17. Autonomní soustavy dvou diferenciálních rovnic

17.1. V této kapitole budou probrány některé specifické výsledky pro rovnici

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.1}$$

za předpokladu, že

$H \subset R^2$ je otevřená množina, funkce $g: H \to R^2$ je spojitá a rovnice (1.1) je jednoznačná. (1.2)

Nechť Ψ je funkce zavedená v odst. 12.3.

17.1.1. Definice: Nechť je $y \in H$. Množina bodů $z \in H$, k nimž existuje taková posloupnost reálných čísel t_i, že platí

$$\lim_{i \to \infty} t_i = \infty , \quad \lim_{i \to \infty} \Psi(t_i, y) = z ,$$

se nazývá *ω-limitní množina bodu y* a označuje $\Omega(y)$. Množina bodů $z \in H$, k nimž existuje taková posloupnost reálných čísel t_i, že platí

$$\lim_{i \to \infty} t_i = -\infty , \quad \lim_{i \to \infty} \Psi(t_i, y) = z ,$$

se nazývá *α-limitní množina bodu y* a označuje $A(y)$.

17.1.2. Příklady: Nechť U je trajektorie řešení $\Psi(., y)$.

(i) Pro U naznačené na obr. 30 znamenají šipky pohyb bodu $u(t)$ s rostoucím t. $\Omega(y)$ je jednotková kružnice se středem v počátku, množina $A(y)$ obsahuje pouze počátek.

(ii) V případě soustavy $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = 0$ jsou množiny $\Omega(y)$, $A(y)$ prázdné pro každé $y \in R^2$.

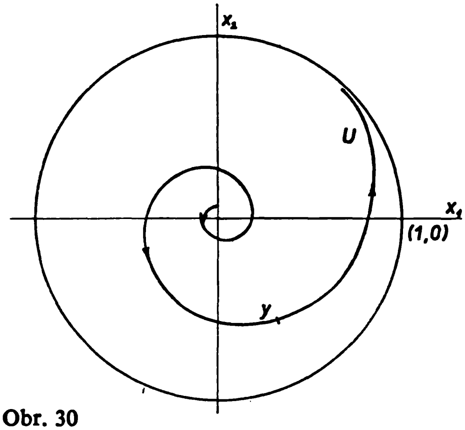
(iii) Je-li U naznačeno na obr. 31, je $\Omega(y)$ sjednocení přímek $x_2 = 1$ a $x_2 = -1$.

(iv) Je-li U trajektorie periodického řešení $y \in U$, je $\Omega(y) = U = A(y)$.

Platí tato tvrzení [důkazy jsou jednoduché a nebudeme je provádět]:

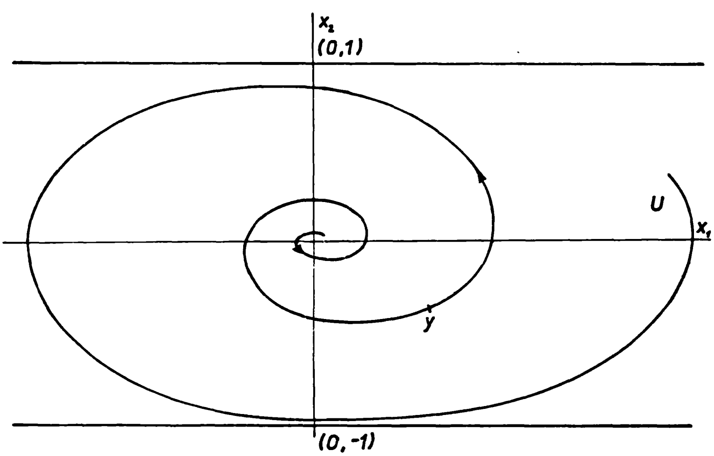
Je-li $\tau \in R$, $y \in H$, $u = \Psi(\tau, y)$, *je* $\Omega(u) = \Omega(y)$, $A(u) = A(y)$. (1.3)

Množiny $\Omega(y)$, $A(y)$ jsou uzavřené vzhledem k H pro $y \in H$. Je-li $w \in \Omega(y)$ [resp. $A(y)$], je $\Psi(t, w) \in \Omega(y)$ [resp. $A(y)$] pro $t \in R$; v takovém případě říkáme, že množina $\Omega(y)$ je invariantní [srovnej odst. 12.4]. (1.4)



Obr. 30

Nechť je $F \subset H$ a nechť F je uzavřená. Existují-li $\bar{t} \in R$, $y \in H$ tak, že je $\Psi(t, y) \in F$ pro $t \geqq \bar{t}$, pak $\Omega(y) \subset F$. Existují-li $\bar{t} \in R$, $y \in H$ tak, že je $\Psi(t, y) \in F$ pro $t \leqq \bar{t}$, pak $A(y) \subset F$. (1.5)



Obr. 31

Nechť je $F \subset H$ a nechť F je kompaktní. Existují-li $\bar{t} \in R$, $y \in H$ tak, že je $\Psi(t, y) \in F$ pro $t \geqq \bar{t}$, pak $\Omega(y) \neq \emptyset$. Existují-li $\bar{t} \in R$, $y \in H$ tak, že je $\Psi(t, y) \in F$ pro $t \leqq \bar{t}$, pak $A(y) \neq \emptyset$. (1.6)

17.1.3. Poznámka: Lze též dokázat, že množiny $A(y)$, $\Omega(y)$ z tvrzení (1.6) jsou souvislé [tj. že žádnou z nich nelze vyjádřit jako sjednocení dvou neprázdných disjunktních uzavřených množin]. Pro $a, b \in R^2$, $a \neq b$, položme

$$J(a, b) = \{\sigma a + (1 - \sigma) b \mid 0 < \sigma < 1\} .$$

Vytčením počátečního bodu a a koncového bodu b [které ovšem k $J(a, b)$ nepatří] je úsečka $J(a, b)$ uspořádána ve smyslu rostoucího parametru σ: Je-li

$$x^{[i]} = \sigma_i a + (1 - \sigma_i) b , \quad i = 1, 2, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1 ,$$

píšeme $x^{[1]} < x^{[2]}$.

17.1.4. Definice: Úsečka $J(a, b)$ se nazývá *transversála* [rovnice (1.1)], je-li $J(a, b) \subset H$ a jsou-li vektory $b - a$ a $g(x)$ lineárně nezávislé pro každé $x \in J(a, b)$ [tj. je-li $\alpha(b - a) \neq g(x)$ pro $\alpha \in R$, $x \in J(a, b)$].

Přímka, v níž leží transverzála $J(a, b)$, rozděluje rovinu na dvě poloviny. Z Definice 17.1.4 plyne, že v každém bodě $x \in J(a, b)$ vektor $g(x)$ směřuje do téže z obou polovin, a že tedy bodem $x \in J(a, b)$ přechází řešení z jedné poloviny [určené nezávisle na x] do druhé.

17.1.5. Pomocná věta: *Nechť $J(a, b)$ je transverzála, $z \in J(a, b)$. Potom existují čísla $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ a ke každému x, $|x_i - z_i| < \varepsilon_2$, $i = 1, 2$, existuje $\tau(x) \in \langle -\varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle$ tak, že je $\Psi(\tau(x), x) \in J(a, b)$. Číslo $\tau(x)$ je určeno jednoznačně, funkce τ je spojitá v bodě z.*

Důkaz: Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je $z = 0$. Položme

$$B = \begin{pmatrix} g_1(0), & b_1 - a_1 \\ g_2(0), & b_2 - a_2 \end{pmatrix}.$$

B je regulární matice. V rovnici (1.1) proveďme substituci $x = Bu$, kde

$$x = \operatorname{col}(x_1, x_2) , \quad u = \operatorname{col}(u_1, u_2) .$$

Dostáváme rovnici

$$\dot{u} = \tilde{g}(u) , \tag{1.7}$$

kde $\tilde{g}(u) = B^{-1} g(Bu)$. Funkce $\tilde{g}$ je spojitá, rovnice (1.7) je jednoznačná. Nechť funkce $\tilde{\Psi}$ má ve vztahu k rovnici (1.7) význam zavedený v odst. 12.3.

Je

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \end{pmatrix},$$

tedy

$$B^{-1} \begin{pmatrix} g_1(0) \\ g_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

to znamená

$$\tilde{g}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obdobně je

$$B^{-1}\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a proto úsečka $J(a, b)$ přechází v úsečku $J(\tilde{a}, \tilde{b})$ takovou, že je

$$\tilde{a} - \tilde{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Je ovšem $z = 0 \in J(a, b)$, a tedy $0 \in J(\tilde{a}, \tilde{b})$, proto $J(\tilde{a}, \tilde{b})$ leží na ose X_2 [je $\tilde{a} = \operatorname{col}(0, \gamma)$, $\tilde{b} = \operatorname{col}(0, \gamma + 1)$, kde $-1 < \gamma < 0$]. Přirozeně $J(\tilde{a}, \tilde{b})$ je transverzála rovnice (1.7). Dokážeme, že Pomocná věta 17.1.5 platí pro rovnici (1.7). V okolí bodu $(0, 0)$ je $\tilde{g}_1(u_1, u_2) > 0$ a podle Věty 10.1.1 existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že ke každému bodu $y \in (-\delta_1, \delta_1) \times (-\delta_2, \delta_2)$ existuje řešení $w: \langle -\delta_1, \delta_1 \rangle \to \langle -2\delta_2, 2\delta_2 \rangle$ rovnice

$$\frac{du_2}{du_1} = \frac{\tilde{g}_2(u_1, u_2)}{\tilde{g}_1(u_1, u_2)}$$

takové, že je $w(y_1) = y_2$. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že δ_1, δ_2 jsou tak malá, že je $(0, \xi) \in J(\tilde{a}, \tilde{b})$ pro $\xi \in \langle -2\delta_2, 2\delta_2 \rangle$ a $\frac{1}{2} < \tilde{g}_1(u_1, u_2) < \frac{3}{2}$ pro $(u_1, u_2) \in \langle -\delta_1, \delta_1 \rangle \times \langle -2\delta_2, 2\delta_2 \rangle$. Graf W řešení w je podle Vět 2.15.1 a 1.12.1 trajektorie rovnice (1.7), tj. $W = \{(\tilde{\Psi}_1(t, y), \tilde{\Psi}_2(t, y)) \mid \alpha \leqq t \leqq \beta\}$, a existuje $\tilde{\tau}(y) \in \langle \alpha, \beta \rangle$ tak, že $\tilde{\Psi}_1(\tilde{\tau}(y), y) = 0$, tj. $\tilde{\Psi}(\tilde{\tau}(y), y) \in J(\tilde{a}, \tilde{b})$. Protože je $\frac{1}{2} < \tilde{g}_1(u_1, w(u_1)) < \frac{3}{2}$, je

$$\alpha < -\tfrac{2}{3}(y_1 + \delta_1), \quad \beta > \tfrac{2}{3}(\delta_1 - y_1), \quad |\tilde{\tau}(y)| < 2|y_1|. \tag{1.8}$$

