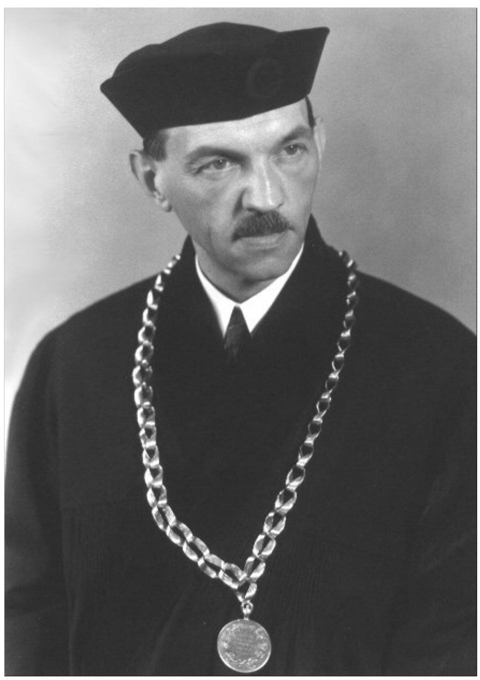
Life and work of Vojtěch Jarník

[Photographs]

In: Břetislav Novák (editor): Life and work of Vojtěch Jarník. (English). Praha: Society of Czech Mathematicians and Physicists, 1999. pp. 5--8.

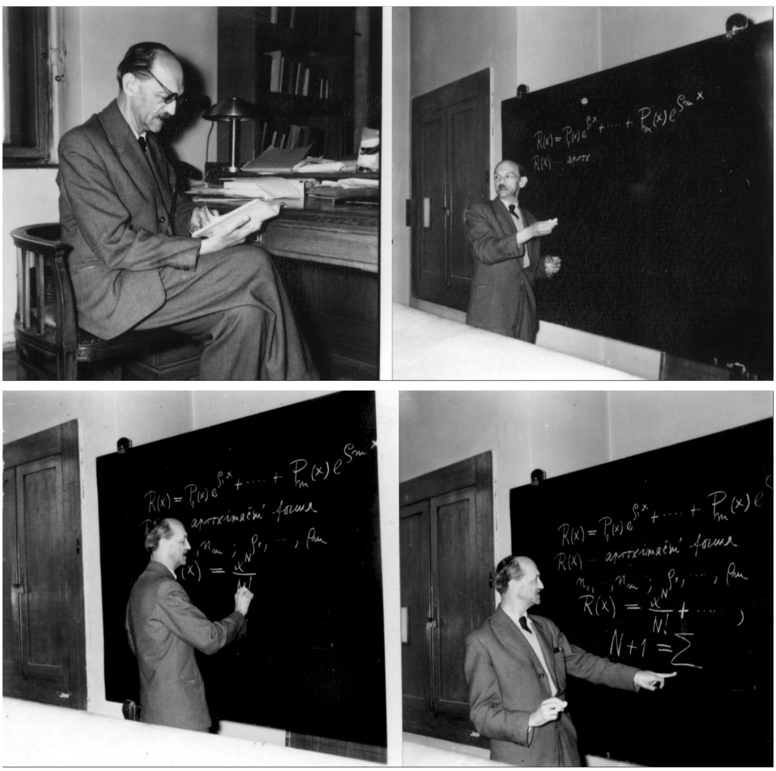
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402238

At eighteen, graduating from secondary school



**As Dean of the Faculty of Mathematics and Physics,
Charles University**

Receiving an award from the President of the Czechoslovak Academy of Sciences



At his desk and at the blackboard

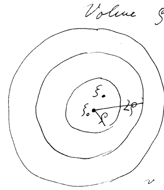
Meeting a foreign guest

On Labour Day (with Prof. Vl. Kořínek)

Řady holomorfních funkcí.
Řada Taylorova a Laurentova.

