}_r} F \, d\mu_1 = \int_{I_1} F \, d\mu_1 = \int_{I_1} \mu_2(I_2) \, d\mu_1 = \mu_2(I_2) \int_{I_1} d\mu_1 = \mu_2(I_2) \, . \, \mu_1(I_1) \, ;$$

srovnáním s (17) vidíme, že χ_I má vlastnost V. Tím jsme odbyli nejjednodušší případ; užitím pomocné věty budeme nyní přecházeti postupně k případům stále složitějším.

B) Budiž $M \in \mathfrak{A}_{r+s}$ (viz kap. I, § 5, def. 1; t. j. M je sjednocení konečného počtu omezených intervalů v $\mathbf{E}_{r+s}$). Podle věty 2 lze psáti M jako disjunktní sjednocení $M = \bigcup_{m=1}^{n} I_m$ omezených intervalů, načež zřejmě $\chi_M = \sum_{m=1}^{n} \chi_{I_m}$. Podle **A)** a podle pomocné věty (tvrzení 1) má charakteristická funkce χ_M vlastnost V.

C) Budiž M otevřená v $\mathbf{E}_{r+s}$. Lze tedy psáti (viz pozn. 6 v kap. I, § 5) $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$, kde I_m jsou omezené intervaly; píšeme-li $A_n = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$, je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ Tedy (viz kap. II, § 3, pozn. 1) $\chi_{A_1} \leqq \chi_{A_2} \leqq \ldots$, $\lim_{n \to \infty} \chi_{A_n} = \chi_M$. Ale $A_n \in \mathfrak{A}_{r+s}$. Tedy z **B)** a z pomocné věty (tvrzení 4) plyne, že χ_M má vlastnost V.

D) Budiž M omezená množina typu G_δ v $\mathbf{E}_{r+s}$. Tedy existuje omezený otevřený interval I a otevřené množiny $G_1, G_2, \ldots$ tak, že $M \subset I$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Množiny $A_n = I \, . \, G_1 \, . \, G_2 \ldots G_n$ jsou tedy otevřené, $I \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Tedy

$$\chi_I \geqq \chi_{A_1} \geqq \chi_{A_2} \geqq \cdots, \quad \chi_M = \lim_{n \to \infty} \chi_{A_n} \, ;$$

odtud

$$0 \leqq \chi_I - \chi_{A_1} \leqq \chi_I - \chi_{A_2} \leqq \cdots, \quad \lim \, (\chi_I - \chi_{A_n}) = \chi_I - \chi_M \geqq 0 \, .$$

Podle **C)** a podle pomocné věty (tvrzení 2) mají funkce $\chi_I - \chi_{A_n}$ vlastnost V (ježto $\int\limits_{E_{r+s}} \chi_{A_n} \, d\mu_{12} \leqq \int\limits_{E_{r+s}} \chi_I \, d\mu_{12} = \mu_{12}(I) < +\infty$). Podle tvrzení 4 pomocné věty má tedy $\chi_I - \chi_M$ vlastnost V. Avšak $\chi_M = \chi_I - (\chi_I - \chi_M)$ a mimo to

$$\chi_I - \chi_M \leqq \chi_I, \quad \int\limits_{E_{r+s}} (\chi_I - \chi_M) \, d\mu_{12} \leqq \int\limits_{E_{r+s}} \chi_I \, d\mu_{12} < +\infty .$$

Podle pomocné věty (tvrzení 2) má tedy χ_M vlastnost V.

E) Budiž M typu G_δ v E_{r+s}. Položme $I_n = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{z}(z \in E_{r+s}, \|z\| < n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.[3] Množiny $MI_1 \subset MI_2 \subset MI_3 \subset \ldots$ jsou omezené a typu G_δ a jest $\lim\limits_{n\to\infty} MI_n = M$. Tedy $\chi_{MI_n} \leqq \chi_{MI_{n+1}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{MI_n} = \chi_M$; podle **D)** a podle pomocné věty (tvrzení 4) má tedy χ_M vlastnost V.

F) Budiž $M \subset E_{r+s}$, $\mu_{12}(M) = 0$. Podle věty 20 existuje množina N typu G_δ tak, že je $M \subset N$, $\mu_{12}(N) = 0$. Položme $F_0(x) = \int\limits_{E_s} \chi_N^{x,*} \, d\mu_2$. Ježto χ_N má podle **E** vlastnost V, platí

$$\int\limits_{E_r} F_0 \, d\mu_1 = \int\limits_{E_{r+s}} \chi_N \, d\mu_{12} = \int\limits_N d\mu_{12} = \mu_{12}(N) = 0 . \tag{18}$$

Přitom je zřejmě $F_0(x) \geqq 0$ všude, kde je definováno, tedy skoro všude, t. j. pro všechna $x \in E_r \dot{-} P$, kde $\mu_1(P) = 0$. Podle věty 46 a podle (18) je tedy

$$F_0(x) = \int\limits_{E_s} \chi_N^{x,*} \, d\mu_2 = 0 \tag{19}$$

pro μ_1-skoro všechna x, řekněme pro všechna $x \in E_r \dot{-} Q$, kde $\mu_1(Q) = 0$. Poznamenejme, že $\chi_N^{x,*}(y) \geqq 0$ pro každé $y \in E_s$. Je-li tedy $x \in E_r \dot{-} Q$, plyne z (19) podle věty 46, že pro μ_2-skoro všechna y je $\chi_N^{x,*}(y) = 0$ a tedy i $\chi_M^{x,*}(y) = 0$ (ježto $M \subset N$), tedy

$$F(x) = \int\limits_{E_s} \chi_M^{x,*} \, d\mu_2 = 0 \text{ pro } x \in E_r \dot{-} Q ; \tag{20}$$

tedy $\int\limits_{E_r} F \, d\mu_1 = 0$ a současně též $\int\limits_{E_{r+s}} \chi_M \, d\mu_{12} = \mu_{12}(M) = 0$, takže platí γ, t. j. χ_M má vlastnost V.

G) Budiž $M \subset E_{r+s}$ množina μ_{12}-měřitelná. Podle věty 20 lze psáti $M = N \dot{-} P$, kde N je typu G_δ, $P \subset N$, $\mu_{12}(P) = 0$. Tedy $\chi_N = \chi_M + \chi_P$

[3]) Kladu $\|z\| = \max\limits_{1 \leqq i \leqq r+s} |z_i|$.

a funkce χ_N, χ_P mají vlastnost V podle **E)**, **F)**. Dále je $0 \leqq \chi_P \leqq \chi_N$, $\int\limits_{\mathbf{E}_{r+s}} \chi_P \,\mathrm{d}\mu_{12} = \mu_{12}(P) = 0$, takže podle pomocné věty (tvrzení 2) má $\chi_M = \chi_N - \chi_P$ vlastnost V. Tedy: charakteristická funkce každé μ_{12}-měřitelné množiny má vlastnost V. Stojí za to vysloviti tento částečný výsledek jako větu.

Věta 72. *μ_1, μ_2, μ_{12} jako ve větě 70. Budiž $M \subset \mathbf{E}_{r+s}$ množina μ_{12}-měřitelná. Potom je*

$$\mu_{12}(M) = \int\limits_{\mathbf{E}_r} \mu_2(M^{x,*}) \,\mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\mathbf{E}_s} \mu_1(M^{*,y}) \,\mathrm{d}\mu_2 \,. \tag{21}$$

(Podrobněji: $\mu_{12}(M) = \int\limits_{\mathbf{E}_r} F \,\mathrm{d}\mu_1$, kde $F(x) = \mu_2(M^{x,*})$.)

Smysl věty je velmi názorný; načrtněte si to na př. pro Lebesgueovu míru, $r = s = 1$.