Číslo $\tilde{\tau}(y)$ je určeno jednoznačně v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$. Z poslední nerovnosti v (1.8) plyne, že funkce $\tilde{\tau}$ je spojitá v počátku. Zvolme čísla $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2 > 0$ tak, aby bylo $\tilde{\varepsilon}_1 = \delta_1/2$, $\tilde{\varepsilon}_2 \leqq \min\{\delta_1/4, \delta_2\}$. Podle nerovností (1.8) je $\alpha < -\delta_1/2$, $\beta > \delta_1/2$, $|\tilde{\tau}(y)| < \delta_1/2$, a tedy Pomocná věta 17.1.5 platí pro rovnici (1.7) (píšeme $\tilde{\varepsilon}_1$, $\tilde{\varepsilon}_2$ místo ε_1, ε_2). Zpětnou transformací plyne, že Pomocná věta 17.1.5 platí pro rovnici (1.1) [můžeme položit $\varepsilon_1 = \tilde{\varepsilon}_1$ a ε_2 zvolit tak malé, aby bylo $|u_i| < \tilde{\varepsilon}_2$, $i = 1, 2$, jakmile je $u = B^{-1}x$, $|x_i| < \varepsilon_2$, $i = 1, 2$].

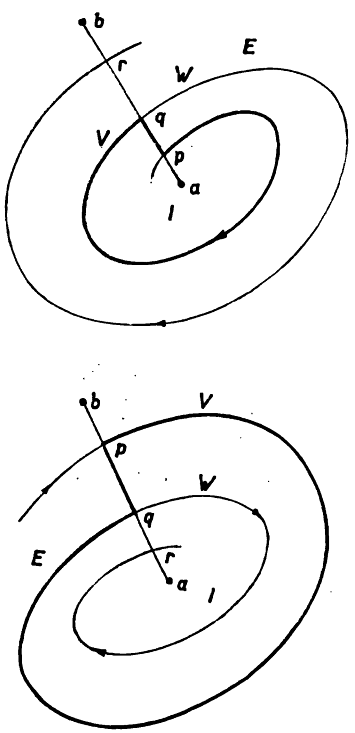
17.1.6. Poznámka: Lze ovšem dokázat, že funkce τ z Pomocné věty 17.1.5 je spojitá, to však nebudeme potřebovat.

17.1.7. Pomocná věta: *Nechť $J(a, b)$ je transverzála, $y \in H$, $t_1 < t_2 < t_3$, $\Psi(t_i, y) \in J(a, b)$ pro $i = 1, 2, 3$ a nechť je $\Psi(t, y) \notin J(a, b)$ pro $t \in (t_1, t_2) \cup (t_2, t_3)$. Je-li $\Psi(t_1, y) < \Psi(t_2, y)$ [ve smyslu uspořádání zavedeného na $J(a, b)$], je $\Psi(t_2, y) < \Psi(t_3, y)$. Je-li $\Psi(t_1, y) > \Psi(t_2, y)$, je $\Psi(t_2, y) > \Psi(t_3, y)$.*

Důkaz: Položme

$$\Psi(t_1, y) = p, \quad \Psi(t_2, y) = q, \quad \Psi(t_3, y) = r,$$
$$V = \{\Psi(t, y) \mid t_1 \leqq t \leqq t_2\}, \quad W = \{\Psi(t, y) \mid t_2 < t\}.$$

Křivka L složená z V a úsečky $J(q, p)$ roztíná rovinu na dvě části I a E a je jejich společnou hranicí. W nemá společný bod s L, neboť W neprotíná V [v opačném případě by byla porušena jednoznačnost rovnice (1.1)] a W nemá společný bod s $J(q, p)$ [viz obr. 32. Jestliže v bodě q řešení vstupuje např. do E, potom v každém bodě úsečky $J(q, p)$ řešení přechází z I do E. Kdyby W mělo společný bod s $J(q, p)$, existoval by



Obr. 32

první takový bod, v něm by se řešení blížilo k $J(q, p)$ z množiny E, a nemohlo by tedy přecházet z I do E.]. Je tedy W v jedné z částí roviny (E nebo I), $J(q, r)$ je v téže části a $J(p, q)$ je v jejím doplňku. Jsou tedy body p, r na úsečce $J(a, b)$ na opačných stranách od bodu q. Pomocná věta 17.1.7 je dokázána.

17.1.8. Poznámka: Množina $L \subset R^2$ se nazývá *Jordanova křivka*, existuje-li spojitá funkce $l\colon \langle 0, 1\rangle \to R^2$ taková, že je

$$L = \{l(t) \mid t \in \langle 0, 1\rangle\}, \quad l(0) = l(1), \quad l(t) \neq l(s) \quad \text{pro} \quad 0 \leqq s < t < 1 .$$

V důkazu Pomocné věty 17.1.7 jsme užili [bez upozornění] této věty:

Jordanova věta: *Doplněk Jordanovy křivky L v rovině je sjednocení dvou otevřených souvislých množin* Ext (L) *a* Int (L) [*množina* Int (L) *je omezená a nazývá se vnitřek křivky L, množina* Ext (L) *není omezená a nazývá se vnějšek křivky L*]. *Přitom L je současně hranice množiny* Ext (L) *i množiny* Int (L).

Jordanova věta je názorná a její platnost se může zdát samozřejmá [neboť obvykle máme na mysli takové případy, kdy snadno „vidíme", co je Ext (L) a Int (L); Jordanova věta však platí pro každou jednoduchou křivku L], vyžaduje však důkaz a ten není jednoduchý; čtenář jej může najít např. v [10], kap. 7, Věta 108.

17.1.9. Pomocná věta: *Nechť $J(a, b)$ je transverzála, $y \in H$, a nechť existuje posloupnost $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ taková, že je $\Psi(t_i, y) \in J(a, b)$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$. Potom je buď*

$$\Psi(t_1, y) < \Psi(t_2, y) < \Psi(t_3, y) < \ldots, \tag{1.9}$$

nebo

$$\Psi(t_1, y) > \Psi(t_2, y) > \Psi(t_3, y) > \ldots, \tag{1.10}$$

nebo

$$\Psi(t_1, y) = \Psi(t_2, y) = \Psi(t_3, y) = \ldots. \tag{1.11}$$

Důkaz: Zřejmě nemůže být $\Psi(t, y) = y$ pro $t \in R$. Podle Věty 12.3.7 nastane jeden ze dvou případů:

(i) Řešení $\Psi(., y)$ je periodické.

(ii) $\Psi(t, y) \neq \Psi(s, y)$ pro $t \neq s$.

Nechť nastane případ (i). Potom existuje takové číslo $T > 0$, že je

$$\{t \in R |\ \Psi(t, y) = y\} = \{kT |\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\},$$

$$\Psi(t) \neq \Psi(s) \quad \text{pro} \quad t \neq s, \quad t, s \in \langle 0, T) .$$

Protože množina $J(a, b)$ je transverzála, množina $\{t \in \langle 0, T\rangle |\ \Psi(t, y) \in J(a, b)\}$ je konečná a z Věty 17.1.7 lze odvodit, že je $\Psi(t, y) \notin J(a, b)$ pro $t \in (0, T)$. Proto je

$$\{t \in R |\ \Psi(t, y) \in J(a, b)\} = \{kT |\ k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots\}$$

a tak platí (1.11).

Nechť nastane případ (ii). Pro každé $i = 1, 2, \ldots$ platí, že množina $\{t \in \langle t_1, t_i\rangle |\ \Psi(t, y) \in J(a, b)\}$ je konečná. Proto existuje posloupnost $\tau_1 < \tau_2 < \ldots$ taková, že je $\Psi(\tau_j, y) \in J(a, b)$, $\Psi(t, y) \notin J(a, b)$ pro $t \in (\tau_j, \tau_{j+1})$, $j = 1, 2, \ldots$ a že je $t_i = \tau_{j_i}$ pro $i = 1, 2, \ldots$; přitom j_i je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Z Věty 17.1.7 plyne, že platí buď (1.9) nebo (1.10). Pomocná věta 17.1.9 je dokázána.

