VI. Eduard Čech (1893–1960)

In: Zbyněk Nádeník (author); Jindřich Bečvář (author): Moji učitelé geometrie. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2011. pp. 255–271.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402175

VI. EDUARD ČECH

(1893–1960)

A. Eduard Čech a projektivní diferenciální geometrie

Pokud přijmeme jako začátek vědecké práce českých matematiků založení *Spolku pro volné přednášky z mathematiky a fysiky*[1] v roce 1862 [od roku 1869 *Jednota českých mathematiků*], pak lze o této práci napsat, že trvá 150 let. V nich na nejpřednějším místě je Eduard Čech. Připojuji několik článků o něm:

1. Josef Novák – František Vyčichlo – Rudolf Zelinka: *Šedesát let akademika Eduarda Čecha*, Časopis pro pěstování matematiky 78(1953), 185–194. *Шестдесят лет академика Эдуарда Чеха*, Чехословацкий математический журнал 3(78)(1953), 183–198.
2. Miroslav Katětov – Josef Novák – Alois Švec: *Akademik Eduard Čech, 29. VI. 1893 – 15. III. 1960*, Časopis pro pěstování matematiky 85(1960), 477–498.
3. Redakce: *Zemřel akademik Eduard Čech*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 5(1960), 341–342.
4. Павел С. Александров – Сергей П. Фиников: *Эдуард Чех* (*некролог*), Успехи математических наук XVI, 1 (1961), 118–126. *Eduard Čech*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 7(1962), 36–38 (volný překlad bez seznamu prací).
5. Zdeněk Frolík: *Osobnost Eduarda Čecha* (*Zamyšlení k nedožitým 80. narozeninám*), Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 18(1973), 237–247.
6. Ivan Kolář: *Zamyšlení nad diferenciálně geometrickým dílem Eduarda Čecha*, tamtéž 25(1980), 306–312.
7. Jan Vyšín: *Čechovy podněty pro vyučování matematice*, tamtéž 25(1980), 313–317.
8. Bohuslav Balcar – Václav Koutník – Petr Simon: *Eduard Čech*, tamtéž 38(1993), 185–191.[2]

[1] Podrobně o něm píše Martina Bečvářová: *Z historie Jednoty, 1862–1869*, edice Dějiny matematiky, sv. 13, Prometheus, Praha, 1999, 138 stran a 17 obrazových příloh, a *Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918*, edice Dějiny matematiky, sv. 34, Matfyzpress, Praha, 2008, zvláště strany 89–103.

[2] Viz též M. Katětov, P. Simon: *The Mathematical Legacy of Eduard Čech*, Academia, Praha, Birkhäuser, Basel, 1993, 441 stran.

Čechovu vědeckou práci lze rozdělit do tří časových úseků. První na brněnské přírodovědecké fakultě ve dvacátých letech patří projektivní diferenciální geometrii křivek a ploch; druhý rovněž v Brně ve třicátých letech topologii; ve třetím od roku 1945 na pražské Přírodovědecké či Matematicko-fyzikální fakultě a v Matematickém ústavu Československé akademie věd se E. Čech vrátil opět k projektivní diferenciální geometrii, tentokrát k teorii korespondencí.

O Čechově prvním brněnském období jsem mluvil dvakrát. Poprvé při oslavě Čechových šedesátin v roce 1953, podruhé při vzpomínkovém shromáždění k 100. výročí Čechova narození v roce 1993, vždy ve velké posluchárně v budově fakulty v ulici Ke Karlovu 3. Zvláště proslov k Čechovým šedesátinám za přítomnosti oslavence – mého tehdejšího představeného – byl pro mě „zkouškou". Snad se mohu domnívat, že jsem se jí nezhostil úplně špatně, protože jsem od E. Čecha neslyšel nic, co by nasvědčovalo jeho nesouhlasu či nespokojenosti. Druhá promluva už byla snadnější. Nebyl to jen pokus o charakteristiku Čechovy vědecké práce v prvním brněnském období, ale i má osobní vzpomínka na něho.

Co následuje, rozdělím takto: Nejdříve předešlu něco málo o projektivní diferenciální geometrii; následuje přednáška z června 1993; konečně připojuji, jak jsem pracoval na dvou disertacích, k nimž mi náměty zadal E. Čech. V roce 1949/50 jako stipendista Badatelského ústavu matematického při tehdejší Akademii věd a umění a ve třech letech 1951/52 až 1953/54 jako aspirant v Ústředním ústavu matematickém, od roku 1952 v Matematickém ústavu Československé akademie věd, v nichž byl E. Čech ředitelem a mým školitelem.

* * *

Jako projektivní diferenciální geometrie se označuje studium těch vlastností křivek, ploch a jiných geometrických útvarů infinitesimálním počtem, které jsou invariantní vůči grupě projektivních transformací.

Počátky metrické diferenciální geometrie jsou časově neurčité, zřetelněji se projevují až v 18. století spojeny se jmény Alexis Clairaut (1713–1765), Leonhard Euler (1707–1783), Gaspard Monge (1746–1818) aj. Pevný základ metrické diferenciální geometrie položil Carl Friedrich Gauss (1777–1855) ve dvacátých letech 19. století. V jeho druhé polovině už byla metrická diferenciální geometrie velmi rozvinutá nauka. Výborný přehled vývoje diferenciální geometrie napsal Dirk Struik (1894–2000)[3]: *Outline of a history of differential geometry.*[4] Viz zvláště stranu 161 a násl. pro geodetický původ Gaussových spisů o diferenciální geometrii. Využiji příležitosti pro zdůraznění Gaussova zcela mimořádného smyslu pro aplikace. Geodetické jsou shrnuty v Carl Friedrich Gauss: *Werke IX* (Göttingen, 1903, reprint: 1973). Přístupně o nich psal Karel Kořistka (1825–1906), první rektor (1864) utrakvistické pražské polytechniky:

[3] Viz Allyn Jackson: *Dirk Struik Celebrates his 100th*, Notices of the American Mathematical Society 42(1995), 43–45, Chandler Davis – Jim Tattersall – Joan Richards – Tom Banchoff: *Dirk Jan Struik (1894–2000)*, tamtéž 48(2001), 584–589.

[4] Isis-History of science society 19(1933), 92–120, 20(1933), 161–191.