Důkaz. Jest (podle **G)**)

$$\mu_{12}(M) = \int\limits_{\mathbf{E}_{r+s}} \chi_M \,\mathrm{d}\mu_{12} = \int\limits_{\mathbf{E}_r} F \,\mathrm{d}\mu_1 \,,$$

kde $F(x) = \int\limits_{\mathbf{E}_s} \chi_M^{x,*} \,\mathrm{d}\mu_2$. Ale $\chi_M^{x,*}$ je zřejmě charakteristická funkce množiny $M^{x,*}$, takže $F(x) = \int\limits_{\mathbf{E}_s} \chi_{M^{x,*}} \,\mathrm{d}\mu_2 = \mu_2(M^{x,*})$, čímž je důkaz proveden.

Důsledek. Je-li $M \subset \mathbf{E}_{r+s}$ množina μ_{12}-měřitelná, je množina $M^{x,*}$ μ_2-měřitelná pro μ_1-skoro všechna x a množina $M^{*,y}$ je μ_1-měřitelná pro μ_2-skoro všechna y. Neboť z (21) plyne, že $\mu_2(M^{x,*})$ existuje pro skoro všechna x.

Ještě speciální případ věty 72:

Věta 73. *μ_1, μ_2, μ_{12} jako ve větě 70. Budiž $\mu_{12}(M) = 0$. Potom je $\mu_2(M^{x,*}) = 0$ pro μ_1-skoro všechna x a $\mu_1(M^{*,y}) = 0$ pro μ_2-skoro všechna y.* Opět velmi názorné.

Důkaz. Podle (21) je $\int\limits_{\mathbf{E}_r} \mu_2(M^{x,*}) \,\mathrm{d}\mu_1 = 0$; integrand není nikde záporný, tedy je pro skoro všechna x roven nule (věta 46).

Důsledek. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_{r+s}$; buďte f, g funkce μ_{12}-ekvivalentní v M. Potom pro μ_1-skoro všechna $x \in \mathbf{E}_r$ jsou funkce $f^{x,*}$, $g^{x,*}$ μ_2-ekvivalentní*

$v\ M^{x,*}$.[4]) Důkaz: Budiž N množina oněch bodů $[x, y] \in M$, pro něž není $f(x, y) = g(x, y)$ (buďto proto, že některá z obou funkcí není v tom bodě definována, nebo proto, že mají různé hodnoty). Pro každé $x \in \mathbf{E}_r$ je tedy $N^{x,*}$ množina oněch bodů $y \in M^{x,*}$, pro něž není $f^{x,*}(y) = g^{x,*}(y)$ (t. j. $f(x, y) = g(x, y)$). Podle předpokladu je $\mu_{12}(N) = 0$ a tedy podle věty 73 je $\mu_2(N^{x,*}) = 0$ pro μ_1-skoro všechna $x \in \mathbf{E}_r$.

Dokončíme, po této odbočce, důkaz věty 71.

H) Budiž f funkce jednoduchá, konečná a nezáporná v $\mathbf{E}_{r+s}$, jež je μ_{12}-měřitelná v $\mathbf{E}_{r+s}$. Tvrdím, že f má vlastnost V. Důkaz: Je-li $f(z) = 0$ pro všechna $z \in \mathbf{E}_{r+s}$, je to jasné. Není-li tomu tak, buďte $c_1 < c_2 < \ldots < c_n$ ony kladné hodnoty, jichž f nabývá. Položme $M_i = \underset{z}{\mathcal{E}}(f(z) = c_i)$; tyto množiny jsou μ_{12}-měřitelné a zřejmě $f = c_1\chi_{M_1} + \ldots + c_n\chi_{M_n}$. Z bodu **G)** a z pomocné věty (tvrzení 1 a 3) plyne výsledek.

K) Budiž f funkce nezáporná všude v $\mathbf{E}_{r+s}$, která je μ_{12}-měřitelná v $\mathbf{E}_{r+s}$. Tvrdím, že f má vlastnost V (tím bude dokázáno, že každá funkce s vlastnostmi α, β má též vlastnost γ, t. j. bude dokázána věta 71). Důkaz: Podle věty 39 existuje posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$ jednoduchých, konečných a μ_{12}-měřitelných v $\mathbf{E}_{r+s}$, která pro každé $z \in \mathbf{E}_{r+s}$ vyhovuje podmínkám

$$0 \leqq f_1(z) \leqq f_2(z) \leqq \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)\,.$$

Podle **H)** mají f_n vlastnost V; podle pomocné věty (tvrzení 4) má tedy též f vlastnost V.

Nyní snadno provedeme

Důkaz věty 70a. Nechť

$$I = \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f\,\mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f^+\,\mathrm{d}\mu_{12} - \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f^-\,\mathrm{d}\mu_{12} \tag{22}$$

existuje a nechť napřed je f definováno všude v $\mathbf{E}_{r+s}$. Podle věty 71 je

$$I_1 = \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f^+\,\mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_r} \varphi\,\mathrm{d}\mu_1\,, \quad I_2 = \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f^-\,\mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_r} \psi\,\mathrm{d}\mu_1\,, \tag{23}$$

kde

$$\varphi(x) = \int_{\mathbf{E}_s} (f^+)^{x,*}\,\mathrm{d}\mu_2\,, \quad \psi(x) = \int_{\mathbf{E}_s} (f^-)^{x,*}\,\mathrm{d}\mu_2\,. \tag{24}$$

---

[4]) Podobně pro $f^{*,y}$, $g^{*,y}$.

Podle (23) a podle věty 59 dostáváme

$$(25) \qquad I = \int_{\mathbf{E}_r} \varphi \, \mathrm{d}\mu_1 - \int_{\mathbf{E}_r} \psi \, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbf{E}_r} (\varphi - \psi) \, \mathrm{d}\mu_1 \, .$$

Rozdíl $\varphi(x) - \psi(x)$ má tedy smysl pro skoro všechna x, řekněme pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} P$, kde $\mu_1(P) = 0$. Pro tato x je tedy podle (24)

$$(26) \qquad \varphi(x) - \psi(x) = \int_{\mathbf{E}_s} (f^+)^{x,*} \, \mathrm{d}\mu_2 - \int_{\mathbf{E}_s} (f^-)^{x,*} \, \mathrm{d}\mu_2 \, .$$

Je zřejmě $(f^+)^{x,*} = (f^{x,*})^+$, neboť hodnota levé i pravé strany v bodě y je zřejmě $\max\,(f(x, y), 0)$; podobně pro f^-. Výraz (26) lze tedy psáti (podle definice integrálu, bod II)

$$(27) \qquad \int_{\mathbf{E}_s} (f^{x,*})^+ \, \mathrm{d}\mu_2 - \int_{\mathbf{E}_s} (f^{x,*})^- \, \mathrm{d}\mu_2 = \int_{\mathbf{E}_s} f^{x,*} \, \mathrm{d}\mu_2 \, .$$

Podle (22), (25), (26), (27) tedy vskutku platí

$$I = \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f \, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_r} F \, \mathrm{d}\mu_1 \, ,$$

kde

$$F(x) = \varphi(x) - \psi(x) = \int_{\mathbf{E}_s} f^{x,*} \, \mathrm{d}\mu_2 \, .$$

Zbývá provésti důkaz ještě v tom případě, že (22) existuje, ale $f(x, y)$ je definováno pouze skoro všude, řekněme pro $[x, y] \in \mathbf{E}_{r+s} \dot{-} Q$, kde $\mu_{12}(Q) = 0$. Definujme $g(x, y) = f(x, y)$ pro $x \in \mathbf{E}_{r+s} \dot{-} Q$, $g(x, y) = 0$ pro $x \in Q$. Ježto g, f jsou μ_{12}-ekvivalentní v $\mathbf{E}_{r+s}$ a ježto g je definováno všude, je podle případu právě dokázaného

$$(28) \qquad \int_{\mathbf{E}_{r+s}} f \, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_{r+s}} g \, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_r} G \, \mathrm{d}\mu_1 \, ,$$

kde $G(x) = \int_{\mathbf{E}_s} g^{x,*} \, \mathrm{d}\mu_2$. Podle důsledku věty 73 jsou však pro μ_1-skoro všechna x (řekněme pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} R$, kde $\mu_1(R) = 0$) funkce $g^{x,*}$, $f^{x,*}$ μ_2-ekvivalentní v $\mathbf{E}_s$, takže pro tato x (t. j. pro skoro všechna $x \in \mathbf{E}_r$) je $G(x) = F(x)$, klademe-li $F(x) = \int_{\mathbf{E}_s} f^{x,*} \, \mathrm{d}\mu_2$; odtud a z (28) plyne tvrzení věty 70a.