Nechť $\varrho(u, Z)$ znamená *vzdálenost bodu u od množiny Z*, tj.

$$\varrho(u, Z) = \inf_{z \in Z} \|u - z\| .$$

17.1.10. Pomocná věta: *Nechť je Z trajektorie periodického řešení, $y \in H$, a nechť je $Z \subset \Omega(y)$. Potom je $\Omega(y) = Z$ a $\lim_{t \to \infty} \varrho(\Psi(t, y), Z) = 0$.*

Důkaz: Nechť je $z \in Z$; $\Psi(., z)$ je periodické řešení s nejmenší periodou $T > 0$. Je-li $y \in Z$, Pomocná věta 17.1.10 zřejmě platí. Nechť je tedy $y \notin Z$. Zvolme transverzálu $J(a, b)$ tak, aby bylo $z \in J(a, b)$. Protože je $z \in \Omega(y)$, existuje posloupnost t'_i taková, že je $\lim_{i \to \infty} t'_i = \infty$, $\lim_{i \to \infty} \Psi(t'_i, y) = z$. Užijme Pomocné věty 17.1.5 a pro $i \geqq k$, kde k je dostatečně veliké, položme $t_i = t'_i + \tau(\Psi(t'_i, y))$. Platí $\tau(\Psi(t'_i, y)) \to 0$ pro $i \to \infty$, tedy

$$\lim_{i \to \infty} t_i = \infty \,, \quad \Psi(t_i, y) = \Psi(\tau(\Psi(t'_i, y)), \Psi(t'_i, y)) \in J(a, b) \,.$$

V případě potřeby posloupnost t_i doplníme tak, že platí $\Psi(t, y) \notin J(a, b)$ pro $t_i < t < t_{i+1}$, $i = k, k + 1, \ldots$. Ze spojitosti funkce Ψ plyne, že $\lim_{i \to \infty} (t_{i+1} - t_i) = T$ a že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje i tak, že je $\varrho(w, Z) < \varepsilon$ pro každý bod w jednoduché křivky L_i složené z částečné trajektorie $\{\Psi(t, y) |\, t_i \leqq t \leqq t_{i+1}\}$ a z transverzály $J(\Psi(t_{i+1}, y), \Psi(t_i, y))$. Nechť je např. $y \in \operatorname{Ext}(Z)$ [viz Poznámku 17.1.8; je-li $y \in \operatorname{Int}(Z)$, postupujeme obdobně]. Nechť $B(0, r)$ je kruh, který obsahuje Z; $p \in R^2 - B(0, r)$. Je $p \in \operatorname{Ext}(Z)$ a pro dosti velká i je $p \in \operatorname{Ext}(L_i)$. Libovolný bod $u \in \operatorname{Ext}(Z)$ můžeme spojit v $\operatorname{Ext}(Z)$ jednoduchým obloukem M [např. lomenou čarou] s bodem p. Je-li i dosti velké, pak $L_i \cap M = \emptyset$ a je $M \subset \operatorname{Ext}(L_i)$, $u \in \operatorname{Ext}(L_i)$. Speciálně je $y \in \operatorname{Ext}(L_i)$ pro $i \geqq k_1$ a obdobně jako v důkazu Pomocné věty 17.1.7 je

$$\begin{aligned} &\{\Psi(t, y) |\, 0 \leqq t < t_i\} \subset \operatorname{Ext}(L_i) \,, \\ &\{\Psi(t, y) |\, t_{i+1} < t\} \subset \operatorname{Int}(L_i) \quad \text{pro} \quad i \geqq k_1 \,. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Je-li $u \in \operatorname{Ext}(Z)$, je $u \in \operatorname{Ext}(L_i)$ pro dosti velké i, zatímco podle (17.1.12) je $\Omega(y) \subset \operatorname{Int}(L_i) \cup L_i$ pro $i \geqq k_1$, tedy $u \notin \Omega(y)$, tj. $\Omega(y) \subset Z \cup \operatorname{Int}(Z)$. Je ovšem $\Psi(t, y) \in \operatorname{Ext}(Z)$ pro $t \geqq 0$, to znamená $\Omega(y) \subset \operatorname{Ext}(Z) \cup Z$. Odtud plyne, že je $\Omega(y) \subset Z$ a že $\lim_{t \to \infty} \varrho(\Psi(t, y), Z) = 0$. Podle předpokladu je $\Omega(y) \supset Z$. Proto je $\Omega(y) = Z$. Pomocná věta 17.1.10 je dokázána.

17.1.11. Věta (Poincaréova-Bendixonova): *Nechť je $y \in H$, $\Omega(y)$ nechť je kompaktní a nechť je $g(u) \neq 0$ pro $u \in \Omega(y)$. Potom $\Omega(y)$ je trajektorie periodického řešení.*

Důkaz: Nechť je $w \in \Omega(y)$. Podle (1.4) je $\Psi(t, w) \in \Omega(y)$ pro $t \in R$, a protože množina $\Omega(y)$ je kompaktní, je [viz (1.5), (1.6)] $\emptyset \neq \Omega(w) \subset \Omega(y)$. Nechť je $z \in \Omega(w)$. Je $g(z) \neq 0$, a tedy existuje transverzála $J(a, b)$ taková, že je $z \in J(a, b)$. Je $z \in \Omega(w)$ a tak existuje posloupnost t'_i taková, že platí

$$\lim_{i \to \infty} t'_i = \infty \,, \quad \lim_{i \to \infty} \Psi(t'_i, w) = z \,.$$

Užitím Pomocné věty 17.1.5 obdobně jako v důkazu Pomocné věty 17.1.10 dokážeme, že existuje posloupnost σ_i tak, že platí

$$\lim_{i \to \infty} \sigma_i = \infty \,, \quad \lim_{i \to \infty} \Psi(\sigma_i, w) = z \,, \quad \Psi(\sigma_i, w) \in J(a, b), \, \sigma_i < \sigma_{i+1}$$

pro $i = 1, 2, 3, \ldots$. Podle (1.4) je $\Psi(\sigma_i, w) \in \Omega(y)$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Zcela obdobným postupem, jako jsme dokázali existenci posloupnosti σ_i v případě bodů $w, z \in \Omega(w)$, zjistíme pro body y, $\Psi(\sigma_i, w)$, že pro každé $i = 1, 2, \dots$ existuje posloupnost $s_{i1}, s_{i2}, s_{i3}, \dots$ taková, že je

$$\lim_{j\to\infty} s_{ij} = \infty\,, \quad \lim_{j\to\infty} \Psi(s_{ij}, y) = \Psi(\sigma_i, w)\,, \quad \Psi(s_{ij}, y) \in J(a, b)\,,$$
$$\text{pro} \quad j = 1, 2, \dots .$$

Je buď $\Psi(\sigma_1, w) = \Psi(\sigma_2, w)$, nebo je $\Psi(\sigma_1, w) \neq \Psi(\sigma_2, w)$. Kdyby nastal druhý případ, nemohly by průsečíky řešení $\Psi(., y)$ s transverzálou $J(a, b)$ tvořit monotónní posloupnost a to by odporovalo Pomocné větě 17.1.9. Je tedy $\Psi(\sigma_1, w) = \Psi(\sigma_2, w)$. Řešení $\Psi(., w)$ je periodické. Položme $Z = \{\Psi(s, w) | s \in R\}$. Podle (1.4) je $Z \subset \Omega(y)$ a podle Pomocné věty 17.1.10 je $Z = \Omega(y)$. Věta 17.1.11 je dokázána.

17.1.12. Poznámka: Věta 17.1.11 zůstane v platnosti, píšeme-li $A(y)$ místo $\Omega(y)$.

17.1.13. Věta: *Nechť Z je trajektorie periodického řešení rovnice* (1.1) *a nechť je* $\mathrm{Int}(Z) \subset H$. *Potom existuje bod $y \in \mathrm{Int}(Z)$ tak, že je $g(y) = 0$.*

Důkaz této věty lze najít např. v [22], kap. 11, § 5 nebo v [58], kap. 6, § 59 nebo v [21], kap. VII, 3.

17.1.14. Poznámka: Podrobné poučení o autonomních soustavách dvou diferenciálních rovnic lze najít v [21], kde je též probrán obecnější případ, že H není část roviny, ale že H je dvoudimenzionální varieta.

17.2. *Diferenciální rovnice* druhého řádu

$$\ddot{y} + f(y)\,\dot{y} + y = 0\,, \tag{2.1}$$

kde funkce f: $R \to R$ je spojitá, se nazývá *Lienardova*. Ve speciálním případě, kdy je $f(y) = \varepsilon(y^2 - 1)$, $\varepsilon \in R$, se rovnice (2.1) nazývá *van der Polova*. V tomto odstavci budou určeny postačující podmínky k tomu, aby rovnice (2.1) měla periodické [nekonstantní] řešení w, a postačující podmínky, aby periodické řešení bylo určeno jednoznačně až na posunutí v čase. Tyto podmínky jsou splněny v případě van der Polovy rovnice při každém $\varepsilon > 0$ a tak pro $\varepsilon > 0$ má van der Polova rovnice jediné periodické řešení [až na posunutí v čase]. Položme

$$F(y) = \int_0^y f(\xi)\, d\xi \quad \text{pro} \quad y \in R\,. \tag{2.2}$$

Je-li u: $\mathscr{I} \to R$ řešení rovnice (2.1), nechť je $x_1(t) = u(t)$, $x_2(t) = \dot{u}(t) + F(y(t))$. Funkce x_1, x_2 zřejmě splňují soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 - F(x_1)\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Naopak, je-li x_1, x_2: $\mathscr{I} \to R$ řešením soustavy (2.3), je x_1 řešením rovnice (2.1). Budeme vyšetřovat soustavu (2.3). Předpoklady budeme formulovat pro funkci F.

Nechť jsou splněny tyto podmínky:

Funkce $F\colon R \to R$ je spojitá. (2.4)

Existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že je $F(y) > 0$ pro $-\alpha < y < 0$, $F(y) < 0$ pro $0 < y < \alpha$. (2.5)

$$\liminf_{y \to \infty} F(y) > 0\,, \quad \limsup_{y \to -\infty} F(y) < 0\,. \tag{2.6}$$

Rovnice (2.3) je jednoznačná. (2.7)

[Je-li funkce f spojitá a platí-li (2.2), pak zřejmě platí (2.4) a (2.7); je-li ještě $f(0) < 0$, pak platí také (2.5).]

Najděme kladná čísla a, b, c tak, aby platilo

$$\begin{aligned} F(y) &< -a \quad \text{pro} \quad y < -b\,,\\ F(y) &< c \quad \text{pro} \quad -b < y < 0\,,\\ F(y) &> -c \quad \text{pro} \quad 0 < y < b\,,\\ F(y) &> a \quad \text{pro} \quad b < y\,. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Položme $r = [b^2 + (c + b^2/[4a])^2]^{1/2}$.

Kružnice K_1, $\tilde{K}_1$, K_2, $\tilde{K}_2$ v R^2, o nichž budeme dále hovořit, budou orientovány ve směru otáčení hodinových ručiček, takže uspořádanou dvojicí bodů B, D na kružnici je jednoznačně určen oblouk od B k D.