O pracích a vynálezech Gaussových v oboru geodaesie.[5] Čeští matematici si v roce 1977 ze sborníku redigovaného Studničkou příklad nevzali, dali se zastoupit H. Wussingem: *Karl Friedrich Gauss.*[6] Z řady článků připomínajích Gaussovy geodetické práce cituji jen H. Bodenmüller: *Carl Friedrich Gauss zum Gedächtnis*[7] nebo Theo Gerardy: *Die Anfänge von Gauss geodätischer Tätigkeit*[8] nebo též Karl Levasseur: *Carl Friedrich Gauss' grundlegende Bedeutung für die Geodäsie.*[9]

Projektivní geometrii připravovali italští malíři a stavitelé svou perspektivou už v 15. a 16. století a po nich objevným názorem na prostor Girard Desargues (1591–1661). Základní dílo vytvořil Victor Poncelet (1788–1867): *Traité des prospriétés projectives des figures* (Paris, 1822). Významnou účast v rozvoji tohoto geometrického oboru měli i Jacob Steiner (1796–1863) a Michel Chasles (1793–1880).[10] Velmi zhruba řečeno, v projektivní geometrii se studovaly ty vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při projektivní transformaci. Stejně jako zmíněná již metrická diferenciální geometrie, byla v druhé polovině 19. století i projektivní geometrie už rozsáhlým oborem. Zvláště to platí o té její části, která užívala syntetických metod. Autorem prvních prací, které zřetelně spojují obě posledně zmíněné disciplíny, je George Halphen (1844–1889). Studoval v nich styk prostorových křivek při centrálním promítání. Problematika se rychle ujala a rozšířila. První knihu o ní napsal

[1] Ernest Wilczynski (1876–1932): *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig, 1906, 298 stran. – Obsáhlý autorův nekrolog se seznamem prací napsal jeho žák Ernest Lane: *Ernest Julius Wilczynski – in memoriam.*[11] Na straně 9 o Wilczynského vlivu píše: *His influence, moreover, was international and was particularly strong in Italy and Czechoslowakia.* Nepochybně jsou míněni Quido Fubini a Eduard Čech. Podstatně zkrácený italský překlad Laneova článku otiskl Q. Fubini.[12]

Připojuji další knižní literaturu (necituji knihy pojednávající pouze o speciálních otázkách a rumunské spisy):

[2] Eduard Čech: *Projektivní diferenciální geometrie*, Praha, 1926, 406 stran. – V úvodu nahoře na straně 6 čteme: … *abych svým výkladům dal onu for-*

[5] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 6(1877); 174–184, jedná se o jeden z článků k 100. výročí Gaussova narození otištěných na stranách 145 až 197. Vyšlo též samostatně: František Studnička: *Karel Bedřich Gauss* (Praha, 1877, 52 stran). Viz též k 200. výročí Georgij Karský: *Gaussův vzorec, Gaussova metoda …*, Geogetický a kartografický obzor 23(1977), 108–110.

[6] Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 22(1977), 195–204.

[7] Zeitschrift für Vermessungswesen 80(1955), 33–42.

[8] Tamtéž 102(1977), 1–20.

[9] Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 43(1955), 1–16.

[10] Ta účast vedla též k třenicím. Pro poměr Poncelet-Steiner viz redakční zprávu o Ponceletově knize v Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), 96. K poměru Poncelet-Chasles viz Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, 54(1862), 1144–1148.

[11] Bulletin of the American Mathematical Society 39(1933), 7–14.

[12] Annali di matematica pura ed applicata (4) 11 (1933), 363–364.

mální přesnost, jež v učebnicích analyse a algebry je dnes něčím samozřejmým. Považuji tuto větu za oprávněnou narážku na stav tehdejší české geometrické literatury. – Recenzi na Čechovu knihu napsal Jiří Klapka.[13] Začíná ji citátem, který jsem právě uvedl, pokračuje popisem obsahu a končí takto:

Největší cenu knihy však spatřuji v její bezpodmínečné přesnosti a české matematické literatuře jest velkou ctí, že se může vykázati tímto dílem, jež by také mohlo znamenati konec zmatků plynoucích z nedostatku terminologie analytické projektivní geometrie, která až dosud byla přizpůsobena toliko potřebám geometrie algebraické. Jest však, bohužel, nutno vysloviti obavu, že v našich malých poměrech nebude dosti využito podnětů, jež kniha podává a jest na nás mladých, abychom tyto obavy rozptýlili.

Připomínám si Čechův povzdech někdy z první poloviny padesátých let, že jeho kniha byla málo čtena. – Autorem výstižného referátu je Bohumil Bydžovský.[14] Opakuje, co jsem citoval z Čechovy předmluvy, a končí takto:

Das vierte und letzte Kapitel enthält hauptsächlich die bekannte Theorie Čech's der Regelflächen. Es braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass auch in den übrigen Kapiteln vieles enthalten ist, was zu den selbständigen Schöpfungen des Verf. gehört; dieses, sowie die knappe und äuserst strenge Form verleiht dem Buche seinen Wert und auch ein eigenes Gepräge.

[3] Quido Fubini (1870–1943) – Eduard Čech: *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, I. díl: 1926, strany 1–388, II. díl: 1927, strany 398–794.[15]

[4] Quido Fubini – Eduard Čech: *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, Paris, 1934, 291 stran. – Tato kniha měla usnadnit studium předcházejících dvou svazků obou autorů. V posledních třech kapitolách (str. 206–256) vyložil E. Čech soustavně teorii vnějších forem v souvislosti s metodou pohyblivého reperu ve tvaru, který jí dal Élie Cartan (1869–1951).

[5] Ernest P. Lane (1886–1969): *Projective Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Chicago, 1932, XI+321 stran.

[6] Сергей П. Фиников (1883–1964): *Проективно-дифференциальная геометрия*, Moskva, 1937, 263 stran. – Učebnice mi zůstala nepřístupná. V článku (*) z roku 1985 (viz dále) na straně 320 je zmínka, že se připravuje její francouzské vydání v Paříži; není mi známo, došlo-li k němu. O autorovi viz А. М. Васильев – Г. Ф. Лаптев: *Сергей Павлович Фиников* (*Некролог*).[16] K 100. výročí vyšla série čtyř článků М. В. Васильева: *С. П. Фиников*;

[13] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 56(1927), 132–133.

[14] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 52(1935), 753.

[15] Recenzi na oba díly této knihy napsal Ludwig Berwald (1883–1942), viz Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 35(1927), 69–71, 37(1928), 103–105. Obě výborně vystihují a zařazují díl I i II, pokaždé s velmi mírně formulovanou výtkou na konci, že z textu se nedá určit, co je autorů a co jiných matematiků. Toho si musí povšimnout každý, kdo ty svazky jen trochu prolistuje. L. Berwald recenzoval i knihu [4], tamtéž, 43(1934), 50–51. Fubiniho nekrolog je v Bollettino della Unione matematica italiana (3) 1 (1946), 56–58.