Poznámka 2. Důležitost věty 70 je zřejmá: tato věta nám dovoluje — jestliže μ_{12} je definováno rovnicí (1) — převésti $(r + s)$-rozměrnou integraci na sled integrace s-rozměrné a r-rozměrné. Vzhledem k důležitosti této věty — kterou si ověříme na mnoha příkladech — připojím k ní ještě několik poznámek rázu spíše početně-technického.

Především poznamenejme, že věta 70a (neboli 70) platí též pro komplexní f, jestliže předpokládáme, že $\int\limits_{E_{r+s}} f \, d\mu_{12}$ *konverguje.*

Důkaz. Rozložme f na reálnou a imaginární část: $f = \varphi + i\psi$, takže máme podle věty 70a tyto rovnice mezi konvergentními integrály:

(28a) $$\int\limits_{E_{r+s}} \varphi \, d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} \Phi \, d\mu_1 \,, \quad \int\limits_{E_{r+s}} \psi \, d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} \Psi \, d\mu_1 \,,$$

kde

$$\Phi(x) = \int\limits_{E_s} \varphi^{x,*} \, d\mu_2 \,, \quad \Psi(x) = \int\limits_{E_s} \psi^{x,*} \, d\mu_2$$

jsou konečné pro skoro všechna x; t. j. pro všechna $x \in E_r \dot{-} N$ $(\mu_1(N) = 0)$ jsou poslední dva integrály konvergentní. Pro tato x je tedy — podle definice integrálu komplexní funkce —

$$\Phi(x) + i\,\Psi(x) = \int\limits_{E_s} (\varphi^{x,*} + i\psi^{x,*}) \, d\mu_2 = \int\limits_{E_s} f^{x,*} \, d\mu_2 \,;$$

to je však funkce $F(x)$ z věty 70a. Ale rovnice (28a) lze — opět podle definice integrálu komplexní funkce — psáti ve tvaru

$$\int\limits_{E_{r+s}} f \, d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} (\Phi + i\,\Psi) \, d\mu_1, \text{ t. j. } = \int\limits_{E_r} F \, d\mu_1 \,.$$

Poznámka 3. Dosud jsme ve větě 70 brali za integrační obor celý prostor E_{r+s} — bylo to formálně pohodlnější. Nyní se zbavíme tohoto omezení. Nechť μ_1, μ_2, μ_{12} mají týž význam jako ve větě 70. Budiž $M \subset E_{r+s}$. Potom je

(29) $$\int\limits_M f \, d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} F \, d\mu_1, \text{ kde } F(x) = \int\limits_{M^{x,*}} f^{x,*} \, d\mu_2 \,,$$

jestliže integrál vlevo existuje.

Důkaz. Existuje-li integrál vlevo, je M μ_{12}-měřitelná. Položím-li $f(z) = f(x, y) = 0$ pro $z \in E_{r+s} \dot{-} M$, je podle věty 70

(30) $$\int\limits_M f \, d\mu_{12} = \int\limits_{E_{r+s}} f \, d\mu_{12} = \int\limits_{E_r} F \, d\mu_1, \text{ kde } F(x) = \int\limits_{E_s} f^{x,*} \, d\mu_2 \,.$$

Vezměme nějaké $x \in E_r$. Jestliže y non $\in M^{x,*}$, je $[x, y]$ non $\in M$, tedy $f^{x,*}(y) = f(x, y) = 0$.

Jestliže tedy $M^{x,*}$ je množina μ_2-měřitelná — a to je podle důsledku věty 72 splněno pro μ_1-skoro všechna $x \in \mathbf{E}_r$ — můžeme psáti

(31) $$F(x) = \int_{\mathbf{E}_s} f^{x,*}\, \mathrm{d}\mu_2 = \int_{M^{x,*}} + \int_{\mathbf{E}_s \dot{-} M^{x,*}} = \int_{M^{x,*}} f^{x,*}\, \mathrm{d}\mu_2\,,$$

takže vskutku lze (30) psáti ve tvaru (29).

Poznámka 4. *Projekcí* množiny $M \subset \mathbf{E}_{r+s}$ do prostoru prvních r souřadnic nazveme množinu všech bodů $x = [x_1, \ldots, x_r]$, pro které je $M^{x,*} \neq \emptyset$ (velmi názorný pojem). Označme tuto projekci P. Je-li $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} P$, je $F(x) = 0$ (podle (31)).

Jestliže tedy P_0 je jakákoliv μ_1-měřitelná množina, obsahující projekci P množiny M, můžeme místo (29) *psáti*

(32) $$\int_M f\, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_{P_0} F\, \mathrm{d}\mu_1\,,$$

neboť potom

$$\int_{\mathbf{E}_r} F\, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{P_0} + \int_{\mathbf{E}_r \dot{-} P_0}$$

a poslední integrál je nula. Speciálně: *je-li projekce P sama μ_1-měřitelná* (to je nejčastější případ v praxi), *můžeme v* (32) *psáti $P_0 = P$.*

Poznamenejme, že P nemusí být μ_1-měřitelná, i když M je μ_{12}-měřitelná. Příklad: Budiž $r = s = 1$; μ_1 i μ_2 budiž Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_1$, takže μ_{12} je Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_2$. Budiž P nějaká množina v $\mathbf{E}_1$, která není μ_1-měřitelná (existence takové množiny byla dokázána ve větě 31). Budiž M množina všech bodů $[x, 0] \in \mathbf{E}_2$, kde $x \in P$. Ježto M je částí „osy x", t. j. zvrhlého intervalu v $\mathbf{E}_2$, je M μ_{12}-měřitelná, totiž $\mu_{12}(M) = 0$. Projekcí množiny M na „osu x" je právě množina P, jež není μ_1-měřitelná.

Shrňme pozn. 3, 4 do této věty[5]) (kterou napíši s obvyklou „licencí"):

Věta 74. *μ_1, μ_2, μ_{12} jako ve větě 70. Budiž $M \subset \mathbf{E}_{r+s}$. Potom je*

(33) $$\int_M f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_{\mathbf{E}_r} \Big(\int_{M^{x,*}} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_2 \Big)\, \mathrm{d}\mu_1 = \int_{\mathbf{E}_s} \Big(\int_{M^{*,y}} f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_1 \Big)\, \mathrm{d}\mu_2\,,$$

jestliže první z těchto integrálů existuje.

[5]) Připojuji ovšem ještě též druhou, symetrickou část (záměna x s y, μ_1 s μ_2). Podle pozn. 2 platí (33) i pro komplexní f, jestliže $\int_M f(x, y)\, \mathrm{d}\mu_{12}$ konverguje.

D o d a t e k: *Jestliže projekce P množiny M do prostoru prvních r souřadnic je μ_1-měřitelná, lze v druhém integrálu psáti $\int_P$ místo $\int_{E_r}$.*[6]) *Jestliže projekce Q množiny M do prostoru posledních s souřadnic je μ_2-měřitelná, lze v třetím integrálu psáti $\int_Q$ místo $\int_{E_s}$.*

Věta 74 je zobecněním věty 70; v tomto tvaru (spolu s Dodatkem) se jí nejvíce užívá v praxi. Propočtěme tři příklady — další příklady najde čtenář hlavně v kap. VII.

P ř í k l a d 1. Položme $r = s = 1$ a počítejme Lebesgueův integrál

$$I = \int\limits_{\substack{0<x<1\\2<y<3}}\int \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y}\,.$$

Existence integrálu je zřejmá (integrand je kladný a spojitý, tedy měřitelný). Tedy lze psáti (podle věty 74 a Dodatku — načrtněte si integrační obor)

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_2^3 \frac{\mathrm{d}y}{x+y}\right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 (\lg(x+3) - \lg(x+2))\,\mathrm{d}x =$$
$$= 10 \lg 2 - 6 \lg 3\,.$$

Mohli bychom ovšem integrovat též v obráceném pořádku.