Nechť L je jednoduchá křivka, která se skládá [viz obr. 33]:

(i) Z oblouku B_1D_1 kružnice K_1, která má střed v bodě A_1 a poloměr r; $A_1 = (0, a)$, body B_1, D_1 leží na přímce $x_1 = b$.

(ii) Z oblouku D_1E_1 kružnice $\tilde{K}_1$, která má střed v bodě $C_1 = (0, -c)$; bod E_1 leží na ose x_2.

(iii) Z úsečky E_1B_2; bod B_2 leží na přímce $x_1 = -b$ a má od bodu $A_2 = (0, -a)$ vzdálenost r a je symetrický podle počátku s bodem B_1.

(iv) Z oblouku B_2D_2 kružnice K_2, která má střed v bodě A_2; bod D_2 leží na přímce $x_1 = -b$.

(v) Z oblouku D_2E_2 kružnice $\tilde{K}_2$, která má střed v bodě $C_2 = (0, c)$; bod E_2 leží na ose x_2.

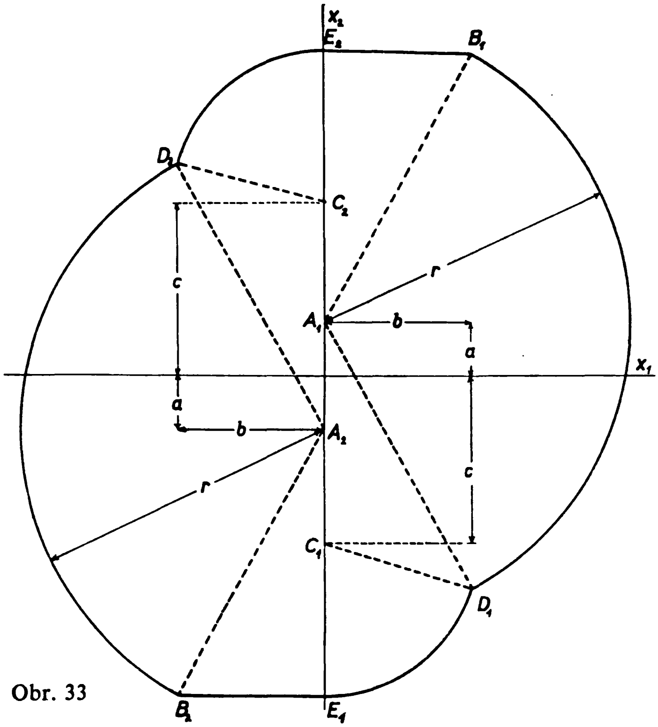
(vi) Z úsečky E_2B_1.

Číslo r bylo stanoveno tak, že úsečky E_1B_2, E_2B_1 jsou rovnoběžné s osou x_1.

Nechť je $p \in R$. Trajektorie rovnice

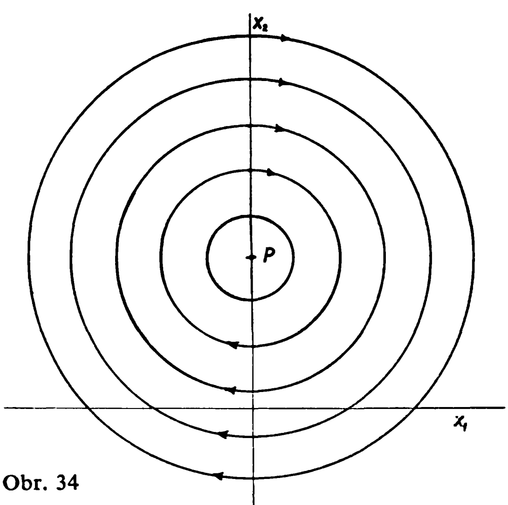
$$\dot{x}_1 = x_2 - p\,,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1$$

jsou kružnice se středem v bodě $P = (0, p)$ a jednobodová trajektorie obsahující bod P [viz obr. 34]. Řešení se po trajektoriích pohybují ve směru otáčení hodinových



Obr. 33

ručiček. Je-li w řešení rovnice (2.3) takové, že $w(t_0) = z = (z_1, z_2) \in L$, pak $\dot{w}(t_0)$ je tečný vektor ke kružnici se středem v bodě $(0, F(z_1))$, která prochází bodem z; tečný vektor směřuje do vnitřku křivky L. Odtud plyne, že platí



Obr. 34

17.2.1. Pomocná věta: *Je-li w řešení rovnice* (2.3) *takové, že $w(t_0) \in L$, pak je $w(t) \in \mathrm{Ext}\,(L)$ pro všechna $t < t_0$ dosti blízká k t_0 a $w(t) \in \mathrm{Int}\,(L)$ pro všechna $t > t_0$ dosti blízká k t_0.*

Jinými slovy: V bodech křivky L řešení rovnice (2.3) vstupují do vnitřku křivky L.

17.2.2. Pomocná věta: *Je-li w řešení rovnice* (2.3) *takové, že je $w_1^2(t_0) + w_2^2(t_0) = \alpha^2$, je $w_1^2(t) + w_2^2(t) \geqq \alpha^2$ pro $t \geqq t_0$ [přirozeně pro taková $t \geqq t_0$, pro něž je definováno $w(t)$].*

Důkaz: Kdyby pro nějaké $t_2 > t_0$ bylo $w_1^2(t_2) + w_2^2(t_2) < \alpha^2$, existovalo by $t_1 \in \langle t_0, t_2)$ tak, že by platilo $w_1^2(t_1) + w_2^2(t_1) = \alpha^2$, $w_1^2(t) + w_2^2(t) < \alpha^2$ pro $t_1 < t \leqq t_2$. To by znamenalo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[w_1^2(t) + w_2^2(t)] = 2w_1(t)[w_2(t) - F(w_1(t))] + 2w_2(t)[-w_1(t)] =$$
$$= -2w_1(t)\,F(w_1(t)) \geqq 0$$

pro $t \in (t_1, t_2)$ podle (2.5), tedy $w_1^2(t_2) + w_2^2(t_2) \geqq w_1^2(t_1) + w_2^2(t_1) = \alpha^2$ a to není možné. Pomocná věta 17.2.2 je dokázána.

Nechť V je množina takových bodů $x \in R^2$, že je $x \in L \cup \mathrm{Int}\,(L)$, $x_1^2 + x_2^2 \geqq \alpha^2$.

17.2.3. Věta: *Jestliže je splněno* (2.4) až (2.7), *má rovnice* (2.3) *periodické řešení; jeho trajektorie je obsažena v množině V; přitom počátek leží ve vnitřku trajektorie každého periodického řešení rovnice* (2.3).

Důkaz: Množina V je omezená a uzavřená, tedy kompaktní. Píšeme-li rovnici (2.3) ve tvaru $\dot{x} = g(x)$, je $g(x) \neq 0$ pro $x \in V$. Nechť $w: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to R^2$ je takové maximální řešení rovnice (2.3), že je $w(\tau) \in V - L$ pro vhodné τ. Podle Pomocné věty 17.2.2 je $w_1^2(t) + w_2^2(t) \geqq \alpha^2$ pro $t \in \langle \tau, \tilde{\beta})$. Je ovšem $w(\tau) \in \mathrm{Int}\,(L)$. Podle Pomocné věty 17.2.1 nemůže existovat takové $\sigma \in \langle \tau, \tilde{\beta})$, aby platilo $w(t) \in \mathrm{Int}\,(L)$ pro $\tau \leqq t < \sigma$, $w(\sigma) \in L$; je tedy $w(t) \in \mathrm{Int}\,(L)$ pro $t \in \langle \tau, \tilde{\beta})$, to znamená $w(t) \in V$ pro $t \in \langle \tau, \tilde{\beta})$. Kdyby bylo $\tilde{\beta} < \infty$, bylo by podle Poznámky 12.1.5 $\lim_{t \to \tilde{\beta}-} \|w(t)\| = \infty$ a to není možné. Je tedy $\tilde{\beta} = \infty$. Protože množina V je kompaktní a je $w(t) \in V$ pro $t \geqq \tau$, je $\emptyset \neq \Omega(w(\tau)) \subset V$ podle (1.6).

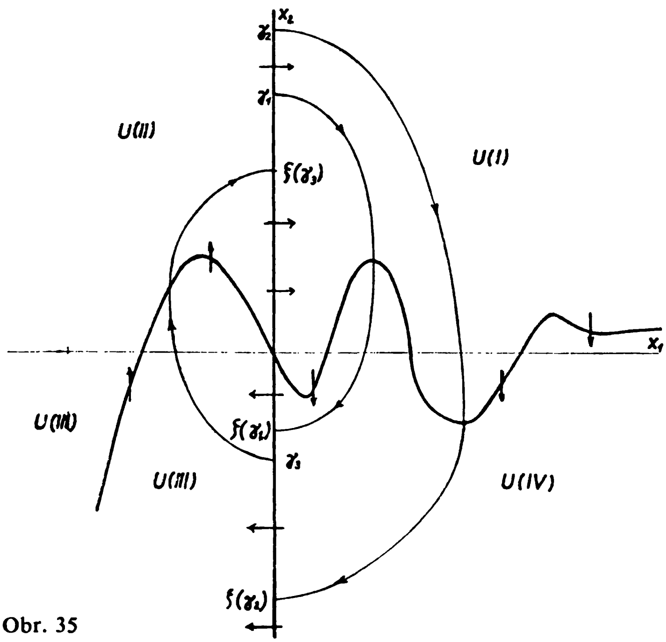
Podle Věty 17.1.11 je $\Omega(w(\tau))$ trajektorie periodického řešení. Píšeme-li rovnici (2.3) ve tvaru $\dot{x} = g(x)$, je $g(x) \neq 0$ pro $x \neq 0$. Z Věty 17.1.13 plyne, že počátek leží ve vnitřku trajektorie každého periodického řešení rovnice (2.3). Věta 17.2.3 je dokázána.