[16] Успехи математических наук XIX, 4 (1964), 155–158, se soupisem prací na stranách 158–162.

ников; Н. Н. Лузин: *Отзыв о научных работах проф. С. П. Финикова* s doplňkem za roky 1938–1946; (*) С. А. Чаплыгин – Н. Н. Лузин: *Научные работы С. П. Финикова.*[17]

[7] Ernest Lane: *A Treatise on Projective Differential Geometry*, Chicago, 1942, IX+466 stran.

[8] Gerrit Bol (1906–1989): *Projective Differentialgeometrie*, Göttingen, I. díl: 1950, VII+365 stran, II. díl: 1954, 372 stran, III. díl: 1967, VIII+527 stran.[18]

Ve Fubiniově-Čechově knize [4] je obsáhlá bibliografie na stranách 257–290. Čítá kolem 600 položek, z nich téměř 50 je do roku 1900. V první Laneově knize [5] zabírá seznam literatury strany 305–311, ve druhé knize [7] strany 453–461. G. Bol v 1. dílu [8] na stranách 302–352 navazuje i číslováním na Fubiniho-Čechův soupis z [4] a rozšiřuje jej o dalších víc než 700 položek.

Nedostupný mi zůstal soupis, který pořídila Pauline Sterry: *Bibliography of Projective Differential Geometry.*[19]

* * *

Ve sborníku *Mathematics throughout the Ages*[20] uveřejnila Lenka Čechová stať *The first Czech textbooks on the Differential Geometry* (str. 296–305), kterou končí touto větou o učebnici Václava Hlavatého (1894–1969) *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet* (Praha, 1937, německý překlad: Groningen 1939):

V. Hlavatý created a modern textbook including tensor calculus and leading Czech geometry to the world-class level.

Je nesrozumitelné, jak mohla autorka přehlédnout Eduarda Čecha a jak si toho mohl nevšimnout i editor – též proto, že oba pracují na brněnské přírodovědecké fakultě jako kdysi E. Čech. Hlavatého učebnici jsem ještě v Brně studoval s velkým zájmem a obdivem. Přesností přesahuje Sobotkovy litografické přednášky *Diferenciální geometrie I, II, III* (Praha 1909 až 1914) i Bohuslava Hostinského *Diferenciální geometrii křivek a ploch* (Praha, 1915, další vydání: 1942, 1950). Ale když jsem ve školním roce 1950/51 pracoval ve Vyčichlově knihovně, tak cizojazyčné knihy – zvláště Wilhelm Blaschke (1885–1962): *Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Elementare Differentialgeometrie*[21] mi ukázaly, jak je Hlavatého kniha obsahem zastaralá. Až na Gaussovu-Bonnetovu větu o geodetickém trojúhelníku na ploše není v ní nic z diferenciální geometrie ve velkém, dokonce ani elementární věta o čtyřech vrcholech vejčité křivky.

---

[17] Историко-математические исследования 29, Moskva, 1985, 285–293, 293–316, 316–318, 319–321.

[18] Podrobné referáty o všech dílech jsou v Mathematical Reviews 11(1950), 539 (V. Hlavatý); 16(1955), 1150 (C. C. Hsiung); 37 (1969), 840 (E. Bompiani).

[19] University of California Publications in Mathematics 2(1931).

[20] History of Mathematics, vol. 17, Praha, 2001, editor Eduard Fuchs.

[21] Berlin, 1921, 5. vydání z roku 1973 značně přepracoval a rozšířil Kurt Leichtweiss (*1927).

Program konference
ke 100. výročí narození
Eduarda Čecha

Místo: *Praha, MFF UK, Ke Karlovu 3*

Doba: *17. - 19. června 1993*

Čtvrtek 17.6. Posluchárna M1

9^{00}

Zahájení

Profesor K. Drbohlav, děkan MFF UK
Profesor R. Palouš, rektor Karlovy University

$9^{30} - 12^{30}$

Matematika E. Čecha, předseda J. Daneš

Promluví profesoři
Z. Nádeník
I. Kolář
P. Simon
J. Bureš

$14^{30} - 16^{30}$

Osobnost a odkaz E. Čecha, předseda Profesor J. Kurzweil

Promluví profesoři
M. Katětov
Š. Schwarz
J. Nečas
P. Vopěnka

Pátek 18.6. Přednášky v sekcích od 9^{00}

Obecná topologie a kombinatorika
posluchárna M1
Algebraická topologie a diferenciální geometrie
posluchárna M2
Vyučování matematiky
posluchárna M3

Sobota 19.6.

9^{00}

Prohlídka historických objektů Karlovy University
(sraz u Karolina)

Předností Hlavatého učebnice je ovšem tensorový počet, ale obsahem tkví dosti hluboko v 19. století, je poplatná výběru látky, který provedl Luigi Bianchi (1856–1928) v prvních kapitolách svého díla známého hlavně z německého překladu *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Leipzig, 1899, 2. vydání: 1919).

Čechův výrazný smysl pro přesnost se projevil už v jeho první publikované práci (pro PhDr.) *O křivkovém a plošném elementu třetího řádu projektivního prostoru.*[22] Ačkoliv byl profesor Jan Sobotka u Čechova doktorátu, E. Čech neváhal ve své disertaci upozornit na Sobotkovu nepřesnou syntetickou infinitesimální úvahu z roku 1903, která vedla k chybným tvrzením v práci Josefa Klobоučka (1875–1939) z roku 1920; viz pozn. [1]) na straně 234 citované Čechovy disertace.

Lenka Čechová nesrovnává Hlavatého knihu s žádnou zahraniční učebnicí diferenciální geometrie. V seznamu literatury uvádí pouze dvě známá rozsáhlá základní díla, jejichž autory jsou Gaston Darboux (1842–1917) a Luigi Bianchi. Závěr z jejího výše citovaného článku je třeba změnit takto: *E. Čech created 1926 a modern textbook – as in subject as in exactness – and led Czech geometry to the world-class level.*

B. Přednáška při vzpomínkové slavnosti v červnu roku 1993 k 100. výročí Čechova narození

Vaše Magnificence, Spectabilis, vážené paní, pánové,

prosím Vás, abych předně mohl poděkovat organizačnímu výboru za pozvání, kterého si vážím. Eduard Čech byl několik let mým bezprostředním představeným, a proto jsem pozvání rád přijal.