P ř í k l a d 2. Počítejme Lebesgueův integrál (integrační obor je polokruh)

$$I = \int\limits_{\substack{x>0\\x^2+y^2<1}}\int xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \tfrac{2}{3}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \tfrac{2}{15}\,.$$

P ř í k l a d 3. Budiž $0 < a < b$ a počítejme Lebesgueův integrál[7])

$$I = \int\limits_{\substack{0<x<1\\a<y<b}}\int x^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_a^b x^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x}\,\mathrm{d}x\,.$$

[6]) Trochu obecněji: Místo $\int_{E_r}$ můžeme psáti $\int_{P_0}$, kde P_0 je jakákoliv μ_1-měřitelná množina obsahující P.

[7]) Funkce $x^y = e^{y \lg x}$ je spojitá v polorovině $x > 0$.

Zde si nevíme rady; počítejme tedy v opačném pořádku:

$$I = \int_a^b \Big(\int_0^1 x^y \,\mathrm{d}x \Big) \mathrm{d}y = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y+1} = \lg \frac{b+1}{a+1} .$$

Tím jsme vypočítali I; současně jsme přechodem přes dvojný integrál stanovili hodnotu jednoduchého integrálu

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\lg x} \,\mathrm{d}x = \lg \frac{b+1}{a+1} .$$

S tímto obratem (výpočet jednoduchého integrálu oklikou přes dvojný) se později často setkáme.

Poznámka 5. Věta 74 pojednává o převedení integrace $(r + s)$-rozměrné (s měrou μ_{12}, definovanou rovnicí (1)) na sled integrace r-rozměrné a s-rozměrné. Indukcí lze zřejmě postupovati dále. Čtenáři jistě postačí následující případ: Nechť μ_1, μ_2, μ_3 mají po řadě vlastnost $\mathbf{S}_r$, $\mathbf{S}_s$, $\mathbf{S}_t$. Jsou-li $I_1 \subset \mathbf{E}_r$, $I_2 \subset \mathbf{E}_s$, $I_3 \subset \mathbf{E}_t$ omezené intervaly, definujme funkce μ_{23}, μ_{123} rovnicemi $\mu_{23}(I_2 \times I_3) = \mu_2(I_2) \,.\, \mu_3(I_3)$, $\mu_{123}(I_1 \times I_2 \times I_3) = \mu_1(I_1) \,.\, \mu_{23}(I_2 \times I_3) = \mu_1(I_1) \,.\, \mu_2(I_2) \,.\, \mu_3(I_3)$. Nechť f je funkce $r + s + t$ proměnných (budeme psáti $f(x, y, z)$) a nechť existuje

$$I = \int_{\mathbf{E}_{r+s+t}} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\mu_{123} . \tag{34}$$

Podle věty 74 je

$$I = \int_{\mathbf{E}_r} \Big(\int_{\mathbf{E}_{s+t}} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\mu_{23} \Big) \mathrm{d}\mu_1 \,; \tag{35}$$

načež opět podle věty 74, použité na vnitřní integrál, je

$$I = \int_{\mathbf{E}_r} \Big(\int_{\mathbf{E}_s} \Big(\int_{\mathbf{E}_t} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\mu_3 \Big) \mathrm{d}\mu_2 \Big) \mathrm{d}\mu_1 . \tag{36}$$

Ovšem je možno psáti také

$$I = \int_{\mathbf{E}_{s+t}} \Big(\int_{\mathbf{E}_r} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\mu_1 \Big) \mathrm{d}\mu_{23} = \int_{\mathbf{E}_s} \Big(\int_{\mathbf{E}_t} \Big(\int_{\mathbf{E}_r} f(x, y, z) \,\mathrm{d}\mu_1 \Big) \mathrm{d}\mu_3 \Big) \mathrm{d}\mu_2 \tag{37}$$

a pod. Lze také psáti $\mu_{123}(I_1 \times I_2 \times I_3) = \mu_{12}(I_1 \times I_2) \,.\, \mu_3(I_3)$, kde $\mu_{12}(I_1 \times I_2) = \mu_1(I_1) \,.\, \mu_2(I_2)$ atd. Čtenář snadno zjistí, že tímto způsobem lze permutovati sled integrací v (34) všemi možnými šesti způsoby.

Poznámka 6. Jsou-li μ_1, μ_2, μ_3 Lebesgueovy míry v E_r, E_s, E_t, je μ_{123} Lebesgueova míra v E_{r+s+t}; na Lebesgueův integrál (pokud existuje) lze tedy vždy použíti vzorců (35), (36), (37) a pod. Naproti tomu v obecném případě Lebesgue-Stieltjesova integrálu lze užíti věty 70 nebo 74 jen tehdy, má-li míra μ_{12} speciální tvar, t. j. jestliže ji lze psáti ve tvaru součinu (1); viz cvič. 1.

Poznámka 7. Jestliže místo integrálu (34) jde o integrál

$$K = \int_M f(x, y, z)\, d\mu_{123}\,,$$

kde $M \subset E_{r+s+t}$, postupujeme podle vzorce (33). Vezměme příklad: Nechť $r = s = t = 1$ a nechť jde o Lebesgueův integrál, jehož integračním oborem je koule $x^2 + y^2 + z^2 < 1$; tedy

$$K = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,;$$

předpokládejme, že K existuje. Položme $f(x, y, z) = 0$ pro $x^2 + y^2 + z^2 \geqq 1$, takže podle (36) lze psáti

$$K = \int_{E_3} \ldots = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z)\, dz\right) dy\right) dx\,.$$

Vnitřní integrál (podle z) se počítá při pevném x, y; pokud $z^2 \geqq 1 - x^2 - y^2$, je $f(x, y, z) = 0$; stačí tedy integrovati přes ona z, pro něž $z^2 < 1 - x^2 - y^2$. Prostřední integraci (podle y) provádíme při pevném x. Jde tedy o integrál

$$K_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{z^2<1-x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\right) dy\,.$$

Pokud $1 - x^2 - y^2 \leqq 0$, t. j. $y^2 \geqq 1 - x^2$, je integrační obor ve vnitřním integrálu prázdný, tedy vnitřní integrál roven nule, stačí tedy integrovati přes obor $y^2 < 1 - x^2$:[8])

$$K_x = \int_{y^2<1-x^2} \left(\int_{z^2<1-x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz\right) dy\,. \tag{38}$$

Konečně máme vytvořit $K = \int_{-\infty}^{+\infty} K_x\, dx$. Jestliže $1 - x^2 \leqq 0$, je integ-

[8]) To jde, ježto množina těchto y je měřitelná. Je to interval $(-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2})$, pokud $x^2 < 1$; pro $x^2 \geqq 1$ je to množina prázdná.

rační obor $y^2 < 1 - x^2$ v (38) prázdný, tedy $K_x = 0$; stačí tedy integrovati přes obor $1 - x^2 > 0$, t. j. $x^2 < 1$. Tedy celkem

$$K = \int_{x^2<1} \Big(\int_{y^2<1-x^2} \Big(\int_{z^2<1-x^2-y^2} f(x, y, z)\, dz \Big) dy \Big) dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx\,.$$

Na př. pro $f(x, y, z) = x^2$ je vnitřní integrál $2x^2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$; další integrace dává

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2x^2\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy = \pi(1 - x^2)\,.\, x^2\,,$$

načež konečně $K = \int_{-1}^{1} \pi(1 - x^2)\, x^2\, dx = \frac{4}{15}\pi$.

V kap. VII budeme počítati více příkladů tohoto druhu.