17.2.4. Poznámka: Lze dokázat, že platí toto tvrzení: *Je-li $w: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to R^2$ maximální řešení rovnice* (2.3), *$w \neq 0$, potom $\tilde{\beta} = \infty$ a existuje takové číslo T, že je $w(t) \in V$ pro $t \geqq T$.* Odtud plyne, že trajektorie každého periodického řešení leží ve V.

Všimneme si ještě průběhu trajektorií rovnice (2.3). V rovině vytkneme čtyři otevřené množiny $U(\mathrm{I})$, $U(\mathrm{II})$, $U(\mathrm{III})$, $U(\mathrm{IV})$ ohraničené kladnou a zápornou poloosou x_2 a pravou a levou částí křivky $x_2 = F(x_1)$ [viz obr. 35]. Je

$$U(I) = \{(x_1, x_2) | \, x_1 > 0, x_2 - F(x_1) > 0\}$$

a obdobně jsou definovány množiny $U(\mathrm{II})$, $U(\mathrm{III})$, $U(\mathrm{IV})$. Z tvaru rovnice (2.3) plyne, že v bodech $(0, x_2)$, $x_2 > 0$, řešení rovnice (2.3) přecházejí z $U(\mathrm{II})$ do $U(\mathrm{I})$,



Obr. 35

v bodech $(x_1, F(x_1))$, $x_1 > 0$, přecházejí z $U(\mathrm{I})$ do $U(\mathrm{IV})$, v bodech $(0, x_2)$, $x_2 < 0$, přecházejí z $U(\mathrm{IV})$ do $U(\mathrm{III})$, v bodech $(x_1, F(x_1))$, $x_1 < 0$, přecházejí z $U(\mathrm{III})$ do $U(\mathrm{II})$.

17.2.5. Pomocná věta: *Nechť je* w *maximální řešení rovnice* (2.3), $w_1(0) = 0$, $w_2(0) > 0$. *Potom existuje* $t_1 > 0$ *tak, že je* $w_1(t_1) > 0$, $w_2(t_1) = F(w_1(t_1))$, $w(t) \in U(\mathrm{I})$ *pro* $0 < t < t_1$.

Důkaz: Nechť je $w: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to R^2$; je $\tilde{\alpha} < 0 < \tilde{\beta} \leqq \infty$. [Protože Poznámka 17.2.4 nebyla dokázána, bereme v úvahu i možnost $\tilde{\beta} < \infty$.] Pro dosti malá $t > 0$ je $w(t) \in U(\mathrm{I})$. Dokážeme, že:

$$\text{Existuje } T \in (0, \tilde{\beta}),\ u(T) \notin U(\mathrm{I}). \tag{2.9}$$

Nechť (2.9) neplatí. To znamená, že je $w(t) \in U(\mathrm{I})$ pro $t \in (0, \tilde{\beta})$. Z definice množiny $U(\mathrm{I})$ a z rovnice (2.3) plyne, že funkce w_1 je rostoucí a funkce w_2 je klesající na intervalu $(0, \tilde{\beta})$. Je-li $\tilde{\beta} = \infty$, je $w_1(t) \geqq w_1(l)$ pro $t \geqq l$, $\dot{w}_2(t) = -w_1(t) \leqq -w_1(l) < 0$, odtud plyne, že je $\lim_{t \to \infty} w_2(t) = -\infty$. Současně má být $w(t) \in U(\mathrm{I})$ pro $t > 0$ a to není možné. Je-li $\tilde{\beta} < \infty$, existují konečné limity

$$\lim_{t \to \tilde{\beta}-} w_1(t)\,, \quad \lim_{t \to \tilde{\beta}-} w_2(t)\,.$$

V takovém případě lze řešení w prodloužit a to odporuje předpokladu, že w je maximální. Musí tedy platit (2.9). Nechť t_1 je infimum takových T, pro něž platí (2.9). To znamená, že je $t_1 > 0$, $w(t) \in U(\mathrm{I})$ pro $0 < t < t_1$, $w(t_1) \notin U(\mathrm{I})$. Na intervalu $(0, t_1)$ je funkce w_1 rostoucí a je $w_2(t) - F(w_1(t)) > 0$. Proto je $w_1(t_1) > 0$, $w_2(t) - F(w_1(t)) = 0$. Pomocná věta 17.2.5 je dokázána.

Obdobně se dokáže, že platí

17.2.6. Pomocná věta: *Nechť v je maximální řešení rovnice* (2.3), $v_1(0) > 0$, $v_2(0) = F(v_1(0))$. *Potom existuje $t_2 > 0$ tak, že je $v_1(t_2) = 0$, $v_2(t_2) < 0$, $v(t) \in U(\mathrm{IV})$ pro $0 < t < t_2$.*

17.2.7. Pomocná věta: *Nechť $w: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to R^2$ je maximální řešení rovnice* (2.3), $w_1(0) = 0$, $w_2(0) = \gamma > 0$. *Potom existuje $t_3 > 0$ tak, že je $w_1(t_3) = 0$, $w_2(t_3) < 0$, $w_1(t) > 0$ pro $t \in (0, t_3)$.*

Důkaz: Nechť číslo $t_1 > 0$ je určeno z Pomocné věty 17.2.5 a nechť v je takové maximální řešení, že je $v(0) = w(t_1)$. Je $w(t) = v(t - t_1)$ pro $t \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ a tvrzení Pomocné věty 17.2.7 plyne z Pomocných vět 17.2.5 a 17.2.6.

Obdobně platí

17.2.8. Pomocná věta: *Nechť $w: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to R^2$ je maximální řešení rovnice* (2.3), $w_1(0) = 0$, $w_2(0) < 0$. *Potom existuje $t_4 > 0$ tak, že je $w_1(t_4) = 0$, $w_2(t_4) > 0$, $w_1(t) < 0$ pro $t \in (0, t_4)$.*

Podle Pomocné věty 17.2.7 maximální řešení w, které v okamžiku $t = 0$ vychází z bodu $(0, \gamma)$, kde $\gamma > 0$, protne po prvé zápornou poloosu x_2 v bodě $w(t_3)$, který označíme $(0, \zeta(\gamma))$. Podle Pomocné věty 17.2.8 maximální řešení w, které v okamžiku $t = 0$ vychází z bodu $(0, \gamma)$, kde $\gamma < 0$, protne po prvé kladnou poloosu x_2 v bodě $w(t_4)$, který označíme $(0, \zeta(\gamma))$. Položme ještě $\zeta(0) = 0$. Tak jsme definovali zobrazení $\zeta: R \to R$ [viz obr. 35].

17.2.9 Pomocná věta: *Funkce ζ je klesající a spojitá.*

Tuto pomocnou větu nebudeme dokazovat. Z obr. 35 je patrné [vzhledem k jednoznačnosti rovnice (2.3)], že je $\zeta(\gamma_2) < \zeta(\gamma_1)$ pro $0 < \gamma_1 < \gamma_2$. Spojitost funkce ζ lze dokázat ze spojitosti funkce Ψ.

Význam funkce ζ je patrný z této pomocné věty:

17.2.10. Pomocná věta: *Nechť je $\gamma > 0$ a nechť w je maximální řešení rovnice* (2.3) *takové, že je $w(0) = (0, \gamma)$. Řešení w je periodické řešení právě tehdy, je-li $\zeta(\zeta(\gamma)) = \gamma$.*

Důkaz: Je $\zeta(\zeta(\gamma)) > 0$. Podle definice zobrazení ζ existují t_3, $t_4 > 0$ taková, že je $w(t_3) = (0, \zeta(\gamma))$, $w(t_3 + t_4) = (0, \zeta(\zeta(\gamma)))$. Je-li $\zeta(\zeta(\gamma)) = \gamma$, je w periodické řešení. Složená funkce $\zeta(\zeta(\delta))$ proměnné $\delta \in R$ je rostoucí. Je-li např. $\zeta(\zeta(\gamma)) > \gamma$, potom každý bod $w(t)$, $t > t_3 + t_4$, leží v množině Ext (L), kde L je jednoduchá křivka složená z oblouku $\{w(t) | 0 \leqq t \leqq t_3 + t_4\}$ a z úsečky $J(w(0), w(t_3 + t_4))$. Nemůže tedy být $w(0) = w(t)$ pro žádné $t \geqq t_3 + t_4$ a řešení w není periodické. Obdobně postupujeme, je-li $\zeta(\zeta(\gamma)) < \gamma$. Pomocná věta 17.2.10 je dokázána.

17.2.11. Poznámka: Není těžké dokázat [v podstatě jsme to již udělali], že platí toto tvrzení: Nenulová řešení rovnice (2.3) obíhají počátek ve smyslu otáčení hodinových ručiček a pohybují se přitom buď po uzavřených křivkách, nebo po spirálách, které se s rostoucím t buď stále zvětšují, nebo stále zmenšují.

Z tvaru rovnice (2.3) přímo plyne, že platí

17.2.12. Pomocná věta: *Nechť funkce F je lichá [tj. $F(x_1) = -F(x_1)$ pro $x_1 \in R$]. Nechť w: $\mathscr{I} \to R^2$ je řešení rovnice* (2.3). *Potom funkce $-w$ je též řešení rovnice* (2.3).

Z Pomocné věty 17.2.12 a z definice funkce ζ plyne, že platí

17.2.13. Pomocná věta: *Nechť funkce F je lichá. Potom funkce ζ je lichá.*

17.2.14. Pomocná věta: *Nechť funkce F je lichá, $\gamma > 0$, a nechť w je maximální řešení rovnice* (2.3) *takové, že je $w(0) = (0, \gamma)$. Řešení w je periodické právě tehdy, je-li $\zeta(\gamma) = -\gamma$.*

Důkaz: Nechť je $\zeta(\gamma) = -\gamma$. Protože funkce ζ je lichá, je $\zeta(\zeta(\gamma)) = \zeta(-\gamma) = -\zeta(\gamma) = \gamma$ a w je periodické řešení podle Pomocné věty 17.2.10.