U Čechovy vědecké činnosti zůstanu pouze u jeho brněnského období projektivní diferenciální geometrie, tedy od roku 1921, kdy publikoval vůbec své první práce, až do začátku třicátých let. Omezím popis Čechových výsledků ve prospěch několika pohledů, které ovšem též budou zúženy. Předně naznačím situaci v diferenciální geometrii; za druhé učiním totéž o projektivní geometrii, aby vyniklo, jak Čech obě geometrické disciplíny spojoval. Pokusím se vystihnout, jaký byl do dvacátých let v Praze stav vědecké práce v těchto oborech. Zkusím tím zdůraznit, jak rozhodný krok učinil Eduard Čech při volbě své vědecké orientace. Současně se dotknu některých Čechových výsledků. A skončím osobní vzpomínkou.

Diferenciální geometrie začíná v 18. století jednotlivými aplikacemi infinitesimálního počtu na geometrii. Až ve dvacátých letech 19. století vytvořil Carl Friedrich Gauss soustavné základy a diferenciální geometrie se pak stala samostatnou naukou.

---

[22] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 50(1921), 219–249.

Gauss do ní vnesl dvě diferenciální kvadratické formy. První pozitivně definitní forma určuje vnitřní geometrii plochy. Anulování druhé formy vede k asymptotickým čarám plochy. Kdybych užil staré terminologie zdomácnělé hlavně v syntetické geometrii, popsal bych situaci takto. Všechny přímky jdoucí v tečné rovině plochy dotykovým bodem mají s plochou dvoubodový styk; necháme-li stranou jisté výjimečné případy, jsou mezi nimi dvě, které mají s plochou styk trojbodový – to jsou tečny asymptotických čar.

Z tohoto náznaku lze vytušit, že první základní kvadratická forma spolu s druhou základní kvadratickou formou ovládají geometrii plochy. Ale nejen to. Jestliže naopak jsou dány dvě kvadratické diferenciální formy – jedna z nich je pozitivně definitní – a jestliže koeficienty těchto forem splňují jisté relace, známé geometrům už hluboko v minulém století, tak až na umístění v prostoru existuje právě jedna plocha, pro niž je ona předem zvolená pozitivně definitní forma první základní formou a ona předem zvolená další forma druhou základní formou.

Přibližně za sto let od Gaussových zakladatelských prací zahajuje svou vědeckou činnost Eduard Čech. Tehdy už byla diferenciální geometrie rozsáhlou naukou s řadou odnoží, které slibovaly velký rozvoj a oživení diferenciální geometrie či její úzké spojení s jinými partiemi geometrie. To byl i případ projektivní diferenciální geometrie.

Tím přecházím k projektivní geometrii. Jako nauka o těch vlastnostech geometrických útvarů, které se nemění při projektivní transformaci, tedy třeba při centrálním promítání – má starší počátky než diferenciální geometrie. Jejím praotcem je Girard Desargues z první poloviny 17. století; jejími prapředky jsou výtvarní umělci a architekti italské renesance.

Tak jako Gauss po pracích svých předchůdců osamostatnil diferenciální geometrii, tak v téže době – opět ve dvacátých letech minulého století – Jean Victor Poncelet učinil totéž s projektivní geometrií. Poncelet se jako důstojník zúčastnil Napoleonova tažení do Ruska; dostal se do zajetí, v němž na štěstí mohl promýšlet svou nauku, s jejímiž základy ho seznámili jeho pařížští učitelé; po návratu do Paříže své teorie dokončil a knižně vydal. Poncelet důsledně vycházel z centrálního promítání a zřetelně si uvědomoval princip duality, který má v projektivní geometrii základní význam. Podle tohoto principu jsou zcela rovnocennými elementy v rovině bod a přímka, v prostoru bod a rovina. Ještě v první polovině minulého století rozvinuli August Möbius a Julius Plücker analytické studium projektivní geometrie. Princip duality přivedl Plückera k chápání přímky jako vytvářejícího – nikoliv vytvořeného – elementu, z čehož se odvinulo studium přímkových útvarů.

Projektivní diferenciální geometrie – jak její název říká – spojuje geometrii diferenciální s projektivní; název už nepraví, že s projektivní geometrií studovanou analyticky, i když by se našly styčné body se syntetickou geometrií. Projektivní diferenciální geometrie tak zahrnuje ty infinitesimální vlastnosti geometrických útvarů, které se nemění při projektivní transformaci. Např. dvě křivky, které se ve společném bodě dotýkají, mají po projektivní transformaci jiný tvar, ale zachovávají dotyk v korespondujícím společném bodě. Nebo oskulační rovina křivky přechází v rovinu opět oskulační transformované čáry. Podobně asymptotické čáry plochy se transformují v asymtotické čáry korespondující plochy. Už z tohoto malého výčtu je vidět, jak významnou úlohu má v projektivní geometrii styk křivek a ploch.

A vskutku, byl to tento objekt, který byl předmětem prvního soustavného studia v projektivní diferenciální geometrii. Zahájil je v sedmdesátých letech minulého století George-Henri Halphen, většinu svého nedlouhého věku důstojník francouzské armády. Kolem roku 1880 publikoval práce o styku křivek při centrálním promítání. Zvláště šlo o podmínky, za nichž se takovou projekcí zvyšuje řád styku. Na Halphenovy práce Eduard Čech později několikrát navázal, asi nejvýznamněji ve své česky psané knize *Projektivní diferenciální geometrie* z roku 1926, v níž Halphenovy výsledky o styku křivek znovu dokázal a rozšířil do n-rozměrného prostoru, kdy středem promítání je jeho podprostor.

V projektivní diferenciální geometrii je první knihou *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces*, kterou v roce 1906 vydal Ernest Julius Wilczynski. Týkala se křivek a přímkových ploch. Wilczynski po ukončení studia na berlínské univerzitě v roce 1897 působil ve Spojených státech amerických, kde roku 1932 zemřel. Z předmluvy je patrné, že zamýšlel pokračovat knihou o obecných nepřímkových plochách, k tomu už nedošlo. Wilzynskiho metodu lze charakterizovat jako aplikaci systémů diferenciálních rovnic a vyšetřování jejich invariantů vůči grupě projektivních transformací.

Guido Fubini, s nímž později Eduard Čech napsal významná díla, publikoval první práci o projektivní difereciální geometrii v roce 1914. Fubini byl o 14 let starší než Čech, pracoval na univerzitách v Catanii, Janově a Turíně; v roce 1938 emigroval do Spojených států amerických, kde roku 1943 zemřel. Fubiniho metodu – na rozdíl od Wilczynskiho – vyznačuje simultánní studium diferenciálních forem. Odvolávám se na to, co jsem řekl o dvou Gaussových kvadratických diferenciálních formách v metrické geometrii. V projektivní diferenciální geometrii k nim tvoří protějšek opět dvě diferenciální formy, ale jedna je kvadratická, druhá kubická. Anulování kvadratické formy vede k asymptotickým čarám plochy, anulování kubické formy určuje na ploše Darbouxovy čáry. K jejich tečnám v bodě plochy došel Gaston Darboux v roce 1880 při studiu tečen průniku plochy s oskulační kvadrikou v onom bodě.