Poznámka 8. Nechť μ_1, μ_2, μ_{12} mají stále týž význam jako ve větě 74. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$, $\mu_1(M) = 0$, $N \subset \mathbf{E}_s$, $\mu_2(N) = 0$. Potom je

(39) $$\mu_{12}(M \times \mathbf{E}_s) = 0\,, \quad \mu_{12}(\mathbf{E}_r \times N) = 0\,.$$

Důkaz. Rozložme $\mathbf{E}_s$ na jednotkové krychle $K_1, K_2, \ldots$ Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto $\mu_2(K_n) < +\infty$ a ježto $\mu_1(M) = 0$, existuje (viz větu 10, číslo σ_2) ke každému n posloupnost omezených intervalů $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots$ ($I_{n,m} \subset \subset \mathbf{E}_r$), pokrývající M a taková, že $\sum_m \mu_1(I_{n,m})\, \mu_2(K_n) < \varepsilon$. Intervaly $I_{n,1} \times K_n, I_{n,2} \times K_n, \ldots$ pokrývají $M \times K_n$ a jest $\sum_m \mu_{12}(I_{n,m} \times K_n) = \sum_m \mu_1(I_{n,m})\,.\,\mu_2(K_n) < \varepsilon$. Ježto $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne odtud $\mu_{12}(M \times K_n) = 0$. Ježto pak $M \times \mathbf{E}_s = \bigcup_n (M \times K_n)$, plyne odtud první rovnice (39). Druhá obdobně.

Poznámka 9. (Budeme ji potřebovat v následujícím paragrafu). *Je-li $M \subset \mathbf{E}_r$ množina μ_1-měřitelná, je $M \times \mathbf{E}_s$ množina μ_{12}-měřitelná.*

Důkaz. Existuje $A \subset \mathbf{E}_r$ typu G_δ tak, že $M \subset A$ a že množina $N = A \dot{-} M$ má μ_1-míru 0. Jest $M \times \mathbf{E}_s = (A \times \mathbf{E}_s) \dot{-} (N \times \mathbf{E}_s)$. Přitom $A \times \mathbf{E}_s$ je typu G_δ v $\mathbf{E}_{r+s}$ (viz kap. I, § 1) a tedy μ_{12}-měřitelná; podle pozn. 8 je $\mu_{12}(N \times \mathbf{E}_s) = 0$, takže také $N \times \mathbf{E}_s$ je μ_{12}-měřitelná.

Podobně: *Je-li* $P \subset \mathbf{E}_s$ μ_2*-měřitelná, je* $\mathbf{E}_r \times P$ μ_{12}*-měřitelná.* A odtud obecněji: *Jestliže* $M \subset \mathbf{E}_r$ *je* μ_1*-měřitelná a* $N \subset \mathbf{E}_s$ *je* μ_2*-měřitelná, je* $M \times N$ μ_{12}*-měřitelná* (neboť $M \times N = (M \times \mathbf{E}_s) \cap (\mathbf{E}_r \times N)$) *a je* $\mu_{12}(M \times N) = \mu_1(M) \,.\, \mu_2(N)$, neboť podle věty 72 je zřejmě

$$\mu_{12}(M \times N) = \int_M \mu_2(N) \, \mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(M) \,.\, \mu_2(N) \,.$$

Poznámka 10. Často se nám vyskytnou funkce $r + s$ proměnných, které závisí na př. jen na prvních r proměnných. To znamená: Je dána funkce f (r proměnných) a definujeme funkci g ($r + s$ proměnných) rovnicí

$$g(x, y) = f(x)$$

pro každé x, pro něž $f(x)$ je definováno, a pro každé $y \in \mathbf{E}_s$. Tvrdím: Je-li f μ_1-měřitelná v $M \subset \mathbf{E}_r$, je g μ_{12}-měřitelná v $M \times \mathbf{E}_s$. Důkaz. $M \times \mathbf{E}_s$ je μ_{12}-měřitelná (pozn. 9) a množina těch bodů $[x, y] \in M \times \mathbf{E}_s$, pro něž $g(x, y)$ není definováno, je μ_{12}-nulová (pozn. 8). Konečně: Je-li $c \in \mathbf{E}_1$, je množina $A = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in M, f(x) > c)$ μ_1-měřitelná a tedy množina $A \times \mathbf{E}_s = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}([x, y] \in M \times \mathbf{E}_s,\ g(x, y) > c)$ je μ_{12}-měřitelná. Výsledek platí zřejmě i pro komplexní f.

Poznámka 11. Budiž $f(x)$ funkce r proměnných, $g(y)$ funkce s proměnných, $M \subset \mathbf{E}_r$, $N \subset \mathbf{E}_s$ a nechť integrály

$$K = \int_M f(x) \, \mathrm{d}\mu_1 \,, \quad L = \int_N g(y) \, \mathrm{d}\mu_2 \tag{40}$$

konvergují. Potom konverguje i integrál

$$I = \int_{M \times N} f(x) \, g(y) \, \mathrm{d}\mu_{12}$$

a je $I = KL$. (Speciální případ $g(y) = 1$: Jestliže K konverguje a $\mu_2(N) < +\infty$, je $\int_{M \times N} f(x) \, \mathrm{d}\mu_{12} = \mu_2(N) \int_M f(x) \, \mathrm{d}\mu_1$).

Důkaz. Ježto M je μ_1-měřitelná a N je μ_2-měřitelná, je podle pozn. 9 $M \times N$ μ_{12}-měřitelná. Podle pozn. 10 je f (pojímaná jakožto funkce $r + s$ proměnných) μ_{12}-měřitelná v $M \times \mathbf{E}_s$ a tedy i v měřitelné množině $M \times N \subset M \times \mathbf{E}_s$; podobně pro g. Tedy existuje následující integrál a dá se upraviti podle Fubiniovy věty:

$$\int_{M\times N} |f(x)\, g(y)|\, \mathrm{d}\mu_{12} = \int_M (\int_N |f(x)| \,.\, |g(y)|\, \mathrm{d}\mu_2)\, \mathrm{d}\mu_1 =$$

$$= \int_M (|f(x)| \int_N |g(y)|\, \mathrm{d}\mu_2)\, \mathrm{d}\mu_1{}^{9)} =$$

$$= \int_N |g(y)|\, \mathrm{d}\mu_2 \,.\, \int_M |f(x)|\, \mathrm{d}\mu_1{}^{10)} < +\infty\,.$$

Tedy integrál I je konvergentní a tedy lze na něj užíti Fubiniovy věty. Opakuji-li hořejší postup (ale bez znamení absolutní hodnoty), dostanu $I = KL$.

Na př. pro Lebesgueův integrál máme

$$\iint\limits_{\substack{0<x<1\\ y>0}} \frac{x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y}{1+y^2} = \int_0^1 x\, \mathrm{d}x \,.\, \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Podobné výsledky platí ovšem i pro součiny $f(x)\, g(y)\, h(z)\, k(u)$ a pod.; na př.

$$\iiint\limits_{\substack{x>1\\ 0<y<\frac{1}{2}\pi\\ z>0}} \frac{\sin y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z}{x^2(1+z^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \,.\, \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin y\, \mathrm{d}y \,.\, \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Cvičení

1. V rovině označím $I_{00} = \langle 0, 1) \times \langle 0, 1)$, $I_{10} = \langle 1, 2) \times \langle 0, 1)$, $I_{01} = \langle 0, 1) \times \langle 1, 2)$ (kreslete!). Funkci intervalu $\mu(I)$ (v E_2) definuji jako Lebesgueovu míru (t. j. plošný obsah) množiny $I(I_{01} \cup I_{10})$. Snadno vidíte, že μ má vlastnost S_2. Tvrdím, že není μ možno psáti ve tvaru $\mu(I_1 \times I_2) = \mu_1(I_1) \,.\, \mu_2(I_2)$, kde μ_1, μ_2 jsou funkce intervalu v E_1. Návod: $\mu(\langle 0, 1) \times \langle 1, 2)) = \mu(\langle 1, 2) \times \langle 0, 1)) = 1$, $\mu(\langle 0, 1) \times \langle 0, 1)) = 0$. Kdyby takové vyjádření platilo, musilo by býti $\mu_1(\langle 0, 1)) \neq 0 \neq \mu_2(\langle 0, 1))$, ale současně $\mu_1(\langle 0, 1)) \,.\, \mu_2(\langle 0, 1)) = 0$ — spor.

---

9) Následkem konvergence K je číslo $f(x)$ (nezávislé na y) skoro všude v M konečné a dá se tedy podle věty 54 a k ní připojené pozn. 1 vytknout před znamení integrační.