Nechť w je periodické řešení. Podle Pomocné věty 17.2.10 je $\zeta(\zeta(\gamma)) = \gamma$. Položme $\zeta(\gamma) = -\delta$ a nechť je např. $\delta > \gamma$ [je ovšem $\delta > 0$ a v případě $0 < \delta < \gamma$ postupujeme obdobně]. Je $\gamma = \zeta(\zeta(\gamma)) = \zeta(-\delta)$, a protože funkce ζ je lichá, je $\zeta(\delta) = -\gamma$, tj. $\zeta(\delta) > \zeta(\gamma)$ a to není možné, neboť funkce ζ je klesající [viz Pomocnou větu 17.2.9]. Pomocná věta 17.2.14 je dokázána.

17.2.15. Pomocná věta: *Nechť jsou splněny podmínky* (2.4), (2.7) *a nechť dále:*

Funkce F je lichá. (2.10)

Existuje číslo $\beta > 0$ takové, že je $F(x) < 0$ pro $0 < x < \beta$, $F(x) > 0$ pro $x > \beta$. (2.11)

Funkce F je v intervalu (β, ∞) neklesající. (2.12)

Položme $\delta(\gamma) = \zeta^2(\gamma) - \gamma^2$ pro $\gamma > 0$. Potom je $\delta(\gamma) > 0$ pro $0 < \gamma \leqq \beta$; funkce δ na intervalu $\langle\beta, \infty)$ klesá.

Důkaz: Nechť u: $\mathscr{I} \to R^2$ je řešení rovnice (2.3). Potom je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u_1^2(t) + u_2^2(t)] = -2u_1(t)\, F(u_1(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I},$$

a tedy je

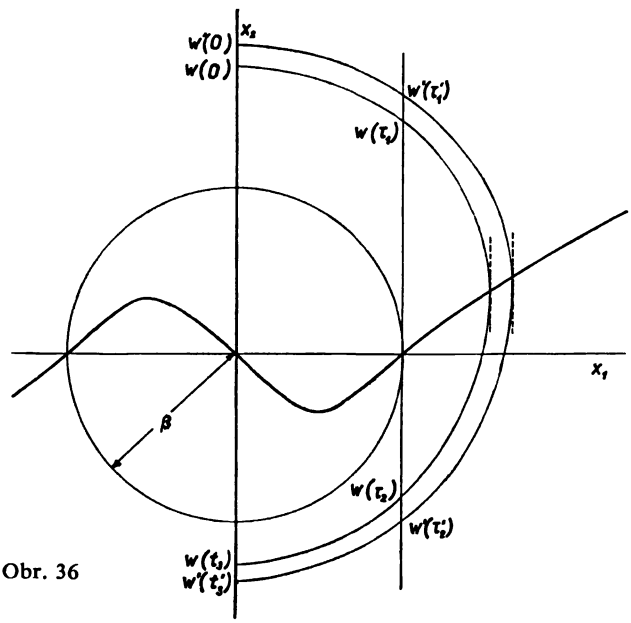
$$u_1^2(\sigma_2) + u_2^2(\sigma_2) = u_1^2(\sigma_1) + u_2^2(\sigma_1) - 2\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} u_1(t)\, F(u_1(t))\,\mathrm{d}t$$

$$\text{pro} \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathscr{I}. \tag{2.13}$$

Nechť $w: (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to R^2$ je maximální řešení z Pomocné věty 17.2.7 a nechť t_3 má stejný význam jako v Pomocné větě 17.2.7. Je $w_1(0) = 0 = w_1(t_3)$, $w_2(0) = \gamma$, $w_2(t_3) = \zeta(\gamma)$ a podle (2.13) platí

$$\zeta^2(\gamma) - \gamma^2 = -2 \int_0^{t_3} w_1(t)\, F(w_1(t))\, \mathrm{d}t\,. \tag{2.14}$$

Je ovšem $w_1(t) > 0$ pro $0 < t < t_3$. Je-li $0 < \gamma < \beta$ a $w_1^2(t) + w_2^2(t) < \beta^2$ pro $0 \leqq t \leqq t_3$, je podle (2.11) $F(w_1(t)) < 0$ a podle (2.14) je $\zeta^2(\gamma) - \gamma^2 > 0$. Je-li $0 < \gamma < \beta$ a existuje-li $\tau \in (0, t_3\rangle$ tak, že je $w_1^2(\tau) + w_2^2(\tau) > \beta^2$, je $w_1^2(t_3) + w_2^2(t_3) \geqq \geqq \beta^2$ podle Pomocné věty 17.2.2 [můžeme položit $\alpha = \beta$] a je opět $\zeta^2(\gamma) - \gamma^2 = = w_2^2(t_3) - \gamma^2 > 0$.



Obr. 36

Ukážeme, že v případě $\gamma \geqq \beta$ řešení w protne přímku $x_1 = \beta$ v bodech $w(\tau_1)$, $w(\tau_2)$ a je $0 < \tau_1 < \tau_2 < t_3$, $w_2(\tau_1) > 0 > w_2(\tau_2)$ [viz obr. 36]. Nechť je tedy $\gamma \geqq \beta$. Podle Pomocné věty 17.2.5 existuje číslo $t_1 > 0$ tak, že je $w_1(t_1) > 0$, $w_2(t_1) = = F(w(t_1))$, $u(t) \in U(\mathrm{I})$ pro $0 < t < t_1$. Protože je $w(t) \in U(\mathrm{I})$, je $\dot{w}_1(t) > 0$ pro $t \in (0, t_1)$, tedy $0 < w_1(t) < w_1(t_1)$ pro $t \in (0, t_1)$. Dokážeme, že je $w_1(t_1) > \beta$. V opačném případě by bylo $F(w_1(t)) < 0$ pro $t \in (0, t_1)$ a podle (2.13) by bylo $w_1^2(t) + + w_2^2(t) > \beta^2$ pro $t \in (0, t_1\rangle$, tedy $w_2^2(t) > 0$ čili $w_2(t) \neq 0$ pro $t \in (0, t_1\rangle$ a to není možné [neboť má platit $0 < w_1(t_1) \leqq \beta$, $w_2(t_1) = F(w_1(t_1)) \leqq 0$, ale $w_2(0) = \gamma > 0$]. Je tedy $w_1(t_1) > \beta$. Odtud plyne, že existuje číslo $\tau_1 \in (0, t_1)$ tak, že je $w_1(\tau_1) = \beta$. Položme $v(t) = w(t + t_1)$; podle Pomocné věty 17.2.6 je $w(t) \in U(\mathrm{IV})$ pro $t \in (t_1, t_1 + t_2)$, $w_1(t_1 + t_2) = 0$, $w_2(t_1 + t_2) < 0$. [Je ovšem $t_3 = t_1 + t_2$.] Proto je

$\dot{w}_1(t) < 0$ pro $t \in (t_1, t_1 + t_2)$ a existuje jediné číslo $\tau_2 \in (t_1, t_1 + t_2)$ tak, že je $w_1(\tau_2) = \beta$. Protože je $w(\tau_2) \in U(\mathrm{IV})$, je $w_2(\tau_2) < 0$. Je $w_1^2(\tau_2) + w_2^2(\tau_2) > \beta^2$, a protože je $0 < w_1(t) < \beta$ pro $t \in (\tau_2, t_1 + t_2)$, je $F(w(t)) < 0$ pro $t \in (\tau_2, t_1 + t_2)$ a podle (2.13) je $\zeta^2(\gamma) = w_2^2(t_1 + t_2) > w_1^2(\tau_2) + w_2^2(\tau_2) > \beta^2$. Speciálně je $\zeta^2(\beta) - \beta^2 > 0$.

Integrál na první straně v (2.14) nahraďme součtem integrálů od 0 do τ_1, od τ_1 do τ_2 a od τ_2 do t_3. Je

$$\int_0^{\tau_1} w_1(t)\, F(w_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\tau_1} w_1(t)\, F(w_1(t))\,[w_2(t) - F(w_1(t))]^{-1}\, \dot{w}_1(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Zavedeme-li integrační proměnnou x_1 rovnicí $x_1 = w_1(t)$, je

$$\int_0^{\tau_1} w_1(t)\, F(w_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^{\beta} x_1\, F(x_1)\,[q_1(x_1) - F(x_1)]^{-1}\,\mathrm{d}x_1\,. \tag{2.15}$$

Přitom funkce $q_1 \colon \langle 0, \beta \rangle \to R$ popisuje v soustavě souřadnic x_1, x_2 trajektorii řešení w pro $0 \leqq t \leqq \tau_1$ (tj.

$$\{(x_1, q_1(x_1)) \mid 0 \leqq x_1 \leqq \beta\} = \{w(t) \mid 0 \leqq t \leqq \tau_1\})\,.$$

Obdobně platí

$$\int_{\tau_2}^{t_3} w_1(t)\, F(w_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\beta}^{0} x_1\, F(x_1)\,[q_3(x_1) - F(x_1)]^{-1}\,\mathrm{d}x_1\,, \tag{2.16}$$

kde funkce $q_3 \colon \langle 0, \beta \rangle \to R$ popisuje v soustavě souřadnic x_1, x_2 trajektorii řešení w pro $\tau_2 \leqq t \leqq t_3$. V integrálu

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} w_1(t)\, F(w_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_{\tau_2}^{\tau_1} F(w_1(t))\, \dot{w}_2(t)\,\mathrm{d}t$$

zavedeme integrační proměnnou $x_2 = w_2(t)$. Je

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} w_1(t)\, F(w_1(t))\,\mathrm{d}t = \int_{w_2(\tau_2)}^{w_2(\tau_1)} F(q_2(x_2))\,\mathrm{d}x_2\,, \tag{2.17}$$

kde funkce $q_2 \colon \langle w_2(\tau_2), w_2(\tau_1) \rangle \to R$ popisuje v soustavě souřadnic x_2, x_1 trajektorii řešení w pro $\tau_1 \leqq t \leqq \tau_2$ [tj.

$$\{(q(x_2), x_2) \mid w_2(\tau_2) \leqq x_2 \leqq w_2(\tau_1)\} = \{w(t) \mid \tau_1 \leqq t \leqq \tau_2\}]\,.$$

Nahraďme nyní číslo γ číslem $\gamma', \gamma' > \gamma$, řešení w řešením w' splňujícím podmínku $w'(0) = (0, \gamma')$, čísla τ_1, τ_2, t_3 odpovídajícími čísly τ_1', τ_2', t_3' a funkce q_1, q_2, q_3 odpovídajícími funkcemi q_1', q_2', q_3'. Protože funkce F v integrálech v (2.15) je záporná, integrál na pravé straně v (2.15) se zvětší, přejdeme-li od funkce q_1 k funkci q_1', tj. nahradíme-li na levé straně řešení w a číslo τ_1 řešením w' a číslem τ_1' [neboť je $q_1'(x_1) > q_1(x_1)$ pro $0 \leqq x_1 \leqq \beta$ (viz obr. 36)]. Obdobně se zvětší integrál na pravé straně v (2.16) a také integrál na pravé straně v (2.17) se zvětší. Je totiž $w_2'(\tau_2') <$

$< w_2(\tau_2) < w_2(\tau_1) < w_2'(\tau_1')$, $q_2'(x_2) > \beta$, tedy $F(q_2'(x_2)) > 0$ pro $w_2'(\tau_2') < x_2 < w_2'(\tau_1')$, $q_2(x_2) < q_2'(x_2)$, tedy $F(q_2(x_2)) \leqq F(q_2'(x_2))$, neboť F je neklesající pro $x_1 \geqq \beta$. Odtud a ze (2.14) plyne, že funkce δ je klesající pro $\gamma \geqq \beta$.