Pomocí projektivní normály plochy se vytvoří další kvadratická diferenciální forma – analogie s druhou základní Gaussovou formou je zřejmá. Mezi koeficienty těchto celkem tří základních diferenciálních forem jsou tři relace algebraické a další diferenciální. Pokud naopak jsou při předem daných takových formách zmíněné relace splněny, existuje nepřímková plocha, která má tyto formy za základní – tato plocha je určena až na nesingulární projektivity. Zase jistě cítíme analogii s metrickou diferenciální geometrií a jejími Gaussovými formami. Ale podstatně větší počet parametrů v grupě projektivních transformací způsobuje, že studium diferenciální geometrie projektivní je zpravidla spojeno s většími obtížemi.

Ve studijním roce 1921/22 byl Eduard Čech na státní stipendium v Turíně v bezprostřední blízkosti Fubiniho. Guido Fubini viděl tehdy už jistě zřetelně obrysy projektivní diferenciální geometrie jako nové matematické disciplíny a hledal spolupracovníky. Eduard Čech byl pro něho pravým objevem. Vyzval ho ke společné práci na monografii *Geometria proiettiva differenziale*, jejíž první díl vyšel v roce 1926 a druhý o rok později v úctyhodném rozsahu 660 stran, nepočítám-li rozsáhlé dodatky, jejichž autory byli Tzitzeica, Bompiani a Terracini.

Studium této monografie není snadné. Aby ulehčili přístup k diferenciální projektivní geometrii, rozhodli se oba autoři vydat rozsahem útlejší úvod do této nauky. Tak zveřejňují v roce 1931 knihu *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces*, do níž Eduard Čech pojal i své výsledky z doby těsně předcházející, nezahrnuté v italské monografii. Lze soudit, že francouzsky psaná kniha je víc dílem Eduarda Čecha než Fubiniho. I v ní se projevila veliká Čechova prozíravost do budoucího vývoje diferenciální geometrie.

A ještě krátké doplnění. Patrně nejstarší prací z projektivní diferenciální geometrie je dopis, který v roce 1863 napsal Théodore-Florintin Moutard Ponceletovi. Týkal se zjištění, že oskulační kuželosečky různých rovinných řezů plochy, které jsou proložené pevnou tečnou v obyčejném jejím bodě, tvoří kvadriku. V roce 1880 ji znovu našel Darboux. Na okraj poznamenávám, že Moutardova kvadrika je projektivním protějškem k Meusnierově větě z metrické diferenciální geometrie.

V jedné ze svých prvních prací z roku 1921 se Eduard Čech zabýval Moutardovými kvadrikami příslušnými různým tečnám v témže bodě plochy. Ukázal též, že Moutardova kvadrika je základem pro studium rovinných křivek plochy, na které se lze omezit při vyšetřování elementů 4. řádu všech křivek plochy jdoucích jejím zvoleným bodem.

Mezi diferenciální geometrií metrickou a projektivní je afinní diferenciální geometrie, jejíž rozsah asi od roku 1915 je úzce spjat s Prahou, totiž se známým matematickým kroužkem na tehdejší německé univerzitě.

Eduard Čech věnoval afinní diferenciální geometrii v roce 1923 rozsáhlou práci *Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine*. Jako jednu ze základních úloh infinitesimální geometrie ploch při jakékoliv grupě transformací označil vyhledání všech invariantů čáry na ploše, když tato plocha je definována – až na transformaci oné grupy – diferenciálními výrazy či formami. Eduard Čech postřehl, že dlouhá série prací o afinní diferenciální geometrii neobsahuje řešení tohoto problému, což označil jako *cette lacune frappante*, a pak *tuto překvapující mezeru* vyplnil.

Nyní načrtnu stav, který byl v Praze v diferenciální a projektivní geometrii před Čechovým nástupem k vědecké práci, tedy před rokem 1920.

V projektivní geometrii studované synteticky byl jistě příznivý zásluhou známé české geometrické školy, která se zformovala ještě ve druhé polovině minulého století. Ale v projektivní geometrii studované analyticky už byl skromnější. Eduard Weyr, který projektivní geometrii věnoval práce založené jak na metodě syntetické tak analytické, zemřel už v roce 1903 a vědecký zájem Bohumila Bydžovského se nesl jiným směrem než k infinitesimální geometrii.

V diferenciální geometrii byla situace rovněž skromná. Kromě litografovaných přednášek Jana Sobotky z let 1909 až 1914 byla jedině útlá kniha Bohuslava Hostinského *Diferenciální geometrie křivek a ploch* z roku 1915. Byli v Praze jen dva autoři, kteří se do dvacátých let ve větší míře zabývali diferenciální geometrií – totiž opět Eduard Weyr a po něm Bohuslav Hostinský, který začal publikovat v roce 1907. Ale ačkoliv je nám Eduard Weyr patrně znám jako náš významný geometr druhé poloviny minulého století, nejsou jeho práce z diferenciální geometrie v jeho díle nejdůležitější. V posledních měsících jsem je měl všechny v rukou, a tak vím z čerstvého ověření, že Weyrovým pracím z diferenciální geometrie nekřivdím. Hostinského útlá knížka má množství látky; patří mezi učebnice metrické diferenciální geometrie, které nepodlehly Bianchiho výběru z jeho *Lezioni di geometria differenziale* z přelomu století; je na ní patrný spíše francouzský vliv; ale dikcí je přece jen poplatná předešlým zvyklostem.

Když tedy kolem roku 1920 volí Eduard Čech směr vědecké práce, projevil velikou znalost literatury a velikou samostatnost ve své orientaci. Daleko překročil tehdejší pražské poměry v geometrii. A když pak v roce 1926 – jako třiatřicetiletý – vydal knihu *Projektivní diferenciální geometrie*, tak velice, velice vyzvedl česky psanou literaturu o diferenciální geometrii. V úvodu Eduard Čech vytýká, že se omezil na nejjednodušší problémy projektivní geometrie a pokračuje touto větou: *Místa tímto omezením získaného užil jsem k tomu, abych svým výkladům dal onu formální přesnost, jež v učebnicích analyse a algebry je dnes něčím samozřejmým.* V této větě je mnoho skryto. Jí mířil Eduard Čech jistě na tehdejší naše poměry v geometrii. Ale je třeba připojit, že jí mohl mířit i na část tehdejší zahraniční geometrické literatury. Už jen skutečnost, že u nás byl ve dvacátých letech mladý geometr, který tuto věc vyslovil a uskutečňoval, měla pro rozvoj naší vědecké práce v geometrii hluboký význam.