10) Nyní zase vytýkám konečné číslo $\int_N |g(y)|\, \mathrm{d}\mu_2$.

2. K platnosti rovnice $I = KL$ z pozn. 11 nestačí existence integrálů K, L. Příklad:

$$K = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin x \, dx = 1\,, \quad L = \int_{0}^{+\infty} 1 \,.\, dy = +\infty; \quad \iint_{\substack{-\frac{1}{2}\pi < x < \pi \\ y > 0}} \sin x \, dx \, dy$$

neexistuje.

3. Jestliže však f je v M μ_1-skoro všude **nezáporná** a rovněž g je v N μ_2-skoro všude nezáporná, stačí existence integrálů (40) (t. j. měřitelnost funkcí f, g v M, resp. N) k platnosti rovnice $I = KL$.

§ 2. Geometrický význam integrálu nezáporné funkce. Věta 75. *Nechť $r, s, \mu_1, \mu_2, \mu_{12}$ mají týž význam jako ve větě 70, nechť $s = 1$ (takže μ_2 je míra v $\mathbf{E}_1$, μ_{12} je míra v $\mathbf{E}_{r+1}$). Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ množina μ_1-měřitelná; budiž f funkce μ_1-měřitelná v M. Položme*[11])

$$(41) \qquad \begin{aligned} M_1 &= \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} (x \in M, y \in \mathbf{E}_1, y < f(x))\,; \\ M_2 &= \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} (x \in M, y \in \mathbf{E}_1, y > f(x))\,; \\ M_3 &= \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]} (x \in M, y \in \mathbf{E}_1, y = f(x))\,. \end{aligned}$$

Potom množiny M_1, M_2, M_3 jsou μ_{12}-měřitelné.

Poznámka 1. Čtěte správně symboly! Na př. bod $[x, y] = [x_1, \ldots, x_r, y]$ patří do M_1 tehdy a jen tehdy, když platí: x patří do M, $f(x)$ je definováno (smí býti i nekonečné), y je konečné a menší než $f(x)$.

Důkaz. I. Dokažme napřed měřitelnost množiny M_1.

A) Nechť předně je f spojitá v M (a tedy definována všude v M; nemusí býti konečná). Množina $P = M \times \mathbf{E}_1$ je podle pozn. 9 v § 1 μ_{12}-měřitelná. Dokážeme, že M_1 má tvar $M_1 = PQ$, kde Q je jistá množina otevřená v $\mathbf{E}_{r+1}$ (a tedy μ_{12}-měřitelná). Tím bude dokázáno, že M_1 je μ_{12}-měřitelná.

Množinu Q sestrojíme takto. Každému bodu $[x, y] \in M_1$ přiřadím jistou množinu $G_{x,y} \subset \mathbf{E}_{r+1}$ tímto způsobem: Ježto $[x, y] \in M_1$, je $f(x) > y$; zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že $f(x) > y + \varepsilon$. Ze spojitosti plyne, že existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(42) \qquad \xi \in M,\ \varrho(x, \xi) < \delta \Rightarrow f(\xi) > y + \varepsilon\,.$$

---

[11]) Názorný význam těchto množin je jasný; načrtněte!

Položme $G_{x,y} = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{[\xi,\eta]} (\varrho(x, \xi) < \delta, \eta < y + \varepsilon)$. Zřejmě je $G_{x,y}$ otevřená v $\mathbf{E}_{r+1}$, totéž platí tedy i o množině $Q = \bigcup\limits_{[x,y]\in M_1} G_{x,y}$. Je-li $[\xi, \eta] \in PQ$, je předně $\xi \in M$, za druhé $[\xi, \eta] \in G_{x,y}$ pro některé $[x, y] \in M_1$, tedy je podle (42) a podle definice $G_{x,y}$ splněna nerovnost $\eta < f(\xi)$, t. j. $[\xi, \eta] \in M_1$. Tedy $PQ \subset M_1$. Naopak uvažme, že každý bod $[x, y] \in M_1$ leží v Q, totiž právě v $G_{x,y}$, a současně ovšem $[x, y] \in P$. Tedy $M_1 \subset PQ$; tedy celkem $M_1 = PQ$.

B) Budiž f μ_1-měřitelná v M. Podle Luzinovy věty 40 existuje ke každému přirozenému n otevřená (tedy μ_1-měřitelná) množina G_n tak, že $\mu_1(G_n) < \frac{1}{n}$ a že f je spojitá v $M \dot{-} G_n$. Podle bodu **A)** jsou množiny

(43) $$H_n = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]} (x \in M \dot{-} G_n, y \in \mathbf{E}_1, y < f(x)) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

μ_{12}-měřitelné. M_1 je zřejmě sjednocením množin $H_1, H_2, \ldots$ a množiny

$$K = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]} (x \in MG_1G_2G_3 \ldots, y \in \mathbf{E}_1, y < f(x)) .$$

Ale

$$\mu_1(MG_1G_2G_3 \ldots) \leqq \mu_1(G_n) < \frac{1}{n}$$

pro každé přirozené n, tedy $\mu_1(MG_1G_2G_3\ldots) = 0$. Ale $K \subset (MG_1G_2G_3\ldots) \times \mathbf{E}_1$, tedy (podle pozn. 8 v § 1) $\mu_{12}(K) = 0$. Tedy také K je μ_{12}-měřitelná. Tedy $M_1 = K \cup H_1 \cup H_2 \cup \ldots$ je μ_{12}-měřitelná.

II. Měřitelnost množiny M_2 se dokáže obdobně.

III. Podle bodů I, II jsou pro každé přirozené n množiny

$$M_{1,n} = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]} \left(x \in M, y \in \mathbf{E}_1, y < f(x) + \frac{1}{n}\right),$$

$$M_{2,n} = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{[x,y]} \left(x \in M, y \in \mathbf{E}_1, y > f(x) - \frac{1}{n}\right)$$

μ_{12}-měřitelné (neboť funkce $f(x) \pm \frac{1}{n}$ jsou μ_1-měřitelné v M podle věty 34). Zřejmě pak je $M_3 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_{1,n}M_{2,n}$.

Tato věta měla ráz *kvalitativní* (pojednávala o *měřitelnosti* množin M_1, M_2, M_3). Nyní přijdou věty *kvantitativního rázu* o *hodnotě* míry. K tomu cíli je však nutno poněkud specialisovati: za μ_2 vezmeme nyní Lebesgueovu míru v $\mathbf{E}_1$ (t. j. $\mu_2((a, b)) = \mu_2(\langle a, b\rangle) = b - a$ pro $-\infty < a < b < +\infty$).

Věta 76. *$\mu_1, \mu_2, \mu_{12}, r, s$ jako ve větě 70. Budiž však $s = 1$ a μ_2 budiž Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_1$. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ μ_1-měřitelná a budiž f funkce μ_1-měřitelná v M. Potom pro množinu M_3 z věty 75 platí $\mu_{12}(M_3) = 0$.*

Velmi názorné: „Graf“ funkce f má μ_{12}-míru 0.

Důkaz. Podle věty 75 je M_3 množina μ_{12}-měřitelná. Lze tedy užíti věty 72:

$$\mu_{12}(M_3) = \int_{\mathbf{E}_r} \mu_2(M_3^{x,*})\, d\mu_1 \, .$$

Ale $M_3^{x,*}$ se skládá nejvýše z jednoho bodu (totiž z bodu $f(x)$, je-li $x \in M$ a $f(x)$ konečné). Ježto je μ_2 Lebesgueova míra, plyne odtud $\mu_2(M_3^{x,*}) = 0$ pro každé x; tedy $\mu_{12}(M_3) = 0$.[12])

A nyní přijde hlavní výsledek tohoto paragrafu:

Věta 77. *$\mu_1, \mu_2, \mu_{12}, r, s$ jako ve větě 70. Budiž však $s = 1$ a μ_2 budiž Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_1$. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ množina μ_1-měřitelná a budiž f funkce, definovaná a nezáporná μ_1-skoro všude v M (f nemusí být ani konečná ani měřitelná). Položme*

$$A = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}} (x \in M, 0 < y < f(x)) \, . \tag{44}$$

Potom platí: Funkce f je μ_1-měřitelná v M (neboli: integrál $\int_M f\, d\mu_1$ existuje) tehdy a jen tehdy, jestliže množina A je μ_{12}-měřitelná. V tomto případě je $\int_M f\, d\mu_1 = \mu_{12}(A)$.