17.2.16. Věta: *Nechť jsou splněny podmínky* (2.4), (2.7), (2.10) *až* (2.12). *Potom rovnice* (2.3) *má až na posunutí v čase jediné periodické řešení.*

Důkaz: Existenci periodického řešení jsme dokázali za slabších podmínek ve Větě 17.2.3. Nechť u, v jsou periodická řešení rovnice (2.3). Podle Poznámky 17.2.11 nenulová řešení rovnice (2.3) obíhají počátek. Proto existují čísla τ_1, τ_2 tak, že je $u_1(\tau_1) = 0$, $u_2(\tau_1) > 0$, $v_1(\tau_2) = 0$, $v_2(\tau_2) > 0$.

Podle Pomocné věty 17.2.14 musí platit $\zeta(u_2(\tau_1)) = -u_2(\tau_1)$, $\zeta(v_2(\tau_2)) = -v_2(\tau_1)$, tedy je $\zeta^2(u_2(\tau_1)) - u_2^2(\tau_1) = 0$, $\zeta^2(v_2(\tau_2)) - v_2^2(\tau_2) = 0$. Protože funkce $\delta(\gamma) = \zeta^2(\gamma) - \gamma^2$ je kladná pro $0 < \gamma \leqq \beta$ a klesající pro $\gamma \geqq \beta$, rovnice $\zeta^2(\vartheta) - \vartheta^2 = 0$ má nejvýše jedno řešení, a tedy je $u_2(\tau_1) = v_2(\tau_2)$, tj. $u(\tau_1) = v(\tau_2)$. Protože rovnice (2.3) je autonomní, je $u(t) = v(t + \tau_2 - \tau_1)$ pro $t \in R$. Věta 17.2.16 je dokázána.

17.2.17. Poznámka: *Nechť jsou splněny předpoklady Věty* 17.2.16 *a nechť* Z *je trajektorie periodického řešení rovnice* (2.3). *Nechť* w *je maximální řešení rovnice* (2.3), $w(\tau) \neq 0$ *pro vhodné* τ. *Potom platí*

$$\lim_{t\to\infty} \varrho(w(t), Z) = 0\,. \tag{2.18}$$

Symbol $\varrho(u, Z)$ byl zaveden před Pomocnou větou 17.1.10.

Důkaz: Trajektorie Z je určena jednoznačně podle Věty 17.2.16. Je-li řešení w periodické, je $w(t) \in Z$ podle Věty 17.2.16 a (2.18) platí. Podle Poznámky 17.2.11 řešení w protne pro $t > 0$ kladnou poloosu x_2 v posloupnosti bodů $w(t_1) = (0, \gamma_1)$, $w(t_2) = (0, \gamma_2)$, $w(t_3) = (0, \gamma_3), \ldots$. Kladná poloosa x_2 je transverzála rovnice (2.3), a proto posloupnost γ_i, $i = 1, 2, \ldots$, je monotónní podle Pomocné věty 17.1.9. Je $\gamma_{i+1} = \zeta(\zeta(\gamma_i))$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Existuje tedy $\lim_{i\to\infty} \gamma_i$ a podle Pomocné věty 17.2.15 nemůže být ani $\lim_{i\to\infty} \gamma_i = 0$ [poněvadž $\delta(\gamma) > 0$ pro malá γ, je $\zeta(\gamma) < -\gamma$ pro malá γ, a protože funkce ζ je lichá, je $\zeta(\zeta(\gamma)) > -\zeta(\gamma) > \gamma$ pro malá γ], ani $\lim_{i\to\infty} \gamma_i = \infty$ [poněvadž existuje periodické řešení, tedy existuje γ_0 tak, že je $\delta(\gamma_0) = 0$, a pro $\gamma > \gamma_0$ je $\delta(\gamma) < 0$]. Je tedy $0 \neq \tilde{\gamma} = \lim_{i\to\infty} \gamma_i \in R$. Vzhledem ke spojitosti funkce ζ [viz Pomocnou větu 17.2.9] je $\tilde{\gamma} = \zeta(\zeta(\tilde{\gamma}))$ a podle Pomocné věty 17.2.10 a Věty 17.2.16 bodem $(0, \tilde{\gamma})$ prochází periodické řešení z rovnice (2.3), je $Z = \{z(t) |\ t \in R\}$ a (2.18) platí podlePomocné věty 17.1.10.

Nechť T je nejmenší kladná perioda řešení z. Ze spojitosti funkce Ψ lze odvodit, že platí $\lim_{i\to\infty} (t_{i+1} - t_i) = T$. Řada $\sum_{i=1}^{\infty} (t_{i+1} - t_i - T)$ však nemusí konvergovat, a proto pro žádné $\sigma \in R$ nemusí platit $\|w(t) - z(t + \sigma)\| \to 0$ pro $t \to \infty$.

[Tento vztah ovšem platí (pro vhodné σ), má-li funkce F spojitou derivaci a má-li příslušná rovnice ve variacích multiplikátor v intervalu $(-1, 1)$ (viz Poznámku 15.4.2; rovnice ve variacích má dva multiplikátory, z nichž jeden je roven 1, a tedy i druhý je reálný)].

17.2.18. Poznámka: Větu 17.2.16 i Poznámku 17.2.17 lze rozšířit na rovnici

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - F(x), \\ \dot{y} &= -g(x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Přitom se předpokládá, že platí (2.4), (2.10) až (2.12) a dále:

Funkce $g: R \to R$ je spojitá; $x\, g(x) > 0$ pro $x \neq 0$; $g(-x) = -g(x)$ pro $x \in R$. (2.20)

Rovnice (2.19) je jednoznačná. (2.21)

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = \infty \tag{2.22}$$

(viz [21], kap. VII, Větu 10.2). Důkazy lze vést obdobně jako pro rovnici (2.3).

17.2.19. Poznámka: Nechť jsou splněny předpoklady Věty 17.2.16 a nechť platí (2.2), kde funkce f je spojitá [f je ovšem sudá]. Je-li x_1, x_2 řešení rovnice (2.3), $x_i: \mathscr{I} \to R$, položme $\eta(t) = x_1(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$. Je $\dot{\eta}(t) = x_2(t) - F(x_1(t))$ a funkce η je řešení rovnice

$$\ddot{y} + f(y)\,\dot{y} + y = 0\,. \tag{2.23}$$

Je-li v_1, v_2 periodické řešení rovnice (2.3), položme $\zeta(t) = v_1(t)$ pro $t \in R$. Pak ζ je periodické řešení rovnice (2.23). Toto řešení je určeno jednoznačně až na posunutí v t a je stabilní v tom smyslu, že platí: Je-li η libovolné maximální řešení rovnice (2.23), a to řešení nenulové, pak se bod $(\eta(t), \dot{\eta}(t))$ pro $t \to \infty$ blíží k množině $\{(\zeta(t), \dot{\zeta}(t)) \mid t \in R\}$.

Obdobně z Poznámky 17.2.18 plyne existence a v jistém smyslu i stabilita periodického řešení rovnice $\ddot{y} + f(y)\,\dot{y} + g(y) = 0$.

Je-li (x_1, x_2) řešení rovnice (2.3) a položíme-li $\xi(t) = x_2(t)$, pak – jak se snadno zjistí – ξ je řešení rovnice $\ddot{\xi} - F(-\dot{\xi}) + \xi = 0$. Tak z výsledků v rovnici (2.3) můžeme odvodit výsledky v rovnici $\ddot{\xi} - F(-\dot{\xi}) + \xi = 0$ [např. o rovnici $\ddot{\xi} + \varepsilon(\dot{\xi}^2 - 1)\,\dot{\xi} + \xi = 0$, $\varepsilon \in R$]. Metod vyložených v tomto odstavci bylo užito např. na rovnici $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -h(x_1, x_2)\, x_2 - g(x_2)$ i na rovnice jiných typů.