Vzpomínám si, jak si jednou Eduard Čech posteskl, že jeho česky psaná kniha o diferenciální geometrii byla málo čtena. Pokouším-li se nyní – s odstupem řady desetiletí – přehlédnout dobu, kdy vznikla, i dobu po ní blízce následující, řekl bych, že Eduard Čech svou knihou tehdy naše prostředí velmi předběhl.

Od roku 1921 do roku 1931 publikoval Eduard Čech z projektivní diferenciální geometrie 36 prací, z nich 9 česky, 21 francouzsky, 5 italsky. Jediná německy publikovaná práce je podrobný výtah z přenášky na výročním shromáždění Německé matematické společnosti v Praze v roce 1929. Příspěvky v *Atti della Accademia nazionale dei Lincei* – celkem je jich 12 – jsou kratší sdělení, za nimiž je však skryto ohromné množství práce. Ostatní publikace otištěné ve *Spisech přírodovědecké fakulty Masarykovy university v Brně*, v *Rozpravách České akademie věd a umění*, v *Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky* a v *Annali di Matematica* jsou vesměs velmi rozsáhlé.

Studium diferenciální geometrie je zpravidla spojeno s obtížnými výpočty. To platí i o Čechových pracích. Každý, kdo je studoval, musí se vyznat z obdivu, jak často Eduard Čech z velmi mnoha myslitelných postupů dokázal zvolit ten pravý. Obdiv k Čechovým pracím musí zahrnovat nejen výsledky samé, ale i technické pozadí, z něhož k nim přišel.

Pokusím se naznačit alespoň některé z hlavních Čechových myšlenek, problémů a řešení. Nemohu tak učinit jinak, než ve velmi hrubých obrysech.

O tom, jaký význam přisuzoval Eduard Čech studiu křivek a ploch, jsem se už zmínil, když jsem se dotkl Halphenova problému. Studium styku křivek a ploch a obecněji variet prostupuje celým Čechovým dílem a patří jistě k ústředním Čechovým motivům v projektivní diferenciální geometrii.

Jiný významný Čechův motiv je studium korespondencí mezi geometrickými útvary, tedy nikoliv jen studium útvaru samého. Tento námět se prolíná už prvními Čechovými pracemi. Zvláště bych se zmínil o rozsáhlé studii s názvem *Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek*; poznamenávám jen zcela na okraj, že se Eduard Čech nevyhýbal pojmenováním ze syntetické geometrie, dával jim ovšem přesný význam. V této studii aplikoval své výsledky o Moutardových kvadrikách na zborcené přímkové plochy, na nichž uvažoval jisté okolí přímky, nikoliv jen přímku samu. Rozlišoval přitom případy s jednou nebo dvěma větvemi fleknodální čáry. Na fleknodální body přímky zborcené plochy narazili už v polovině minulého století Arthur Cayley a George Salmon. Jsou to body, v nichž k ploše existuje tečna s čtyřbodovým stykem. Fleknodálním útvarům věnoval Eduard Čech značnou pozornost i ve své česky psané knize z roku 1926.

K zmíněnému už Fubiniho záměru vybudovat projektivní diferenciální geometrii jako studium diferenciálních forem přispěl Eduard Čech celou sérií prací. Připomenu jen, že našel geometrickou interpretaci poměru oněch forem, který je analogií lineárního elementu z eukleidovské diferenciální geometrie, a vyšetřoval integrál tohoto poměru.

O Darbouxových čarách jsem se už zmínil. K nim konjugované jsou čáry Segreovy, které studoval Corrado Segre v roce 1908. Bodem plochy procházejí tři Segreho čáry. Že jejich oskulační roviny v něm mají společnou přímku, je Čechův objev; proto má pojmenování *Čechova přímka.* Eduard Čech nalezl i všechny plochy, na nichž Darbouxovy nebo Segreovy čáry jsou rovinné; v literatuře se jim též říká *Čechovy plochy.*

Užiji nyní naprosté zkratky. Asi desetileté dílo z prvního brněnského období Eduarda Čecha učinilo z něho spoluzakladatele projektivní diferenciální geometrie. Velmi výrazně ovlivnilo její další vývoj a připoutalo k ní aktivní zájem našich i zahraničních geometrů. Patrně největší ohlas v cizině našlo v Itálii a Rumunsku.

* * *

Přecházím k závěru. Jak jsem už na začátku řekl, bude to osobní vzpomínka.

Na pozim v roce 1949 jsem se stal stipendistou v Badatelském ústavu matematickém při tehdejší České akademii věd a umění. Ředitelem ústavu byl Eduard Čech. Před Vánocemi mi zadal téma disertační práce. Bylo – kupodivu

– z metrické diferenciální geometrie a svými počátky sahalo až do poloviny minulého století. V trojrozměrném prostoru šlo o starý problém, s jehož řešením jsem už tehdy byl obeznámen. Jednalo se o existenci jistého geometrického útvaru, na který se vznesl jistý požadavek; bylo dávno známo, že pak má onen útvar jistou vlastnost. Přenesení onoho požadavku do vícerozměrného prostoru bylo možné mnoha způsoby, jejich počet prudce rostl s dimenzí. Ale starou známou vlastnost onoho útvaru bylo možné vyslovit i tak, že dimenze v ní byla potlačena. To Eduard Čech udělal a v čtyřrozměrném prostoru vyšetřil existenci útvaru majícího tu prolongovanou vlastnost ze tří dimenzí. Dal mi svůj rukopis a vyzval mě, abych to učinil v pětirozměrném prostoru. Snažil jsem se o to podle Čechova rukopisu, ale neúspěšně. Čechova autorita byla příliš silná, než abych hned začal jinak. Až jednou večer při návratu domů z Univerzitní knihovny mě napadlo, jak zkusit změnu východiska. Ještě tu noc jsem je vyzkoušel a nad ránem jsem věděl, že je vyhráno, i když dokončení mě bude stát ještě hodně úsilí.

Co nyní povím, není přeřeknutí. Eduardu Čechovi jsem nejvíc povděčen za několik měsíců práce na jeho problému.

Vážené paní, pánové, skončil jsem.