Poznámka 2. Integrál nezáporné měřitelné funkce jsme definovali jako supremum dolních součtů. Podle této věty bychom jej mohli definovati též „geometricky“, jako míru množiny A. Uvědomte si názorný smysl množiny A.

[12]) Je vidět, že by nebylo nutno předpokládati, že μ_2 je Lebesgueova míra. Stačí, jestliže jednobodové množiny jsou μ_2-nulové.

Důkaz. Uvažme: Je-li $x \in M$, $f(x)$ definováno, $0 \leqq f(x) \leqq +\infty$, je $A^{x,*} = \underset{y}{\mathcal{E}}(0 < y < f(x))$, tedy $\mu_2(A^{x,*}) = f(x)$ (platí i pro $f(x) = 0$). Pro všechna ostatní $x \in \mathbf{E}_r$ je $A^{x,*} = \emptyset$, $\mu_2(A^{x,*}) = 0$.

I. Nechť A je μ_{12}-měřitelná. Potom podle věty 72 je

$$\mu_{12}(A) = \int_{\mathbf{E}_r} \mu_2(A^{x,*})\,\mathrm{d}\mu_1 = \int_M f\,\mathrm{d}\mu_1\,,$$

neboť skoro všude v M je $f(x) = \mu_2(A^{x,*})$. T. j.: f je μ_1-měřitelná v M a platí hledaný vzorec.

II. Nechť f je μ_1-měřitelná v M. Potom především množina M_1 z věty 75 je μ_{12}-měřitelná (podle věty 75). Dále množina $B = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}(x \in \mathbf{E}_r, -\infty < y \leqq 0)$ je uzavřená, tedy μ_{12}-měřitelná. Tedy i množina $A = M_1 \dot{-} B$ je μ_{12}-měřitelná.

Je vidět, že věty 76, 77 jsou téměř bezprostředními důsledky věty Fubiniovy a věty 75.

§ 3*. Funkce polospojité.* Tento paragraf budeme potřebovati pouze v kap. XII.

Poznámka 1. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$. Ježto také M je metrický prostor, víme, co znamenají slova „množina otevřená (nebo uzavřená) v M". Podle **D II**, věta 129 je A uzavřená (resp. otevřená) v M tehdy a jen tehdy, lze-li psáti $A = MB$, kde B je uzavřená (resp. otevřená) v $\mathbf{E}_r$. Množina $A \subset M$ je ovšem uzavřená v M tehdy a jen tehdy, je-li $M \dot{-} A$ otevřená v M.

Definice 13. *Budiž f reálná funkce definovaná v množině $M \subset \mathbf{E}_r$. Jestliže pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je množina*

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) < c) \tag{45}$$

otevřená v M, říkáme, že f je shora polospojitá v M. Jestliže pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ je množina

$$\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) > c) \tag{46}$$

otevřená v M, říkáme, že f je zdola polospojitá v M.

Poznámka 2. Jestliže M je μ-měřitelná a f shora (nebo zdola) polospojitá v M, je f μ-měřitelná v M. Neboť v případě polospojitosti shora má množina (45) podle pozn. 1 tvar MB, kde B je otevřená v $\mathbf{E}_r$; tedy je (45) μ-měřitelná. U funkcí polospojitých zdola vychází obdobně, že množiny (46) jsou μ-měřitelné.

Věta 78. *Je-li f shora (po příp. zdola) polospojitá v M, je $-f$ zdola (po příp. shora) polospojitá v M.* To je jasné z definice.

Věta 79. *Budiž f reálná funkce, definovaná v množině $M \subset \mathbf{E}_r$. Potom f je shora polospojitá v M tehdy a jen tehdy, jestliže množina*

$$\mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, f(x) \geqq c) \tag{47}$$

je uzavřená v M pro každé $c \in \mathbf{E}_1$. Podobně pro funkce zdola polospojité (piš pouze $\leqq c$ místo $\geqq c$).

Důkaz je zřejmý, neboť množiny (45), (47) jsou disjunktní a mají sjednocení M.

Poznámka 3. Reálná funkce f je spojitá v $M \subset \mathbf{E}_r$ tehdy a jen tehdy, je-li v M shora i zdola polospojitá. Důkaz. Otevřenost množin (46) pro každé $c \in \mathbf{E}_1$ říká právě toto: Vezmu-li libovolný bod $x_0 \in M$ a libovolné $c \in \mathbf{E}_1$ tak, že je $f(x_0) > c$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in M, \varrho(x_0, x) < \delta) \Rightarrow f(x) > c$.[13]) A otevřenost množin (45) říká analogicky toto: Vezmu-li $x_0 \in M$ a $c \in \mathbf{E}_1$ tak, že je $f(x_0) < c$, potom opět existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in M, \varrho(x_0, x) < \delta) \Rightarrow f(x) < c$. A obě tyto vlastnosti dohromady zřejmě charakterisují právě všechny funkce spojité v M. Poznamenejme jenom, že někteří autoři připouštějí sice hodnoty $\pm\infty$ u funkcí polospojitých, ale ne u spojitých (takže na př. funkci $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = +\infty$ nenazývají spojitou v bodě 0); u nich by ovšem věta této poznámky byla správná jen pro konečné funkce.

Poznámka 4. Pojem funkcí polospojitých lze „lokalisovat"; viz k tomu cvič. 1. V dalších cvičeních jsou uvedeny některé další vlastnosti funkcí polospojitých.

---

[13]) Tady vidíte názorný smysl polospojitosti zdola: Je-li $f(x) > c$ pro jisté x, platí tato nerovnost i pro všechny body dostatečně blízké, pokud leží v M.

Věta 80. *Nechť μ má vlastnost $\mathbf{S}_r$; nechť $f \in \mathbf{L}(M)$ $(M \subset \mathbf{E}_r)$ a nechť f je definována všude v M. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existují funkce φ, ψ s těmito vlastnostmi:*

1. φ je polospojitá zdola v M, ψ shora.

2. φ je zdola omezená v M, ψ shora.

3. $\varphi(x) \geqq f(x) \geqq \psi(x)$ pro každé $x \in M$.

4. $-\infty < \int_M \varphi \, d\mu - \varepsilon < \int_M f \, d\mu < \int_M \psi \, d\mu + \varepsilon < +\infty$.

Důkaz stačí provésti pro funkci ψ (přechodem k funkci $-f$ dostaneme tvrzení o φ).

Funkce f je skoro všude v M konečná. Budiž $M_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(x \in M, f(x) \leqq n)$. Jest $M_1 \subset M_2 \subset \ldots$, $M \sim \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} M_n$. Podle věty 49 existuje n tak, že $|\int_M f \, d\mu - \int_{M_n} f \, d\mu| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Položíme-li tedy $g(x) = f(x)$ pro $x \in M_n$, $g(x) = 0$ pro $x \in M \dot{-} M_n$, je

$$g(x) \leqq f(x)\,, \quad g(x) \leqq n\,, \quad \int_M g \, d\mu = \int_{M_n} f \, d\mu > \int_M f \, d\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{48}$$

Budiž nyní $\mu_1 = \mu$, budiž μ_2 Lebesgueova míra v $\mathbf{E}_1$ a definujme μ_{12} jako ve větě 70. Potom množina (v $\mathbf{E}_{r+1}$)

$$P = \underset{[x,y]}{\mathcal{E}}\,(x \in M, y \in \mathbf{E}_1, y \leqq g(x))^{14)} \tag{49}$$

je μ_{12}-měřitelná podle věty 75 (jde o sjednocení tamějších množin M_1, M_3). Existuje tedy uzavřená F tak, že

$$F \subset P\,, \quad \mu_{12}(P \dot{-} F) < \tfrac{1}{2}\varepsilon \tag{50}$$