Věta. Buďte F_n holomorfní v otevřené $\Omega \subset S$, $F_n \to F$ lokálně stejnoměrně v Ω. Potom F je holomorfní v Ω. Dále je $F_n^{(p)} \to F^{(p)}$ lokálně stejnoměrně v $\Omega - \{\infty\}$ pro $p = 1, 2, 3, \dots$

Důkaz. 1) Buďte $\xi_0 \in \Omega - \{\infty\}$. Dokážeme, že existuje $\rho > 0$ tak, že v $U(\xi_0, \rho)$ je F holomorfní, $F_n^{(p)} \to F^{(p)}$ stejnom. v $U(\xi_0, \rho)$.
Volme ρ (konečné) tak, že $U(\xi_0, 3\rho) \subset \Omega$.



Buďte φ kružnice
$\varphi(t) = \xi_0 + 2\rho e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.
Potom pro $\xi \in U(\xi_0, \rho)$
je (1) $F_n(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F_n(z)}{z-\xi}\,dz$;
konvergence je stejnoměrná v kompaktní $\overline{U(\xi_0, 2\rho)}$, tedy je též F spojitá, takže existuje (2) $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F(z)}{z-\xi}\,dz = G(\xi)$
a je holomorfní v $U(\xi_0, 2\rho)$ (věta 27).
Chci dokázat, že $G(\xi) = F(\xi)$ v $U(\xi_0, \rho)$; bude dokázána holomorfnost F. Jelikož $F_n(z) \to F(z)$ stejnoměrně na $[\varphi]$, a $\left|\frac{1}{z-\xi}\right| < \frac{1}{\rho}$ pro $z \in [\varphi]$, $\xi \in U(\xi_0, \rho)$, je zřejmé

(3) $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F_n(z)}{z-\xi}\,dz \to \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F(z)}{z-\xi}\,dz$, stejnoměrně

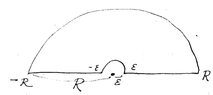
(4) $\frac{p!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F_n(z)}{(z-\xi)^{p+1}}\,dz \to \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{F(z)}{(z-\xi)^{p+1}}\,dz$;

Z (1), (2), (3) plyne $F_n(\xi) \to G(\xi)$, tedy $G(\xi) = F(\xi)$ – tedy F je holomorfní, a z (4) spolu s větou 27 plyne $F_n^{(p)}(\xi) \to F^{(p)}(\xi)$ stejnoměrně; neboť $\left|\frac{F_n(z) - F(z)}{(z-\xi)^{p+1}}\right| \le \frac{\varepsilon}{\rho^{p+1}}$ pro $n > n_0$ a všechna $z \in [\varphi]$, $\xi \in U(\xi_0, \rho)$

Příklady 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z > 0} \mathrm{Res}\, \frac{P(z)}{Q(z)}$

(kde P, Q jsou polynomy, stupeň $Q \ge$ stupeň $P + 2$, $Q(x) \neq 0$ na reálné ose

2) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \left(= \lim_{R \to +\infty} \int_0^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx \right)$.



φ

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z}\,dz + \int_{-\varphi_\varepsilon} + \int_\varepsilon^R + \int_{\varphi_R} = 0$$

$\varphi_R(t) = Re^{it}$ $(0 \le t \le \pi)$

$$\int_{\varphi_R} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = i \int_0^\pi e^{iR(\cos t + i \sin t)}\,dt$$

$\int_{\varphi_\varepsilon} \to \pi i$ pro $\varepsilon \to 0$

$$\left| \int_{\varphi_R} \right| \le 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t}\,dt \le 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R\frac{2}{\pi}t}\,dt < 2 \cdot \frac{\pi}{2R} \to 0$$ pro $R \to +\infty$

$$\lim_{R \to +\infty} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^R \right) = \lim_{R \to \infty} 2i \int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{\varphi_\varepsilon} \dots$$

$$2i \int_\varepsilon^{+\infty} = \int_{\varphi_\varepsilon} \to \pi i\,; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Part of lectures of V. Jarník