C. Osobní vzpomínky na Eduarda Čecha

Někdy v prosinci 1949 mi E. Čech dal téma disertační práce. V každém bodě dvakrát diferencovatelné prostorové křivky lze – až na jisté výjimky – definovat tři vzájemně kolmé přímky: tečnu, hlavní normálu (leží v oskulační rovině) a binormálu. Tento pravoúhlý trojhran jako první v roce 1847 studoval Jean Frenet (1816–1900). Joseph Bertrand (1822–1903) byl svými astronomickými studiemi přiveden k této otázce: za jakých podmínek lze mezi body B a B' dvou křivek C a C' definovat takovou korespondenci, že dvojice Frenetových trojhranů v odpovídajících si bodech B a B' tvoří útvar neproměnného tvaru? Nechají-li se stranou jisté speciální případy, nastává to tehdy a jen tehdy, když mezi křivostí k a torsí $\varkappa$ jedné křivky platí lineární relace (první konstanta nenulová)

$$\text{konst.} \cdot k + \text{konst.} \cdot \varkappa + 1 = 0. \tag{*}$$

Křivkám s touto vlastností se říká Bertrandovy. O nich jedná každá lepší učebnice diferenciální geometrie, viz třeba Wilhelm Blaschke: *Differentialgeometrie I. Elementare Differentialgeometie.*[23]

[23] Berlin, 1. vydání: 1921, str. 19–20; 5. vydání přepracoval a o víc než polovinu rozšířil Kurt Leichtweiss: 1973, str. 40–41. V obou vydáních je na str. 19 a 40 citován (doplňuji až opravuji) J. Bertrand: *Mémoire sur la théorie des courbes à double courbure*, Journal de mathématiques pures et appliquées 15(1850), 332–350 (rovnice (*) je poprvé na str. 347 s označením (η)), a s týmž názvem, jako *Extrait par l'auteur*, Comptes rendus hedbomadaires des séances de l'Académie des sciences, Paris, 31(1850), 623–624 (poslední věta na str. 624).

E. Čech se mě nejdříve tázal, zda o Bertrandových čarách něco vím. Když jsem přitakal, dal mi několik listů svých výpočtů o analogii Bertrandových čar ve čtyřrozměrném prostoru a vyzval mě, abych se pokusil o následující analogii v pětirozměrném prostoru. Opis Čechových výpočtů mám dodnes; je u nich má poznámka *Leden-květen 50.*

Co následovalo, popsal jsem už v příspěvku *Vzpomínky na mé učitele* v Jubilejním almanachu Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.[24] Proto jen zcela stručně. Více než měsíc jsem se namáhal přenést Čechův postup ze čtyřrozměrného prostoru do pětirozměrného – a marně. Když jsem začal jinak, podařil se mi průlom. Za čtyři měsíce usilovné práce jsem odevzdal disertaci E. Čechovi.

S mým povědomím o Bertrandových čarách to byla velká náhoda. Něco málo jsem o nich věděl už z brněnských studijních let z četby knihy Václava Hlavatého (1894–1996): *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet.*[25] Ale více jsem se k nim dostal úplně jinak.

Na podzim 1949 jsem zamýšlel vykonat II. státní zkoušku z matematiky i z deskriptivní geometrie. Ve zkušební komisi pro učitelství na gymnasiích mi v červnu nejdříve odmítli uznat předepsané zkoušky (z nematematických předmětů), které jsem vykonal už v Brně; ale poradili mi, abych o uznání požádal předsedu komise Viktora Trkala (1888–1956), profesora teoretické fyziky na univerzitě. Byl jsem překvapen, jak vstřícně mě přijal a jak ochotně mi vyhověl. Vyptával se mě, co studuji, a když jsem se zmínil i o diferenciální geometrii, poznamenal, že Joseph Bertrand dospěl ke křivkám, o nichž jedná téměř každá její učebnice, z astronomického problému. Už si nevzpomínám, jak jsem se dověděl o knížce Bertrand Gambier (1879–1954): *Les courbes de Bertrand.*[26] Snad jsem zahlédl její recenzi, kterou napsal B. Bydžovský.[27] Svazeček jsem si vypůjčil v knihovně Jednoty a pořídil jsem si z něj výpisky, které mám dodnes; je na nich datum *srpen 1949.* Takže jsem si opravdu mohl dovolit odpovědět kladně na Čechovu otázku.

* * *

Od E. Čecha jsem dostal i námět ke kandidátské disertaci. Stalo se to poněkud kuriózním způsobem, kdy neměl po ruce ani kousek papíru, ale jako velmi silný kuřák krabičku sirek. Na ni mi nakreslil, oč mu jde: o dvourozměrnou analogii Bertrandových křivek, tedy o jakési Bertrandovy plochy.

V každém bodě B dostatečně hladké plochy existuje její tečná rovina, a tedy i normála; a v každém bodě B takové plochy – s výjimkou jistých speciálních bodů (třeba všech bodů kulové plochy) – existují dva kolmé směry v tečné rovině, v nichž je křivost normálního řezu plochy v bodě B (tj. řezu rovinou jdoucí normálou v bodě B) extrémní. Normála a tyto dva hlavní směry tvoří pravoúhlý trojhran s vrcholem B. Tak jako J. Frenet ukázal význam trojhranu,

[24] Editovali Ivan Netuka – Milena Stiborová, Praha, 2002, str. 105–107.
[25] Praha, 1937, str. 52–55, německý překlad: Groningen, 1939.
[26] Travaux et Mémoires de l'Université de Lille, nouvelle série, vol. 4, Paris, 1926.
[27] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 56(1927), 289.

který vytvářejí v bodě křivky její tečna, hlavní normála a binormála, tak Gaston Darboux předvedl, jak důležitý je pro studium plochy pravoúhlý trojhran tvořený v jejím bodě hlavními tečnami a normálou.

Jako nejbližší se nabízí tato otázka: za jakých podmínek existuje dvojice ploch P a P', mezi jejichž body B a B' lze zřídit korespondenci tak, že Darbouxovy trojhrany s vrcholy v nich tvoří neproměnný útvar vůči grupě eukleidovských pohybů? Odpověď na ni mi E. Čech řekl (důkaz je jednoduchý): jedině v triviálním případě, že plochy P a P' jsou paralelní, tj. když spojnice BB' pevné délky je společnou normálou ploch P a P'. Úkol, který mi E. Čech zadal, zněl krátce: vyšetřit, zda při nějakém zeslabení požadavků na figuru průvodních trojhranů lze dospět k netriviálním situacím.