17.2.20. Poznámka: Metody tohoto odstavce umožňují popsat vlastnosti van der Polovy rovnice v případě, že parametr ε nabývá velkých hodnot. Rovnice

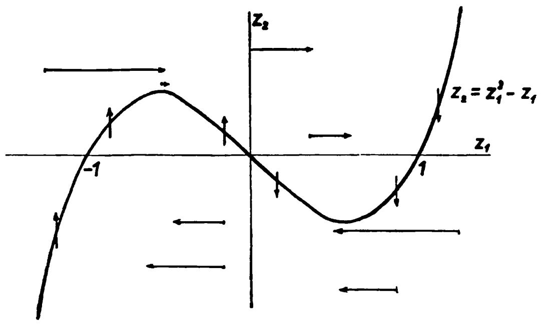
$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 - \varepsilon(x_1^3 - x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1$$

substitucí $x_1 = z_1$, $x_2 = \varepsilon z_2$, $t = \varepsilon\tau$ přejde v rovnici

$$\frac{dz_1}{d\tau} = \varepsilon^2\left(z_2 - z_1^3 + z_1\right),$$

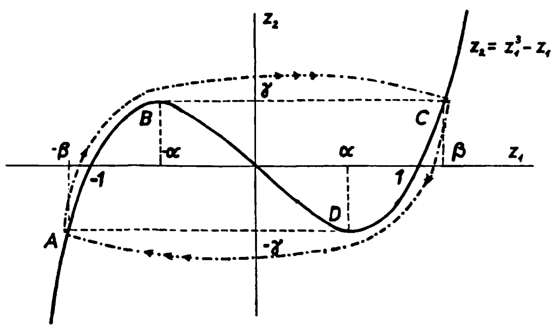
$$\frac{dz_2}{d\tau} = -z_1 . \tag{2.24}$$

V bodě (z_1, z_2), kde $z_2 = z_1^3 - z_1$, $z_1 \neq 0$, je vektor stojící na pravé straně v (2.24) svislý; je-li však $z_2 \neq z_1^3 - z_1$ a ε dosti velké, je tento vektor „téměř vodorovný".



Obr. 37

Schematicky je to znázorněno na obr. 37. Proto lze očekávat [a lze také dokázat], že trajektorie periodického řešení má pro velké ε průběh naznačený na obr. 38.



Obr. 38

Funkce $z_1^3 - z_1$ nabývá lokálního minima pro $z_1 = \alpha = 3^{-1/2}$ a je $\alpha^3 - \alpha = -2(3)^{-3/2} = -\gamma$; táž funkce nabývá lokálního maxima pro $z_1 = -\alpha$ a je $-\alpha^3 + \alpha = \gamma$. Nechť je $B = (-\alpha, \gamma) \in R^2$, $D = (\alpha, -\gamma) \in R^2$. Nechť číslo $\beta > 1$ je řešením rovnice $\beta^3 - \beta = \gamma$ a nechť je $C = (\beta, \gamma)$, $A = (-\beta, -\gamma)$. Bod $(w_1(\tau), w_2(\tau))$ periodického řešení w rovnice (2.24) sleduje oblouk AB křivky $z_2 = z_1^3 - z_1$, pak velmi rychle přeběhne po oblouku téměř přímkovém do blízkosti bodu C, sleduje oblouk CD křivky $z_2 = z_1^3 - z_1$ a rychle přeběhne do blízkosti bodu A. Nechť v okamžiku τ_1 řešení w v blízkosti bodu A protíná křivku $z_2 = z_1^3 - z_1$ a nechť τ_2 je nejbližší následující okamžik, v němž je $w_1(\tau_2) = -\alpha$. Protože platí druhá z rovnic (2.24), je

$$\tau_2 - \tau_1 = -\int_{w_2(\tau_1)}^{w_2(\tau_2)} \frac{\mathrm{d}w_2}{q_1(w_2)},$$

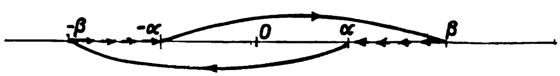
kde rovnice $w_1 = q_1(w_2)$ popisuje oblouk trajektorie řešení w od $w(\tau_1)$ do $w(\tau_2)$. Proto je přibližně

$$\tau_2 - \tau_1 \doteq -\int_{-\gamma}^{\gamma} \frac{\mathrm{d}w_2}{p_1(w_2)} = \Theta,$$

kde rovnice $w_1 = p_1(w_2)$ popisuje oblouk křivky $z_2 = z_1^3 - z_1$ mezi body A, B. Substitucí $w_2 = w_1^3 - w_1$, $p_1(w_2) = w_1$, $\mathrm{d}w_2 = (3w_1^2 - 1)\,\mathrm{d}w_1$ vypočteme

$$\Theta = -\int_{-\beta}^{-\alpha} (3w_1 - w_1^{-1})\,\mathrm{d}w_1 = \tfrac{3}{2}(\beta^2 - \alpha^2) - \ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

Protože po obloucích blízkých úsečkám BC a DA se bod $w(t)$ pohybuje velmi rychle, je perioda T řešení w přibližně rovna 2Θ. Funkce $\xi(t) = w_1(t/\varepsilon)$ je řešením rovnice $\ddot{x}_1 + \varepsilon(3x_1^2 - 1)\,\dot{x}_1 + x_1 = 0$; pohyb bodu $\xi(t)$ na přímce je znázorněn na obr. 39.



Obr. 39

Periodické řešení w rovnice (2.24) má tuto nápadnou vlastnost: Na některých částech své trajektorie se pohybuje velmi rychle, zatímco na jiných částech se pohybuje podstatně pomaleji. Periodická řešení s touto vlastností se nazývají *relaxační kmity*. S relaxačními kmity se setkáváme u soustav

$$\eta \dot{x}_i = g_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$
$$\dot{x}_j = g_j(x_1, \ldots, x_n), \quad j = k + 1, \ldots, n, \tag{2.25}$$

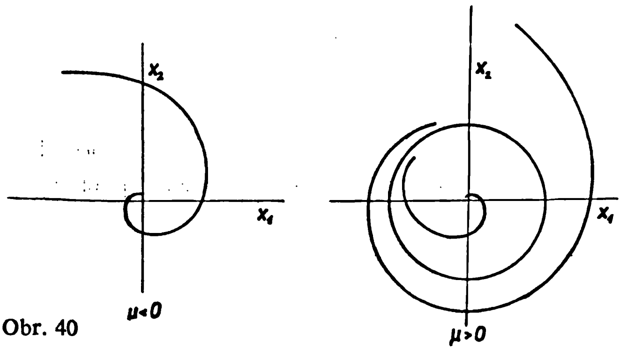
kde číslo η je malé, $\eta \neq 0$, $1 \leqq k < n$. Soustavy typu (2.25) se nazývají *soustavy s malým parametrem u derivací*. Patří mezi ně rovnice (2.24) pro $\eta = \varepsilon^{-2}$, $k = 1$. Soustavám s malým parametrem u derivací a jejich relaxačním řešením je věnována monografie [54].

17.2.21. Poznámka: Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 + \mu x_1,$$
$$\dot{x}_2 = -x_1, \tag{2.26}$$

kde $\mu \in R$. Je-li $\mu \leqq 0$, rovnice (2.25) nemá periodické řešení a pro každé řešení w

rovnice (2.25) platí $\lim_{t \to \infty} w(t) = 0$. Je-li $\mu > 0$, existuje periodické řešení, je určeno jednoznačně až na posunutí v čase a jeho trajektorie se stahuje k počátku pro $\mu \to 0+$ [viz obr. 40]. Bod $\mu = 0$ se nazývá *bod bifurkace* rovnice (2.26). *Bifurkace* znamená větvení a v bodě $\mu = 0$ se jednobodová trajektorie $\{0\}$ rovnice (2.26) větví na trajektorii $\{0\}$ a na trajektorii periodického řešení. Bifurkace řešení diferenciálních rovnic, integrálních rovnic a integrodiferenciálních rovnic je soustavně vyšetřena v [76].



Obr. 40

17.2.22. Poznámka: Bod $\tilde{y} \in H$ se nazývá *singulární bod diferenciální rovnice* (1.1), je-li $g(\tilde{y}) = 0$. Nechť je $g(\tilde{y}) = 0$.

Bod $\tilde{y}$ se nazývá *ohnisko*, jestliže existuje číslo $\varepsilon > 0$ tak, že maximální řešení w splňující podmínku $\|w(0) - \tilde{y}\| < \varepsilon$ je definováno pro $t > 0$, blíží se k $\tilde{y}$ pro $t \to \infty$ a přitom nekonečně mnohokrát oběhne body $\tilde{y}$ po spirále. Místo $t > 0$ a $t \to \infty$ můžeme psát též $t < 0$, $t \to -\infty$. V případě rovnice $\dot{x} = Ax$ [$x(t) \in R^2$, $A \in M_2(R)$] počátek je ohniskem, jestliže pro charakteristická čísla λ matice A platí $\operatorname{Re} \lambda \neq 0 \neq \operatorname{Im} \lambda$. [Viz rovnici (2.6.1) a obr. 10.]

Bod $\tilde{y}$ se nazývá *uzlem*, jestliže existuje takové $\varepsilon > 0$, že maximální řešení w splňující podmínku $\|w(0) - \tilde{y}\| < \varepsilon$ je definováno pro $t > 0$, blíží se k $\tilde{y}$ pro $t \to \infty$, a to tak, že bod $w(t)$ se přitom asymptoticky blíží k přímce procházející bodem $\tilde{y}$, tj. existuje $\lim_{t \to \infty} [w(t) - \tilde{y}] \|w(t) - \tilde{y}\|^{-1}$. Také v definici uzlu můžeme psát $t < 0$, $t \to -\infty$ místo $t > 0$, $t \to \infty$. V případě rovnice $\dot{x} = Ax$ počátek je uzlem, jsou-li vlastní čísla λ_1, λ_2 matice A reálná a je-li $\lambda_1 \lambda_2 > 0$. [Viz rovnici (2.5.1), případ (iii) a obr. 7, 8.]

Bod $\tilde{y}$ se nazývá *sedlo*, jestliže existují trajektorie, po kterých se řešení blíží k $\tilde{y}$ pro $t \to \infty$, i trajektorie, po kterých se řešení blíží k y pro $t \to -\infty$. V případě rovnice $\dot{x} = Ax$ počátek je sedlem, jsou-li vlastní čísla λ_1, λ_2 matice A reálná a je-li $\lambda_1 \lambda_2 < 0$. [Viz rovnici (2.5.1), případ (iv) a obr. 9.]

Bod $\tilde{y}$ se nazývá *centrum*, jestliže v každém jeho okolí leží trajektorie periodického řešení tak, že $\tilde{y}$ leží uvnitř této trajektorie.

Podrobné výsledky o průběhu řešení rovnice (1.1) v okolí singulárního bodu jsou vyloženy v [21], kap. VII, VIII.