Life and work of Vojtěch Jarník

Vojtěch Jarník
[Fascimile of a manuscript of V. Jarník: "Einige ungelöste Probleme der Gitterpunktlehre“]

In: Břetislav Novák (editor): Life and work of Vojtěch Jarník. (German). Praha: Society of Czech Mathematicians and Physicists, 1999. pp. 189--198.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402260

Terms of use:

© Society of Czech Mathematicians and Physicists

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Einige ungelöste Probleme der Gitterpunkt-
lehre.

Vojtěch Jarník, Praha

1

Es sei $Q(u) = Q(u_1, u_2, \dots, u_k)$ eine positiv definite quadratische Form, $A_Q(x)$ die Anzahl der im Ellipsoid $Q(u) \leqq x$ liegenden Gitterpunkte $(x > 0)$, $C_Q x^{\frac{1}{2}k}$ das Volumen des Ellipsoids, $P_Q(x) = A_Q(x) - C_Q x^{\frac{1}{2}k}$. Bekanntlich ist

(1) $P_Q(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}k - 1 + \frac{1}{k+1}}\right)$, $P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right)$.

~~Für k~~ ~~Definiert~~

Setzt man also $f(Q)$ gleich der unteren Grenze der b mit $P_Q(x) = O(x^b)$, so hat man

(2) $\frac{1}{4}(k-1) \leqq f(Q) \leqq \frac{1}{2}k - 1 + \frac{1}{k+1}$.

Für $k = 2, 3$ ist $f(Q)$ für kein Q bekannt, obwohl es manchen Autoren durch äusserst geistreiche Überlegungen gelang, die obere Schranke von $f(Q)$ in (2) z. B. für den Kreis und die dreidimensionale Kugel herabzudrücken. Ganz anders liegt die Sache für $k \geqq 4$ und insbesondere für $k \geqq 5$.

L2

Die Form $Q(u)$ heisse rational, wenn es ein $\alpha > 0$ gibt, sodass $\alpha Q(u)$ ganze Koeffizienten besitzt; sonst heisse $Q(u)$ irrational. Ist nun $k \geqq 5$ und Q rational, so ist nach Walfisz und Landau

$$(3) \quad P_Q(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right), \quad P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Die zu (3) führende Methode (deren Prinzip auf Hardy zurückgeht) ist ganz verschieden von den zu (2) führenden Methoden. Für $k=4$ führt diese Methode unmittelbar zu

$$(4) \quad P_Q(x) = O(x \log^2 x), \quad P_Q(x) = \Omega(x)$$

für $k = 4$ und rationales Q; verschiedenen Autoren ist es gelungen, den Faktor $\log^2 x$ herabzudrücken; ~~währe~~ andererseits weiss man, dass man diesen Faktor nicht gänzlich unterdrücken kann.

3

Meine Absicht ist es, in dieser Mitteilung auf einige ungelöste Probleme hinzuweisen, die sich meistens auf den Fall $k \geqq 5$ beziehen. Da die Grössenordnung von P_Q durch (3) für rationale Q bestimmt ist, ist es natürlich, ~~die~~ irrationale Q zu untersuchen. ~~Soviel ich weiss, hat man~~ Man weiss noch nicht, ob die Abschätzung $P_Q(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1})$ für alle irrationalen Q mit $k \geqq 5$ gilt. Für eine spezielle Klasse von Formen hat man aber diese Frage – und noch viele weitere Fragen – beantwortet. Es ~~sind~~ handelt sich um Formen folgender Gestalt

$$
\begin{aligned}
(5)\quad Q(u_1, \dots, u_k) = {} & \alpha_1 Q_1(u_1, \dots, u_{k_1}) + \\
& + \alpha_2 Q_2(u_{k_1+1}, \dots, u_{k_2}) + \dots + \\
& + \alpha_r Q_r(u_{k_{r-1}+1}, \dots, u_{k_r}),
\end{aligned}
$$

wo $\alpha_j > 0$, $0 = k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_r = k$ und die positiv definiten Formen Q_j ganze Koeffizenten haben.

4

~~Ist~~ Ist $k \geqq 5$ und die Form (5) irrational, so ist – im Gegensatz zu (3) –

(6) $P_Q(x) = o(x^{\frac{k}{2}-1})$,

und diese Abschätzung lässt sich nicht verschärfen, solange man alle $\alpha_j > 0$ zur Konkurrenz zulässt. Für die „Mehrzahl" der Formen (5) lässt sich aber (6) verschärfen. Z. B.: Ist $k \geqq 5$,

(7) $Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2 + \dots + \alpha_k u_k^2$, ~~so~~

so ist für fast alle $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$f(Q) \leqq \tfrac{1}{4} k.$$