Zase jsem nebyl úplně nepřipraven. Jedna z prvních knížek, které jsem si koupil v knihkupectví *Sovětská kniha* na Václavském náměstí, byla v roce 1948 tato učebnice: Сергей П. Фиников (1883–1964): *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии* (Moskva, 1948). Už nevím, jak jsem se dozvěděl o knize Élie Cartan (1869–1951): *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, 1945, ruský překlad: Moskva, 1962). Dostal jsem se k ní v roce 1949 způsobem, který byl kdysi zcela běžný, ale později až neskutečný. Na poslední stránce knihy je nálepka ve tvaru rozevřené knihy hřbetem k čtenáři; nalevo je napsáno: *Librairie Parisienne – Léon Pommeret*, napravo *Praha I, Valentinská No. 7, roh Veleslavínova.* Protože jsem často chodíval do Univerzitní knihovny v Klementinu (nyní je to už dlouho Národní knihovna), o francouzském knihkupectví jsem věděl, a tak jsem je navštívil. Bylo ve větší místnosti s neuvěřitelným množstvím knih v neuvěřitelném nepořádku. V něm kraloval pan Pommeret, velmi drobné postavy, už v pokročilejším věku. Oslovil jsem ho a přednesl svou prosbu francouzsky, ale on mi okamžitě ukázal, že mluví česky lépe než já francouzsky. Poradil mi, abych si přinesl doporučení od nějakého národního podniku, tomu jsem ovšem nemohl vyhovět. Přesto jsem za několik málo týdnů dostal poštou kartičku, že knihu si mohu vyzvednout. Ihned jsem to učinil. Ale než jsem dal zase dohromady jakýsi obnos na další francouzskou učebnici, pan Pommeret byl vyhoštěn z republiky, údajně jako agent francouzské výzvědné služby.

Když mi E. Čech na krabičku sirek črtal, oč mu jde, byl jsem s Cartanovým počtem vnějších forem už natolik seznámen, že jsem se s ním mohl pustit do řešení Čechova problému. Základní otázkou bylo, jak zeslabit požadavek na tuhost figury tvořené průvodními Darbouxovými trojhrany v korespondujících si bodech B a B' dvojice ploch P a P'. Myslitelné třeba bylo upustit od požadavku pevné délky úsečky BB' anebo při její pevné délce upustit od její neměnné polohy vůči Darbouxovu trojhranu v jednom z bodů B, B' či dokonce v obou. Ale brzy jsem zjistil, že výhodnější bude něco jiného. Zřeknout se Darbouxových trojhranů a nahradit je ortogonálními trojhrany T a T' tvořenými na každé ploše P a P' jejich normálami a tečnami dvou ortogonálních kongruencí čar K a K' – a pak se ptát, kdy na plochách P a P' existují kongruence K a K' takové a korespondence mezi body B a B' ploch P a P' taková, že ortogonální trojhrany T a T' v korespondujících bodech B a B' tvoří pevný útvar. Odpověděl jsem takto. Dochází k tomu, jakmile plocha P (a tedy i plocha P') má tuto vlastnost: její Gaussova křivost K a střední křivost H jsou vázány vztahem

$$\text{konst.} \cdot K + \text{konst.} \cdot H + 1 = 0$$

(za jistých omezujících podmínek pro obě konstanty). Vidíme, že je to podmínka zcela analogická k podmínce (*) pro Bertrandovy křivky.

Jednoduchý příklad na dvojici Bertrandových ploch tvoří pseudosféra (rotační plocha se zápornou Gaussovou křivostí) a souosá rotační válcová plocha. Základem konstrukce je známá vlastnost meridiánu pseudosféry, traktrix:

Vzdálenost bodu na pseudosféře od její osy, měřená po tečně v něm k poledníku, je konstantní.

* * *

K oběma disertacím pro RNDr. a CSc. připojím tři poznámky.

O každé jsem mluvil s E. Čechem právě dvakrát: když mi zadával námět a když jsem mu donesl výsledek. Musil jsem o nich referovat na schůzích pražské matematické obce. Nynější úřední hypertrofie při doktorátu Ph.D. byla tenkrát neznámá.

Odevzdával jsem obě v nejjednodušší formě, strojopisem na volných listech, ve zcela obyčejných odkládacích deskách. Od první se mi zachovala kopie na průklepovém papíru – 59 stran s datem dokončení *duben 1950.* Luxusní vazba se zlatým nápisem alespoň stostránkové disertace, jak je nyní zvykem, byla tenkrát mimo moje povědomí a nikdo ji po mně nežádal.

Obě disertace byly uveřejněny; první s názvem *Кривые Бертрана в пятимерном пространстве*[28] jsem musil z rukopisu zkrátit na polovinu, aby se splnilo tehdejší omezení na nejvýš 32 tiskových stran. Tato redukce byla pro mě výbornou školou, jak matematický text psát i při stručnosti srozumitelně [děkanátu jsem tehdy musil předložit potvrzení o jejím publikování alespoň ve výtahu]. Druhá [pokud se pamatuji, nezkrácená; kopie se mi nezachovala] jako *Поверхности аналогичные кривым Бертрана.*[29]

* * *

Za své tříleté aspirantury jsem E. Čechovi předložil i článek z jeho teorie korespondencí *O projektivních diferenciálních invariantech rovinné vrstvy křivek.*[30] E. Čech jej doplnil krátkou předmluvou. Vytištěna je tak, že musím být považován za jejího autora. E. Čech se v ní zmiňuje o třech pracích Otakara Borůvky (1899–1995), profesora brněnské přírodovědecké fakulty, a sice tak, že vznikly z jeho podnětu.[31] To se velmi nelíbilo O. Borůvkovi. Souhlasil, že to

[28] Чехословацкий математический журнал 2 (77) (1952), 57–87.
[29] Tamtéž 5 (80) (1955), 194–219.
[30] Časopis pro pěstování matematiky 78(1953), 229–258.
[31] Viz strana 230 dole.

tak bylo u dvou, nikoliv u třetí, pro niž byl podnět jeho vlastní. Dostal jsem se tak mezi své dva učitele, ani jednoho jsem nechtěl dozlobit. Tenkrát jsem dosti přemýšlel, jak z této situace. Snad se mi to podařilo.

Chtěl jsem učit, a tak jsem po aspirantuře rád přijal místo na tehdy vzniklé zeměměřické fakultě. K Čechově problematice o Bertrandových plochách jsem se po kratším čase vrátil, dodnes mám schovány dlouhé výpočty ze začátku druhé poloviny padesátých let. Ale protože jsem s výsledky stále nebyl spokojen, nic jsem z nich neuveřejnil. Naopak, vrátil jsem se k problematice „geometrie ve velkém“, s níž jsem se seznámil nikoliv na přednáškách, ale z knih, které jsem četl ve Vyčichlově knihovně, když jsem v ní pracoval jako začínající asistent ve školním roce 1950/51.