(viz větu 21). Pro každé $x \in M$ je množina $F^{x,*} = \underset{y}{\mathcal{E}}([x, y] \in F) \subset \mathbf{E}_1$ uzavřená v $\mathbf{E}_1$ (**D II**, kap. VI, § 10, pozn. 7); její supremum označme $\psi(x)$. Je-li $F^{x,*} = \emptyset$, je $\psi(x) = -\infty$, je-li $F^{x,*} \neq \emptyset$, je $F^{x,*} \subset P^{x,*} = \underset{y}{\mathcal{E}}(y \in \mathbf{E}_1, y \leqq g(x))$ a tedy $\psi(x) \leqq g(x) \leqq n$ a současně je $\psi(x)$ (vyjma případ $\psi(x) = -\infty$) číslem (ovšem největším) z $F^{x,*}$ (viz **D II**, kap. V, § 1, pozn. 7). Jest

$$\psi(x) \leqq g(x) \leqq f(x)\,, \quad \psi(x) \leqq n \text{ pro } x \in M\,, \tag{51}$$

což jsou již vlastnosti 2, 3.

---

14) $[x, y]$ značí bod v $\mathbf{E}_{r+1}$, x bod v $\mathbf{E}_r$, y bod v $\mathbf{E}_1$.

Budiž nyní $c \in \mathsf{E}_1$ a vyšetřujme množinu

$$(52) \qquad A = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, \psi(x) \geqq c);$$

abychom dokázali vlastnost 1, t. j. abychom dokázali, že A je uzavřená v M (věta 79), vezmeme libovolnou posloupnost bodů $x_p \in A$ ($p = 1, 2, \ldots$), mající limitu $\xi \in M$ a máme dokázati, že $\xi \in A$. Jest $c \leqq \psi(x_p) \leqq n$, takže existuje vybraná posloupnost konvergentní: $\lim_{p \to \infty} \psi(x_{k_p}) = \eta$, kde $c \leqq \eta \leqq n$. Ježto $\psi(x_p) \in F^{x_p,*}$, je $[x_p, \psi(x_p)] \in F$ a z uzavřenosti množiny F plyne, že $[\xi, \eta] \in F$, t. j. $\eta \in F^{\xi,*}$, tedy $\eta \leqq \sup F^{\xi,*}$, t. j. $\psi(\xi) \geqq \eta \geqq c$, t. j. $\xi \in A$, což bylo dokázati.

Přistupme k vlastnosti 4. Funkce ψ je podle pozn. 2 μ-měřitelná v M, takže množina

$$(53) \qquad N = \mathop{\mathcal{E}}_{[x,y]}(x \in M, y \in \mathsf{E}_1, y \leqq \psi(x))$$

je μ_{12}-měřitelná. Poznamenejme, že množina $P^{x,*} \dot{-} N^{x,*}$ má míru (Lebesgueovu v E_1) $g(x) - \psi(x)$ všude v M, kde g je konečná — tedy skoro všude.[15] Dále $[x, y] \in F \Rightarrow y \in F^{x,*} \Rightarrow y \leqq \psi(x) \Rightarrow [x, y] \in N$, t. j. $F \subset N$. Tedy (s užitím věty 72 a podle (50))

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon > \mu_{12}(P \dot{-} F) \geqq \mu_{12}(P \dot{-} N) = \int_M \mu_2(P^{x,*} \dot{-} N^{x,*})\, d\mu_1 =$$
$$= \int_M (g - \psi)\, d\mu \geqq 0\,,$$

z čehož spolu s (48) plyne i vlastnost 4.

V cvič. 6 podáme závažné důsledky věty 80.

Cvičení

Definujme: f je shora polospojitá v bodě x vzhledem k M, jestliže ke každému $c > f(x)$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(y \in M, \varrho(x, y) < \delta) \Rightarrow f(y) < c$. Podobně „zdola".

1. Dokažte: f je shora polospojitá v M tehdy a jen tehdy, je-li shora polospojitá vzhledem k M v každém bodě $x \in M$.

2. Jsou-li f, g shora polospojité v bodě x vzhledem k M, platí totéž o funkcích $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.

3. Je-li $\mathfrak{F}$ nějaká množina funkcí polospojitých shora v bodě x vzhledem k M, má tuto vlastnost i funkce $\varphi(x) = \inf_{f \in \mathfrak{F}} f(x)$. Ukažte, že pro $\sup_{f \in \mathfrak{F}} f(x)$ to neplatí.

[15]) Pro $x \in \mathsf{E}_r \dot{-} M$ je to ovšem množina prázdná.

4. Jestliže f je shora polospojitá v kompaktní množině $M \neq \emptyset$, nabývá f někde v M svého maxima, t. j. existuje $x \in M$ tak, že $f(x) = \sup_{y \in M} f(y)$.

5. K cvič. 1—4 vyslovte a dokažte obdobné věty pro funkce zdola polospojité.

6. (Věta Vitali-Carathéodoryova.) Budiž f měřitelná v M, definovaná a reálná všude v M. Potom existují posloupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \ldots; \psi_1, \psi_2, \ldots$ s těmito vlastnostmi:

I. φ_n je v M polospojitá zdola a omezená zdola; ψ_n je v M polospojitá a omezená shora.

II. Všude v M je $\varphi_n(x) \geqq \varphi_{n+1}(x) \geqq f(x) \geqq \psi_{n+1}(x) \geqq \psi_n(x)$.

III. Skoro všude v M je $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \psi_n(x) = f(x)$.

IV. Jestliže mimo to $f \in \mathbf{L}(M, \mu)$, je

$$\lim_{n \to \infty} \int_M \varphi_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_M \psi_n \, d\mu = \int_M f \, d\mu .$$

Návod: **A)** Jestliže $f \in \mathbf{L}(M, \mu)$, plyne tvrzení I, II, IV (a odtud III) snadno z věty 80.[16]) **B)** Jestliže nepředpokládám $f \in \mathbf{L}(M, \mu)$ a M je omezená, užijme známé nám funkce (**D II**, kap. VI, § 4, příkl. 1) $\varphi(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ pro $x \in \mathbf{E}_1$, $\varphi(+\infty) = 1$, $\varphi(-\infty) = -1$ a aplikujme výsledek **A** na funkci $F(x) = \varphi(f(x))$; příslušné funkce Φ_n, Ψ_n snadno upravíme tak, že $1 \geqq \Phi_n(x) \geqq -1 + \dfrac{1}{n}$, $-1 \leqq \Psi_n(x) \leqq 1 - \dfrac{1}{n}$ (takže po inversní transformaci dostaneme funkce zdola resp. shora omezené). **C)** V obecném případě užijeme případu **B**; uvažme při tom, že funkce shora polospojitá v nějakém uzavřeném intervalu I a rovná $-\infty$ v $\mathbf{E}_r \dot{-} I$ je shora polospojitá v $\mathbf{E}_r$. (Pracujte napřed s omezenou funkcí F z **B**, abyste u funkcí Ψ_n mohli užít věty Jegorovovy; podaří se vám nalézt takovou posloupnost shora polospojitých funkcí $\Psi'_1, \Psi'_2, \ldots$, že $\Psi'_n(x) \leqq F(x)$, $\Psi'_n(x) = -1$ pro $\|x\| > n$[17]), $-1 \leqq \Psi'_n(x) \leqq 1 - \dfrac{1}{n}$ pro $\|x\| \leqq n$, $F(x) - \Psi'_n(x) < \dfrac{1}{n}$ pro všechna $\|x\| \leqq n$ až na jistou množinu A_n míry menší než 2^{-n}; posloupnost funkcí $\Psi''_n(x) = \max(\Psi'_1(x), \ldots, \Psi'_n(x))$ $(n = 1, 2, \ldots)$ má žádané vlastnosti vůči funkci F).

---

[16]) Přitom se užívá cvič. 2 — zde i v dalším.

[17]) $\|x\| = \max(|x_1|, \ldots, |x_r|)$.