Es ist nicht bekannt, ob es eine Form (5) mit $f(Q) < \frac{1}{4}k$ gibt. Ist in (5) $k_{j+1} - k_j \geqq 4$, $\tau \geqq 2$, so kann man mehr ~~sg~~ sagen: stets ist $\frac{1}{2}k - \tau \leqq f(Q) \leqq \frac{1}{2}k - 1$, zu jedem σ ~~mit~~ mit $\frac{1}{2}k - \tau \leqq \sigma \leqq \frac{1}{2}k - 1$ gibt es ein System $\alpha_1, \dots, \alpha_\tau$ mit $f(Q) = \sigma$ und für fast alle

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ist $f(Q) = \frac{1}{2}k - \tau$. Ist $\tau = 2$, $k_2 - k_1 \geqq 4$, $k_1 - k_0 \geqq 4$, so kann man sogar für jedes individuelle System α_1, α_2 die Zahl $f(Q)$ bestimmen, sobald man ~~da~~ weiss, wie gut sich $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ durch rationale Zahlen approximieren lässt. Im Falle $\tau > 2$ kennt man ~~kein~~ dagegen kein interessantes System $\alpha_1, \ldots, \cancel{\alpha_k}\,\alpha_\tau$ mit $f(Q) < \frac{1}{2}k - 1$, für welches man $f(Q)$ bestimmen könnte.

Wir wenden uns nun den Mittelwerten

$$(8) \qquad M_Q(x) = \int_0^x P_Q^2(y)\,dy$$

zu. Ist Q rational, so ist für $x \to +\infty$

$$(9) \quad \begin{cases} M_Q(x) \sim K_Q\, x^{\frac{3}{2}} & \text{für } k = 2, \\ M_Q(x) \sim K_Q\, x^2 \log x & \text{für } k = 3, \\ M_Q(x) \sim K_Q\, x^{k-1} & \text{für } k > 3. \end{cases}$$

Dabei bedeuten K_Q, und weiter b_Q, c_Q, d_Q, e_Q positive, nur von Q abhängige Konstanten.

ct. b_Q, c_Q, d_Q, e_Q

16

Für jede positiv definite Form Q (rationale oder irrationale, $k = 2, 3, 4, \dots$) gilt die der zweiten Formel (1) entsprechende Formel

$$(10) \quad M_Q(x) > b_Q\, x^{\frac{k+1}{2}} \quad \text{für } x > 1.$$

Ist $k \geqq 4$,

$$(11) \quad Q(u) = \alpha_1 u_1^2 + \dots + \alpha_k u_k^2,$$

so ist für fast alle $\alpha_1, \dots, \alpha_k$

$$(12) \quad M_Q(x) = O\left(x^{\frac{k+1}{2}} \log^{3k+3} x\right).$$

Man vergleiche (10) mit (12); es ist aber wieder kein interessantes System $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ mit (12) bekannt. Der „wahre Exponent" hängt also nach (9), (12) ganz wesentlich von den Koeffizienten von Q ab, wenn $k > 3$. Dagegen gilt für jede Form (11)

$$(13) \quad b_Q\, x^2 < M_Q(x) < c_Q\, x^2 \log x, \quad \text{wenn } k = 3,$$

$x > 2$, und sogar

$$(14) \quad b_Q\, x^{\frac{3}{2}} < M_Q(x) < c_Q\, x^{\frac{3}{2}}, \quad \text{wenn } k = 2,\ x > 1.$$

17

Für $k = 3$ ~~hat man~~ bleibt also nur eine logarithmische Spanne übrig, für $k=2$ bleibt höchstens die Frage übrig, ob $M_Q(x)\cdot x^{-\frac{3}{2}}$ auch für irrationale Q der Gestalt (11) einem Grenzwert zustreben kann.

Es werde noch ausdrücklich betont, dass für die allgemeinsten irrationalen Formen wieder keine abschliessende Resultate über $M_Q(x)$ bekannt sind.

Und noch eine letzte Bemerkung. Ist Q eine irrationale Form der Gestalt (5) mit $\tau=2$, $k_1-k_0 \geqq 6$, $k_2-k_1 \geqq 6$, so kann man den gesamten Verlauf von $M_Q(x)$ ziemlich genau beschreiben. Es ergibt sich, dass die Grössenordnung von $M_Q(x)$ für $x \to +\infty$ in einem gewissen Sinne „schwankt" — mit Ausnahme des Falles, wo die Teilnenner der Kettenbruchentwicklung von α_2/α_1 beschränkt

18

sind ; ~~und es~~ dann ist nämlich

$d_Q x^{k-3} < M_Q(x) < e_Q x^{k-3}$ für $x > 1$,

und man kann fragen, ob in diesem Falle (analog wie in (9)) $M_Q(x)\, x^{-k+3}$ einem Grenzwert zustrebt.